Calcul matriciel

Opérations sur les matrices

Exercice 1 [01247] [Correction]
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\sigma(A)$ la somme des termes de A.
On pose

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Vérifier $J.A.J = \sigma(A).J$.

Exercice 2 [00403] [Correction]
Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

avec $0 \leq d \leq c \leq b \leq a$ et $b + c \leq a + d$.
Pour tout $n \geq 2$, on note

$$M^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$,

$$b_n + c_n \leq a_n + d_n.$$

Exercice 3 [00702] [Correction]
Résoudre l'équation $X^2 = A$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 [03976] [Correction]
Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A + A^{-1} = \mathrm{I}_n.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer $A^k + A^{-k}$.

Problèmes de commutation

Exercice 5 [01249] [Correction]
Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts et $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec D.

Exercice 6 [01250] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AB = BA \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, A = \lambda.I_n.$$

Exercice 7 [02687] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où B est nilpotente et commute avec A. Montrer que A et $A + B$ sont simultanément inversibles.

Exercice 8 [00697] [Correction]
On suppose que $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent et que A est inversible.
Justifier que les matrices A^{-1} et B commutent.

Exercice 9 [00709] [Correction]

(a) Quelles sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?

(b) Même question avec les matrices commutant avec toutes celles de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 10 [02689] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ des complexes distincts, $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et

$$C(A) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AM = MA \right\}.$$

Montrer que $(A^k)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $C(A)$.

Exercice 11 [03144] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

(a) Montrer que

$$\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; \forall M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), AM = MA \right\} = \left\{ \lambda \mathrm{I}_n \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A = MN \implies A = NM.$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I_n$

Exercice 12 [03164] [Correction]
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

Exercice 13 [03166] [Correction]
Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices symétriques.

Exercice 14 [03167] [Correction]
Soit $n \geq 2$. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toutes les matrices antisymétriques.

Exercice 15 [00712] [Correction]
Soient $D = \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$\varphi \colon M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto DM - MD.$$

(a) Déterminer noyau et image de l'endomorphisme φ.

(b) Préciser ces espaces quand D est à coefficients diagonaux distincts.

Calcul des puissances d'une matrice carrée

Exercice 16 [01252] [Correction]
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on pose $B = A - I$.
Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire l'expression de A^n.

Exercice 17 [01253] [Correction]
Calculer A^n pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de deux manières différentes.

Exercice 18 [01254] [Correction]
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $A^2 - 3A + 2I$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

(b) Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

(c) En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 19 [02929] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Majorer les coefficients de A^k.

(b) Calculer A^{-1}.

(c) Calculer $(A^{-1})^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Matrices carrées inversibles

Exercice 20 [01255] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).$$

Observer que

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I = 0.$$

À quelle condition A est-elle inversible ? Déterminer alors A^{-1}.

Exercice 21 [01256] [Correction]
Calculer l'inverse des matrices carrées suivantes :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice 22 [01257] [Correction]
Justifier que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & (-1) \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 23 [01259] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On pose

$$A = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1\leq k,\ell\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Calculer $A\overline{A}$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 24 [01260] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer $(A+I)^3$.

(b) En déduire que A est inversible.

Exercice 25 [01261] [Correction]
Soit $A = (1 - \delta_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

(a) Calculer A^2.

(b) Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1}.

Exercice 26 [01262] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $I + A$ soit inversible. On pose $B = (I - A)(I + A)^{-1}$.

(a) Montrer que $B = (I + A)^{-1}(I - A)$.

(b) Montrer que $I + B$ est inversible et exprimer A en fonction de B.

Exercice 27 [03420] [Correction]
Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) (n \geq 2)$ non nulles vérifiant

$$ABC = \mathrm{O}_n.$$

Montrer qu'au moins deux des matrices A, B, C ne sont pas inversibles.

Exercice 28 [02575] [Correction]
Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Exercice 29 [01291] [Correction]
Montrer que les matrices carrées d'ordre $n \geq 2$ suivantes sont inversibles, et déterminer leur inverse par la méthode de Gauss :

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -a \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & & (1) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 2 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}$

Symétrie matricielle

Exercice 30 [01263] [Correction]
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit encore une matrice symétrique.

Exercice 31 [01264] [Correction]
Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 32 [04968] [Correction]
Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice nilpotente.

Structures formées par un ensemble de matrices

Exercice 33 [01266] [Correction]
Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

avec $a,b,c \in \mathbb{R}$.
Notre objectif est d'établir que l'inverse d'une matrice inversible de E appartient encore à E, sans pour autant calculer cet inverse.

(a) Montrer que $(E,+,.)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.

(b) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

(c) À quelle condition sur $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $A = M(a,b,c)$ est-elle inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? On suppose cette condition vérifiée. En considérant l'application $f\colon E \to E$ définie par $f(X) = AX$, montrer que $A^{-1} \in E$.

Exercice 34 [01267] [Correction]
(Matrices de permutation) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note

$$P(\sigma) = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

appelée matrice de permutation associée à σ.

(a) Montrer que
$$\forall (\sigma,\sigma') \in \mathcal{S}_n^2, P(\sigma \circ \sigma') = P(\sigma)P(\sigma').$$

(b) En déduire que $E = \left\{P(\sigma) \,\middle|\, \sigma \in \mathcal{S}_n\right\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{S}_n$.

(c) Vérifier que
$$^t\big(P(\sigma)\big) = P(\sigma^{-1}).$$

Exercice 35 [01268] [Correction]
Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a+b & b \\ -b & a-b \end{pmatrix} \text{ avec } (a,b) \in \mathbb{K}^2.$$

(a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, en donner une base.

(b) Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

(c) Déterminer les inversibles de E.

(d) Déterminer les diviseurs de zéro de E c'est-à-dire les matrices A et $B \in E$ vérifiant $AB = O_2$ avec $A, B \neq O_2$.

Exercice 36 [01563] [Correction]
On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est centro-symétrique si

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2, a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}.$$

(a) Montrer que le sous-ensemble C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ formé des matrices centro-symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Montrer que le produit de deux matrices centro-symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est aussi centro-symétrique.

(c) Soit A centro-symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et inversible.
En considérant l'application $X \mapsto AX$ de C vers C, montrer que A^{-1} est centro-symétrique.

Matrice d'une application linéaires

Exercice 37 [01269] [Correction]
Déterminer la matrice relative aux bases canoniques des applications linéaires f suivantes :

(a)
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) \mapsto (x+y, y-2x+z) \end{cases}$$

(b)
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) \mapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$$

(c) $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] \\ P \mapsto P(X+1) \end{cases}$

(d)
$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto \big(P(1), P(2), P(3), P(4)\big) \end{cases}$$

Exercice 38 [01270] [Correction]
On considère les sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$P = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+2y-z=0\right\} \text{ et } D = \operatorname{Vect}(w) \text{ où } w = (1,0,-1).$$

On note $\mathcal{B} = (i,j,k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On note p la projection vectorielle sur P parallèlement à D, q celle sur D parallèlement à P, et enfin, s la symétrie vectorielle par rapport à P et parallèlement à D.

(a) Former la matrice de p dans $\mathcal{B}$.

(b) En déduire les matrices, dans $\mathcal{B}$, de q et de s.

Exercice 39 [01271] [Correction]
Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = P(X+1)$.

(a) Écrire la matrice A de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

(b) Justifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 40 [00714] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient général est donné par un coefficient binomial :

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ l'endomorphisme représenté par la matrice A dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$.

(a) Exprimer simplement $\varphi(P)$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

(b) Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

(c) Calculer A^{-1}.

Exercice 41 [00715] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\bar{z}$.

(a) Former la matrice de l'endomorphisme f du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans la base $(1, \mathrm{i})$.

(b) Déterminer image et noyau de f.

Matrice d'un endomorphisme dans une base bien choisie

Exercice 42 [01273] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 43 [01275] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$f^n = 0 \text{ et } f^{n-1} \neq 0.$$

(a) Justifier qu'il existe un vecteur $x \in E$ tel que la famille $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ forme une base de E.

(b) Déterminer les matrices de $f, f^2, \dots, f^{n-1}$ dans cette base.

(c) En déduire que

$$\left\{g \in \mathcal{L}(E) \,\middle|\, g \circ f = f \circ g\right\} = \operatorname{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2, \dots, f^{n-1}).$$

Exercice 44 [01277] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (i,j,k)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer A^2. Qu'en déduire sur f ?

(b) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$.

(c) Quelle est la matrice de f relativement à une base adaptée à la supplémentarité de $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Ker} f$?

Exercice 45 [01278] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.

(a) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Démontrer que ces sous-espaces sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(b) Déterminer une base adaptée à cette supplémentarité et écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Décrire f comme composée de transformations vectorielles élémentaires.

Exercice 46 [00719] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E pour laquelle :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 47 [04154] [Correction]
Soit f un endomorphisme non nul d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 vérifiant $f^3 + f = 0$.

(a) Soit $x \in E$. Démontrer que si $x = y + z$ avec $y \in \operatorname{Ker} f$ et $z \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$ alors $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$.

(b) Montrer que
$$E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}).$$

(c) Prouver $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) \geq 1$. Montrer que, si $x \in \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) \setminus \{0\}$ alors $(x, f(x))$ est une famille libre de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$.

(d) Que vaut $\det(-\operatorname{Id})$? En déduire $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) = 2$.

(e) Déterminer une base de E dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Changement de bases

Exercice 48 [01276] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est A.
On pose $\varepsilon_1 = (1,1,1), \varepsilon_2 = (1,-1,0), \varepsilon_3 = (1,0,1)$ et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ constitue une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Écrire la matrice de f dans cette base.

(c) Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 49 [00716] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathcal{B}$ par :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Soit $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ avec $\varepsilon_1 = (1,0,1), \varepsilon_2 = (-1,1,0), \varepsilon_3 = (1,1,1)$.
Montrer que $\mathcal{C}$ est une base.

(b) Déterminer la matrice de f dans $\mathcal{C}$.

(c) Calculer la matrice de f^n dans $\mathcal{B}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 50 [01282] [Correction]
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la famille définie par

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ \varepsilon_2 = e_1 - e_3 \\ \varepsilon_3 = e_1 - e_2. \end{cases}$$

(a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de E et former la matrice D de f dans $\mathcal{B}'$.

(b) Exprimer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 51 [01284] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est A.

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que la matrice de f dans $\mathcal{C}$ soit D.

(b) Déterminer la matrice P de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.

(c) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(d) En déduire le terme général des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = 4x_n - 2(y_n + z_n) \\ y_{n+1} = x_n - z_n \\ z_{n+1} = 3x_n - 2y_n - z_n. \end{cases}$$

Exercice 52 [03212] [Correction]

Soient $b = (i, j)$ et $B = (I, J)$ deux bases d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 et P la matrice de passage de b à B.
Pour $x \in E$, notons

$$v = \mathrm{Mat}_b\, x \text{ et } V = \mathrm{Mat}_B\, x.$$

(a) Retrouver la relation entre v et V.

(b) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et

$$m = \mathrm{Mat}_b\, f \text{ et } M = \mathrm{Mat}_B\, f.$$

Retrouver la relation entre m et M.

(c) Par quelle méthode peut-on calculer m^n lorsqu'on connaît deux vecteurs propres non colinéaires de f.

Exercice 53 [00717] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $e = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base e est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose $e'_1 = e_1 + e_3$, $e'_2 = e_1 + e_2$ et $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

(a) Montrer que la famille $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice B de f dans e'.

(b) Calculer A^n.

Exercice 54 [00718] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ forme une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

(b) Calculer A^n.

Exercice 55 [01283] [Correction]

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E dans laquelle la matrice représentative de f est une matrice diagonale D de coefficients diagonaux : $1, 2$ et 3.

(b) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Calculer P^{-1}.

(c) Quelle relation lie les matrices A, D, P et P^{-1} ?

(d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Rang d'une matrice

Exercice 56 [01285] [Correction]
Calculer le rang de familles de vecteurs suivantes de $\mathbb{R}^3$:
(a) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,1,0), x_2 = (1,0,1)$ et $x_3 = (0,1,1)$
(b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (2,1,1), x_2 = (1,2,1)$ et $x_3 = (1,1,2)$
(c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1), x_2 = (1,0,3)$ et $x_3 = (1,1,2)$.

Exercice 57 [01286] [Correction]
Calculer le rang des applications linéaires suivantes :
(a) $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par
$$f(x,y,z) = (-x+y+z, x-y+z, x+y-z).$$
(b) $f\colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3$ définie par
$$f(x,y,z) = (x-y, y-z, z-x).$$
(c) $f\colon \mathbb{K}^4 \to \mathbb{K}^4$ définie par
$$f(x,y,z,t) = (x+y-t, x+z+2t, 2x+y-z+t, -x+2y+z).$$

Exercice 58 [01287] [Correction]
Calculer le rang des matrices suivantes en fonction des paramètres :

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & \ddots & b \\ b & (0) & & a \end{pmatrix}$

Exercice 59 [01288] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(a) Donner le rang de M et la dimension de son noyau.
(b) Préciser noyau et image de M.
(c) Calculer M^n.

Exercice 60 [01289] [Correction]
Soit A et B deux matrices carrées d'ordre 3 telles que $AB = O_3$.
Montrer que l'une au moins de ces matrices est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 61 [00698] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
(a) Déterminer les rangs de A et B.
(b) Calculer BA en observant $(AB)^2 = AB$.

Exercice 62 [00699] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ matrices de rang 2 vérifiant $(AB)^2 = AB$.
Montrer $BA = I_2$.

Exercice 63 [00710] [Correction]
Soit G un groupe multiplicatif formé d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer que les éléments de G ont tous le même rang.

Systèmes d'équations linéaires

Exercice 64 [01292] [Correction]
Discuter, selon m paramètre réel, la dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
(a) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+my+z=0 \\ mx+y+mz=0 \end{cases}\right\}$
(b) $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x+y+mz=0 \\ x+my+z=0 \\ mx+y+z=0 \end{cases}\right\}$.

Exercice 65 [01293] [Correction]
On considère, pour m paramètre réel, les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + my + z = 0 \text{ et } mx + y - mz = 0\right\}$$

et

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - my + z = 0\right\}.$$

(a) Déterminer la dimension de F et G.

(b) Discuter, selon la valeur de m, la dimension du sous-espace vectoriel $F \cap G$.

Exercice 66 [01294] [Correction]
Résoudre en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$, les systèmes suivants d'inconnues complexes :

(a) $\begin{cases} x - y + z = m \\ x + my - z = 1 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} mx + y + z + t = 1 \\ x + my + z + t = m \\ x + y + mz + t = m + 1 \end{cases}$

Exercice 67 [01295] [Correction]
Soient $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre le système :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$$

Exercice 68 [01296] [Correction]
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + \dots + 2x_n = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + 3x_n = 1 \\ \vdots \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \dots + nx_n = 1. \end{cases}$$

Exercice 69 [01297] [Correction]
Résoudre le système d'équations suivant d'inconnues complexes :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ \quad \ddots \quad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$$

Exercice 70 [01298] [Correction]
Soient $a_1, \dots, a_n$ des points du plan complexe.
Déterminer à quelle(s) condition(s) il existe au moins un polygone à n sommets $z_1, \dots, z_n$ tel que :
a_i est le milieu de $[z_i\,;z_{i+1}]$ et a_n est le milieu de $[z_n\,;z_1]$.

Exercice 71 [02560] [Correction]
Discuter suivant a et b et résoudre

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1. \end{cases}$$

Exercice 72 [02579] [Correction]
Résoudre, en discutant selon $a, b \in \mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} ax + y + z + t = 1 \\ x + ay + z + t = b \\ x + y + az + t = b^2 \\ x + y + z + at = b^3. \end{cases}$$

Matrices équivalentes

Exercice 73 [00703] [Correction]

(a) Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non inversible si, et seulement si, elle est équivalente à une matrice nilpotente.

(b) Soit $f\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une application vérifiant : $f(\mathrm{O}_n) = 0$, $f(\mathrm{I}_n) \neq 0$ et pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$f(AB) = f(A)f(B).$$

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, $f(A) \neq 0$.

Exercice 74 [01602] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Justifier qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$\operatorname{rg}(UA + BV) = \min(n, \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B).$$

(b) On suppose $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \geq n$. Montrer qu'il existe $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que

$$UA + BV \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 75 [04963] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Existe-t-il une matrice $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ vérifiant $A = AMA$?

Matrices de rang 1

Exercice 76 [00700] [Correction]
Soit A une matrice carrée de rang 1. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2 = \lambda A$.

Exercice 77 [03460] [Correction]
Soit $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang 1.

(a) Montrer qu'il existe des matrices $U, V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telles que $H = U{}^tV$.

(b) En déduire

$$H^2 = \operatorname{tr}(H)H.$$

(c) On suppose $\operatorname{tr} H \neq -1$. Montrer que $\mathrm{I}_n + H$ est inversible et

$$(\mathrm{I}_n + H)^{-1} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{1 + \operatorname{tr} H} H.$$

(d) Soient $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\operatorname{tr}(HA^{-1}) \neq -1$. Montrer que $A + H$ est inversible et

$$(A + H)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \operatorname{tr}(HA^{-1})} A^{-1}HA^{-1}.$$

Exercice 78 [04974] [Correction]
Soient $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ deux familles libres d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Établir que la famille $\left(X_i{}^tY_j\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices de rang 1.

Rang d'une matrice par blocs

Exercice 79 [03134] [Correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) On note $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les colonnes de B à droite de celles de A.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A \iff \exists U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), B = AU.$$

(b) On note $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en accolant les lignes de C en dessous de celles de A.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A \iff \exists V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), C = VA.$$

(c) En déduire

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A \iff \exists U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}.$$

Exercice 80 [01604] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et M la matrice

$$M = \begin{pmatrix} A & O_{n,p} \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

Établir

$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

Exercice 81 [01649] [Correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
Montrer

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = n + \operatorname{rg} C.$$

Exercice 82 [02335] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{p,n} & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K}).$$

On suppose B inversible. Établir

$$\operatorname{rg} M = p \iff A = O_n.$$

Exercice 83 [03101] [Correction]
Soient $A \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{R})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}).$$

Déterminer le rang de M en fonction de celui de C.

Calcul par blocs

Exercice 84 [03264] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} O_n & A \\ I_n & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

(a) Montrer que A est inversible si, et seulement si, B l'est.

(b) Calculer B^p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 85 [03137] [Correction]
Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K}).$$

On suppose que les matrices A, D et M sont inversibles.
Exprimer M^{-1}.

Exercice 86 [03702] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 87 [04952] [Correction]
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(a) Exprimer le rang de

$$M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}.$$

(b) Calculer l'inverse de M lorsque cela est possible.

Trace

Exercice 88 [03258] [Correction]
Existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB - BA = I_n?$$

Exercice 89 [00729] [Correction]
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer

$$f^2 = \operatorname{tr}(f) f.$$

À quelle condition un endomorphisme de rang 1 est-il un projecteur ?

Exercice 90 [03029] [Correction]
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par

$$\varphi(M) = MA.$$

Exprimer la trace de φ en fonction de celle de A.

Exercice 91 [00730] [Correction]
Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
Montrer que si $\operatorname{tr} M = 0$, il existe deux matrices A et B telles que

$$M = AB - BA.$$

Exercice 92 [00731] [Correction]
Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(M) = \operatorname{tr}(AM)$.

Exercice 93 [00733] [Correction]
On note tr la forme linéaire trace sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Établir

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = \operatorname{Vect}\{[A, B] \mid A, B \in E\}$$

où l'on note $[A, B] = AB - BA$.

Exercice 94 [03261] [Correction]

(a) Dans un espace de dimension finie, pourquoi le rang d'un projecteur est-il égal à sa trace ?

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^q = I_n$.
Montrer

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k).$$

Exercice 95 [02388] [Correction]
Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H une partie non vide et finie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication.

(a) Soit $M \in H$. Montrer que $k \in \mathbb{N}^* \mapsto M^k \in H$ n'est pas injective.
En déduire que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soient

$$q = |H| \text{ et } P = \frac{1}{q}\sum_{M \in H} M.$$

(b) Montrer, si $M \in H$, que $MP = PM = P$. En déduire $P^2 = P$.

(c) Trouver un supplémentaire, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, stable par tous les éléments de H, de

$$\bigcap_{M \in H} \operatorname{Ker}(M - I_n).$$

(d) Montrer que

$$\sum_{M \in H} \operatorname{tr} M \in q\mathbb{N}.$$

Que dire si cette somme est nulle ?

Exercice 96 [02651] [Correction]

(a) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $\sum_{g \in G} \operatorname{tr} g = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

(b) Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par les éléments de G. Montrer qu'il existe un supplémentaire de V dans $\mathbb{R}^n$ stable par tous les éléments de G.

Exercice 97 [02616] [Correction]
Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA).$$

Montrer que f est proportionnelle à la trace.

Exercice 98 [02686] [Correction]

(a) Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA)$$

montrer que f est proportionnelle à la trace.

(b) Soit g un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$g(AB) = g(BA)$$

pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $g(I_n) = I_n$. Montrer que g conserve la trace.

Exercice 99 [03419] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la trace de l'endomorphisme $f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné par

$$f(M) = AM + MA.$$

Exercice 100 [02563] [Correction]
Pour A et B fixées dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, résoudre dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'équation

$$X = \operatorname{tr}(X)A + B.$$

Exercice 101 [02547] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n > 1$.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 n'est pas forcément un projecteur.
Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1 et de trace 1 est un projecteur.
Trouver une base de $\mathcal{L}(E)$ constituée de projecteurs.

Exercice 102 [03864] [Correction]
Soient $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A_1 + \dots + A_k = \mathrm{I}_n \text{ et } \forall 1 \le i \le k, A_i^2 = A_i.$$

Montrer

$$\forall 1 \le i \ne j \le k, A_iA_j = \mathrm{O}_n.$$

Exercice 103 [04163] [Correction]
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim E, p = \dim F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note

$$H = \left\{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\right\}.$$

(a) Si f est bijectif, montrer $H = \{0\}$.

(b) Montrer que $\dim H = np - r^2$ avec $r = \operatorname{rg} f$.

(c) On suppose que $E = F$ et on définit l'application $\varphi\colon g \mapsto f \circ g \circ f$. Montrer

$$\operatorname{tr} \varphi = (\operatorname{tr} f)^2.$$

Exercice 104 [04942] [Correction]
Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $f^3 + f = 0$.

(a) Montrer que f n'est pas surjectif.

(b) Montrer que f n'est pas diagonalisable et que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

(c) Montrer que, pour tout $x \in E \setminus \operatorname{Ker} f$, la famille $\big(f(x), f^2(x)\big)$ est une base de $\operatorname{Im} f$ et calculer la trace de f.

Exercice 105 [04976] [Correction]
À quelle condition existe-t-il des matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(AB - BA)^2 = \mathrm{I}_n$?

Application des matrices à l'étude d'applications linéaires

Exercice 106 [02679] [Correction]
Soient $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f^2 = g^2 = 0$ et $f \circ g = g \circ f$. Calculer $f \circ g$.

Exercice 107 [02688] [Correction]
Soit ω une racine primitive n-ième de 1. On pose

$$F_\omega(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) X^k$$

pour tout $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
Montrer que F_ω est un automorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et exprimer son inverse.

Exercice 108 [03160] [Correction]
Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n \ge 2$.

(a) Indiquer des endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E.

(b) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Montrer que pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, la famille $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E.

(c) Déterminer tous les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est diagonale dans toutes les bases de E.

(d) Quels sont les endomorphismes de E dont la représentation matricielle est la même dans toutes les bases de E ?

Exercice 109 [02596] [Correction]
Soit f un élément non nul de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ vérifiant

$$f^3 + f = 0.$$

Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ et que l'on peut trouver une base dans laquelle f a pour matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 110 [02533] [Correction]
Soient $u, v \colon \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définies par

$$u(P) = P(X+1) \text{ et } v(P) = P(X-1).$$

(a) Calculer $\operatorname{rg}(u - v)$ en utilisant sa matrice.

(b) Retrouver ce résultat d'une autre manière.

Exercice 111 [02380] [Correction]
Quels sont les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$?

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Notons
$$A=(a_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
On a
$$\sigma(A)=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell}.$$
Par produit $B=A.J=(b_{i,j})$ avec $b_{i,j}=\sum_{\ell=1}^n a_{i,\ell}.1$ et $C=J.A.J=J.B=(c_{i,j})$ avec
$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^n 1.b_{k,j}=\sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{k,l}=\sigma(A).$$
Ainsi $C=\sigma(A).J$.

Exercice 2 : [énoncé]
Pour $n\geq 1$, en exploitant $M^{n+1}=M\times M^n$, on a
$$\begin{cases}a_{n+1}=aa_n+bc_n\\ b_{n+1}=ab_n+bd_n\\ c_{n+1}=ca_n+dc_n\\ d_{n+1}=cb_n+dd_n.\end{cases}$$
Par suite
$$a_{n+1}+d_{n+1}-(b_{n+1}+c_{n+1})=(a-c)(a_n-b_n)+(b-d)(c_n-d_n).$$
Sachant $a\geq c$ et $b\geq d$, il suffit d'établir $a_n\geq b_n$ et $c_n\geq d_n$ pour conclure.
Dans le cas $n=1$, la propriété est vérifiée.
Dans le cas $n\geq 2$, exploitons la relation $M^n=M^{n-1}\times M$
$$\begin{cases}a_n=a_{n-1}a+b_{n-1}c\\ b_n=a_{n-1}b+b_{n-1}d\\ c_n=c_{n-1}a+d_{n-1}c\\ d_n=c_{n-1}b+d_{n-1}d.\end{cases}$$
On a alors
$$a_n-b_n=a_{n-1}(a-b)+b_{n-1}(c-d)\text{ et }c_n-d_n=c_{n-1}(a-b)+d_{n-1}(c-d).$$
Puisqu'il est évident que $a_{n-1},b_{n-1},c_{n-1},d_{n-1}\geq 0$ (cela se montre par récurrence), on obtient sachant $a-b\geq 0$ et $c-d\geq 0$ les inégalités permettant de conclure.
Notons que l'hypothèse $b+c\leq a+d$ ne nous a pas été utile.

Exercice 3 : [énoncé]
Une matrice X solution commute avec A.
En étudiant l'équation $AX=XA$ coefficients par coefficients, on observe que X est de la forme
$$\begin{pmatrix}a&0&x\\0&b&y\\0&0&c\end{pmatrix}.$$
Pour une telle matrice, l'équation $X^2=A$ équivaut au système :
$$\begin{cases}a^2=1\\ b^2=4\\ c^2=16\\ (a+c)x=1\\ (b+c)y=2.\end{cases}$$
Les solutions sont donc $\begin{pmatrix}1&0&1/5\\0&2&1/3\\0&0&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&1/3\\0&2&1/3\\0&0&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&1/5\\0&-2&1\\0&0&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&1/3\\0&-2&1\\0&0&4\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&-1/3\\0&2&-1\\0&0&-4\end{pmatrix}$ etc…

Exercice 4 : [énoncé]
Posons $B_k=A^k+A^{-k}$. On vérifie
$$\left(A^k+A^{-k}\right)\left(A+A^{-1}\right)=A^{k+1}+A^{-(k+1)}+A^{k-1}+A^{-(k-1)}$$
et donc
$$B_k=B_{k+1}+B_{k-1}.$$
Sachant $B_0=2\mathrm{I}_n$ et $B_1=\mathrm{I}_n$, on a par récurrence $B_k=\lambda_k\mathrm{I}_n$ avec (λ_k) la suite récurrente linéaire double déterminée par
$$\begin{cases}\lambda_0=2,\lambda_1=1\\ \lambda_{k+1}=\lambda_k-\lambda_{k-1}.\end{cases}$$
L'équation caractéristique a pour racines
$$-j=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}\quad\text{et}\quad-\bar{j}$$
et le terme λ_k s'exprime
$$\lambda_k=\alpha\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)+\beta\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

Après résolution connaissant $\lambda_0 = 2$ et $\lambda_1 = 1$, on obtient

$$\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right).$$

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$B = AD = (b_{i,j})$ avec $b_{i,j} = a_{i,j}\lambda_j$ et $C = DA = (c_{i,j})$ avec $c_{i,j} = \lambda_i a_{i,j}$.
On a $AD = DA$ si, et seulement si,

$$\forall 1 \le i,j \le n, a_{i,j}\lambda_i = a_{i,j}\lambda_j$$

soit

$$\forall 1 \le i,j \le n, a_{i,j}(\lambda_i - \lambda_j) = 0.$$

Les $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant deux à deux distincts, $AD = DA$ si, et seulement si,

$$\forall 1 \le i \ne j \le n, a_{i,j} = 0$$

ce qui signifier que A est diagonale.

Exercice 6 : [énoncé]
Si A est solution alors $AE_{i,j} = E_{i,j}A$ implique $a_{i,i} = a_{j,j}$ et $a_{i,k} = 0$ pour $k \ne i$ donc $A = \lambda.I_n$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 7 : [énoncé]
Supposons A inversible. Puisque A et B commutent, A^{-1} et B aussi. Comme B est nilpotente, $-A^{-1}B$ l'est aussi. Or il est classique d'observer que si N est nilpotente, $I - N$ est inversible d'inverse $I + N + \dots + N^{p-1}$ avec p l'ordre de nilpotence de N. Ainsi $I + A^{-1}B$ est inversible et $A + B = A(I + A^{-1}B)$ aussi.
Supposons $A + B$ inversible, puisque $-B$ est nilpotente et commute avec $A + B$, $A = A + B - B$ est inversible.

Exercice 8 : [énoncé]
Il suffit d'écrire

$$A^{-1}B = A^{-1}(BA)A^{-1} = A^{-1}(AB)A^{-1} = BA^{-1}.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Pour $i \ne j$, on a $E_{i,j}M = ME_{i,j}$.
L'égalité des coefficients d'indice (i,i) donne $m_{j,i} = 0$.
L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne $m_{j,j} = m_{i,i}$.
Par suite la matrice M est scalaire. La réciproque est immédiate.

(b) On reprend l'étude ci-dessus en étudiant la commutation de M avec $I_n + E_{i,j}$ qui conduit à nouveau à l'égalité $E_{i,j}M = ME_{i,j}$. On obtient la même conclusion.

Exercice 10 : [énoncé]
En étudiant l'égalité $AM = MA$, on justifie $C(A) = D_n(\mathbb{C})$. $C(A)$ est donc un sous-espace vectoriel de dimension n. De plus il contient évidemment les éléments A^k pour $k \in \{0, \dots, n-1\}$ (et, plus généralement, tout polynôme en A).
Supposons

$$\lambda_0 I + \lambda_1 A + \dots + \lambda_{n-1}A^{n-1} = 0.$$

Le polynôme $P = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1}X^{n-1}$ est annulateur de A, donc les $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ qui sont valeurs propres de A sont aussi racines de P qui possède alors plus de racines que son degré. On peut alors affirmer $P = 0$ puis
$\lambda_0 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$.
La famille $(A^k)_{0 \le k \le n-1}$ est une famille libre à n éléments de $C(A)$, c'en est donc une base

Exercice 11 : [énoncé]

(a) L'inclusion $\supset$ est immédiate.
Inversement, soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec toute matrice $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \ne j$.
Pour $M = I_n + E_{i,j}$, la relation $AM = MA$ donne

$$AE_{i,j} = E_{i,j}A.$$

L'identification des coefficients d'indices (i,j) et (j,j) donnent respectivement

$$a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } a_{j,i} = 0.$$

On en déduit que la matrice A est diagonale et que ses coefficients diagonaux sont égaux, autrement dit, A est une matrice scalaire.

(b) Soit $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On peut écrire

$$A = (AB^{-1})B$$

et donc

$$A = B(AB^{-1}).$$

On en déduit

$$AB = BA$$

et ainsi la matrice A commute avec toute matrice inversible. On peut alors conclure que A est une matrice scalaire.

Exercice 12 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geq 1$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
Soit $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tX \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
L'identification du coefficient d'indice $(1,1)$ dans la relation ${}^tTT = T^tT$ donne

$$\alpha^2 = \alpha^2 + {}^tXX.$$

On en déduit $X = O_{n,1}$ et l'égalité ${}^tTT = T^tT$ donne alors ${}^tSS = S^tS$.
Par hypothèse de récurrence, la matrice S est diagonale et par conséquent la matrice T l'est aussi.
Récurrence établie.

Exercice 13 : [énoncé]
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices symétriques.
Soient $i < j \in \{1, \dots, n\}$.
La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,j} + E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire

$$A(E_{i,j} + E_{j,i}) = (E_{i,j} + E_{j,i})A.$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne

$$a_{i,i} = a_{j,j}.$$

La matrice A commute avec la matrice symétrique $E_{i,i}$ ce qui permet d'écrire

$$AE_{i,i} = E_{i,i}A.$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) donne

$$a_{i,j} = 0.$$

On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 14 : [énoncé]
Cas $n = 2$
Les matrices antisymétriques sont colinéaires à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En étudiant la commutation d'une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ avec cette dernière, on obtient que les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ commutant avec les matrices antisymétriques sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Cas $n \geq 3$
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice commutant avec toutes les matrices antisymétriques.
Soient $i < j \in \{1, \dots, n\}$ et $k \in \{1, \dots, n\}$ avec $k \neq i, j$.
La matrice A commute avec la matrice antisymétrique $E_{i,j} - E_{j,i}$ ce qui permet d'écrire

$$A(E_{i,j} - E_{j,i}) = (E_{i,j} - E_{j,i})A.$$

L'égalité des coefficients d'indice (i,j) et (k,j) donne

$$a_{i,i} = a_{j,j} \text{ et } a_{k,i} = 0.$$

On en déduit que la matrice A est de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
La réciproque est immédiate.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) $DE_{i,j} = a_iE_{i,j}$ et $E_{i,j}D = a_jE_{i,j}$ donc

$$\varphi(E_{i,j}) = (a_i - a_j)E_{i,j}.$$

Posons $I = \left\{(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \,\middle|\, a_i \neq a_j\right\}$ et
$J = \left\{(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \,\middle|\, a_i = a_j\right\} = [\![1\,;n]\!]^2 \setminus I$.
Pour $(i,j) \in I$, $E_{i,j} \in \operatorname{Im}\varphi$ et pour $(i,j) \in J$, $E_{i,j} \in \operatorname{Ker}\varphi$.
Ainsi

$$\operatorname{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in I\right\} \subset \operatorname{Im}\varphi \text{ et } \operatorname{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in J\right\} \subset \operatorname{Ker}\varphi.$$

Or

$$\dim \operatorname{Vect}\left\{E_{i,j}\middle|(i,j) \in I\right\}+\dim \operatorname{Vect}\left\{E_{i,j}\middle|(i,j) \in J\right\} = n^2 = \dim \operatorname{Im}\varphi+\dim \operatorname{Ker}\varphi$$

donc

$$\dim \operatorname{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in I\right\} = \dim \operatorname{Im}\varphi$$

et

$$\dim \operatorname{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in J\right\} = \dim \operatorname{Ker}\varphi$$

puis

$$\operatorname{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in I\right\} = \operatorname{Im}\varphi \text{ et } \operatorname{Vect}\left\{E_{i,j} \,\middle|\, (i,j) \in J\right\} = \operatorname{Ker}\varphi.$$

(b) Si D est à coefficients diagonaux distincts alors

$$I = \left\{(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \,\middle|\, i \neq j\right\} \text{ et } J = \left\{(i,i) \,\middle|\, i \in [\![1\,;n]\!]\right\}.$$

Par suite $\operatorname{Im}\varphi$ est l'espace des matrices de diagonale nulle tandis que $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'espace des matrices diagonales.

Exercice 16 : [énoncé]

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^n = O_3$ pour $n \geq 3$.
Comme B et I commutent, la formule du binôme donne

$$A^n = (I + B)^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$

et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) Par récurrence

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque I_3 et B commutent, la formule du binôme donne

$$A^n = I + nB + \frac{n(n-1)}{2}B^2$$

car $B^k = O_3$ pour $k \geq 3$

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $A^2 - 3A + 2I = 0$. Comme $A(-\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I) = I$, on a

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}A + \frac{3}{2}I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$. Sachant que le reste de la division euclidienne considérée est de la forme $aX + b$, en évaluant en 1 et 2, on détermine a et b et on obtient :

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + (2^n - 1)X + 2 - 2^n.$$

(c) On peut remplacer X par A dans le calcul qui précède et on obtient :

$$A^n = (A^2 - 3A + 2I)Q(A) + (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I$$

et donc

$$A^n = \begin{pmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} \\ 3.2^n - 3 & 3.2^n - 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Si M_k majore les coefficients de A^k alors nM_k majore les coefficients de A^{k+1}. On en déduit que les coefficients de A^k sont majorés par

$$n^{k-1}.$$

On peut sans doute proposer plus fin.

(b) Posons T la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf ceux de coefficients $(i,i+1)$ qui valent 1. On remarque

$$A = I_n + T + \cdots + T^{n-1}.$$

On en déduit

$$(I-T)A = I_n - T^n$$

et puisque $T^n = O_n$, on obtient

$$A^{-1} = I - T.$$

(c) Le calcul des puissances de A^{-1} est immédiat

$$(A^{-1})^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} T^j$$

et donc le coefficient d'indice (i,j) de $(A^{-1})^k$ est

$$a_{i,j}^{-k} = (-1)^{j-i}\binom{k}{j-i} = (-1)^{j-i}\frac{k(k-1)\dots(k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1}.$$

Cette formule laisse présumer que le coefficient d'indice (i,j) de A^k est

$$a_{i,j}^{k} = (-1)^{j-i}\frac{(-k)(-k-1)\dots(-k-j+i+1)}{(j-i)(j-i-1)\dots 1} = \binom{k+j-i-1}{j-i}$$

ce que l'on démontre en raisonnant par récurrence.

Exercice 20 : [énoncé]

La relation $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I = 0$ est immédiate

Si $ad - bc \neq 0$ alors A est inversible et

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}((a+d)I - A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Si $ad-bc = 0$ alors $A^2 - (a+d)A = 0$.

Par l'absurde, si A est inversible, A est régulière donc $A = (a+d)I$ puis $A = O$. Absurde.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Par la méthode du pivot, on opère sur les lignes d'une matrice de blocs A et I_n pour transformer A en I_n. On sait qu'alors le bloc I_n sera transformé en A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

On conclut

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

On conclut

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par la méthode du pivot

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

On conclut

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 22 : [énoncé]

A est inversible car triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls.
Soient $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'équation $Y = AX$ équivaut à $X = A^{-1}Y$ or

$$\begin{cases} x_1 - (x_2 + \cdots + x_n) = y_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n = y_{n-1} \\ x_n = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + 2y_3 + \cdots + 2^{n-2}y_n \\ \vdots \\ x_{n-2} = y_{n-2} + y_{n-1} + 2y_n \\ x_{n-1} = y_{n-1} + y_n \\ x_n = y_n \end{cases}$$

donc

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & 2^{n-2} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 2 \\ & 0 & & \ddots & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

$A = (a_{k,\ell})$ avec $a_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}$. $\overline{A} = (b_{k,\ell})$ avec
$b_{k,\ell} = \overline{a}_{k,\ell} = \overline{\omega}^{(k-1)(\ell-1)} = \omega^{-(k-1)(\ell-1)}$.
$A\overline{A} = (c_{k,\ell})$ avec

$$c_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{n} a_{k,m}b_{m,\ell} = \sum_{m=1}^{n} \omega^{(k-1)(m-1)}\omega^{-(m-1)(\ell-1)} = \sum_{m=0}^{n-1} (\omega^{k-\ell})^m.$$

Si $k = \ell$ alors $\omega^{k-\ell} = 1$ et

$$c_{k,k} = n.$$

Si $k \neq \ell$ alors $\omega^{k-\ell} \neq 1$ et

$$c_{k,\ell} = \frac{1 - (\omega^{k-\ell})^n}{1 - \omega^{k-\ell}} = 0.$$

Ainsi $A\overline{A} = nI_n$. On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{n}\overline{A}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) $(A + I)^3 = O_3$.

(b) $A^3 + 3A^2 + 3A + I = O$ donc A est inversible et $A^{-1} = -(A^2 + 3A + 3I)$.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) $A = J - I_n$ avec $J^2 = nJ$ donc $A^2 = (n-2)J + I_n = (n-2)A + (n-1)I_n$.

(b) $AB = I_n$ pour $B = \frac{1}{n-1}(A - (n-2)I_n)$ donc A est inversible et $B = A^{-1}$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Comme $(I + A)(I - A) = (I - A)(I + A)$, on a, en multipliant à droite et à gauche par $(I + A)^{-1}$, la relation

$$(I - A)(I + A)^{-1} = (I + A)^{-1}(I - A).$$

(b) On a
$$(I+A)(I+B) = (I+A) + (I-A) = 2I$$
donc $I+B$ est inversible et
$$(I+B)^{-1} = \frac{1}{2}(I+A)$$
puis
$$(I-B)(I+B)^{-1} = \frac{1}{2}(I+A-(I-A)) = A.$$

Exercice 27 : [énoncé]
Supposons A et B inversibles. En multipliant à gauche par A^{-1} et B^{-1} on obtient $C = \mathrm{O}_n$ ce qui est exclu.
En raisonnant de façon analogue, on exclut les autres cas où deux des trois matrices sont inversibles.

Exercice 28 : [énoncé]
On a $A^2 = 3I + 2A$ donc
$$A^{-1} = \frac{1}{3}(A-2I).$$

Exercice 29 : [énoncé]
(a) En effectuant successivement les opérations élémentaires :
$C_2 \leftarrow C_2 + aC_1, C_3 \leftarrow C_3 + aC_2, \dots, C_n \leftarrow C_n + aC_{n-1}$ on obtient :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
(b) En effectuant successivement les opérations élémentaires :
$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$, on obtient :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & -1 \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}.$$
(c) En effectuant successivement les opérations élémentaires :
$C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$,
puis encore $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}, \dots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$,
on obtient :
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & & (0) \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \\ (0) & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 30 : [énoncé]
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sachant
$$^t(AB) = {}^tB^tA$$
on a
$$^t(AB) = AB \iff BA = AB.$$
Le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si, et seulement si, les deux matrices commutent.

Exercice 31 : [énoncé]
On peut procéder de manière élémentaire, en observant l'écriture
$$M = \frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right)$$
avec $\frac{1}{2}\left(M + {}^tM\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}\left(M - {}^tM\right) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$
On peut aussi exploiter que l'application $T\colon \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $T(A) = {}^tA$ est un endomorphisme involutif donc une symétrie vectorielle ce qui assure que les espaces $\mathrm{Ker}(T - \mathrm{Id}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{Ker}(T + \mathrm{Id}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires.

Exercice 32 : [énoncé]

Les matrices triangulaires supérieures strictes sont nilpotentes.

Commençons par étudier le cas $n = 3$.

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Introduisons ses coefficients :

$$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ g & b & f \\ h & i & c \end{pmatrix}.$$

Soit T une matrice triangulaire supérieure stricte de taille 3 :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La différence $S = A - T$ est

$$S = \begin{pmatrix} a & d-x & e-y \\ g & b & f-z \\ h & i & c \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est symétrique si, et seulement si,

$$\begin{cases} g = d - x \\ h = e - y \\ u = f - z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = d - g \\ y = e - h \\ z = f - u. \end{cases}$$

Pour ces valeurs, on obtient l'écriture $A = S + T$ avec S symétrique et T nilpotente puisque triangulaire supérieure stricte.
Cette résolution se généralise en taille n : pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on peut écrire $A = S + T$ avec $S = (s_{i,j})$ matrice symétrique et $T = (t_{i,j})$ matrice triangulaire supérieure stricte données par

$$s_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \geq j \\ a_{j,i} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad t_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ a_{i,j} - a_{j,i} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) $M(a,b,c) = a.I + b.J + c.K$ avec

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } K = J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On observe que : $E = \mathrm{Vect}(I, J, K)$. Par suite E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus la famille (I, J, K) est libre, c'est donc une base de E et par suite $\dim E = 3$.

(b) De plus $I \in E$, $M(a,b,c) - M(a',b',c') = M(a-a', b-b', c-c') \in E$ et $M(a,b,c)M(a',b',c') = (aI + bJ + cK)(a'I + b'J + c'K) = aa'I + (ab' + a'b)J + (ac' + bb' + ca')K \in E$.
Donc E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
De plus $M(a,b,c)M(a',b',c') = M(a',b',c')M(a,b,c)$, donc E est un anneau commutatif.

(c) A est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$ (ici A est triangulaire supérieure)
$f(\lambda.X + \mu.Y) = A(\lambda.X + \mu.Y) = \lambda.AX + \mu.AY = \lambda.f(X) + \mu.f(Y)$. f est un endomorphisme de E.
Soit $X \in E$, si $X \in \operatorname{Ker} f$ alors $AX = O$ puis $A^{-1}AX = O$ d'où $X = O$. Par suite $\operatorname{Ker} f = \{0\}$
f est un endomorphisme injectif d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est donc un automorphisme. Par suite il existe $B \in E$ telle que $f(B) = AB = I$.
En multipliant par A^{-1}, on conclut $A^{-1} = B \in E$.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Notons f_σ l'endomorphisme canoniquement associé à $P(\sigma)$.
Pour tout $1 \leq j \leq n$, on a $f_\sigma(e_j) = e_{\sigma(j)}$.
Par suite $(f_\sigma \circ f_{\sigma'})(e_j) = f_{\sigma\circ\sigma'}(e_j)$ puis $P(\sigma \circ \sigma') = P(\sigma)P(\sigma')$

(b) $I_n = P(\mathrm{Id}) \in E$.
$P(\sigma)P(\sigma') = P(\sigma \circ \sigma') \in E$
et $P(\sigma)P(\sigma^{-1}) = P(\sigma \circ \sigma^{-1}) = P(\mathrm{Id}) = I_n$ donc $P(\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $P(\sigma)^{-1} = P(\sigma^{-1}) \in E$.
On peut alors conclure que E est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
L'application $P\colon \mathcal{S}_n \to E$ qui à σ associe $P(\sigma)$ est un morphisme de groupe surjectif.
Soit $\sigma \in \operatorname{Ker} P$, on a $P(\sigma) = I_n$ donc $\forall 1 \leq j \leq n, \sigma(j) = j$ soit $\sigma = \mathrm{Id}$.

(c)
$$^tP(\sigma) = (\delta_{j,\sigma(i)})_{i,j} = (\delta_{\sigma^{-1}(j),i})_{i,j} = (\delta_{i,\sigma^{-1}(j)})_{i,j} = P(\sigma^{-1}).$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) $E = \mathrm{Vect}(I, J)$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La famille (I, J) forme une base de E car cette famille est évidemment libre.

(b) $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $I \in E$. Soient $A = aI + bJ \in E$ et $B = cI + dJ \in E$.
$A - B = (a-c)I + (b-d)J \in E$ et $AB = (ac)I + (ac + bd)J$ car $J^2 = O$.
Ainsi E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. De plus $AB = BA$ donc E commutatif.

(c) Avec les notations précédentes $AB = I$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} ac = 1 \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

Par suite A est inversible si, et seulement si, $a \neq 0$.

(d) Avec les notations précédentes $AB = O_2$ si et seulement si

$$\begin{cases} ac = 0 \\ ad + bc = 0. \end{cases}$$

Les diviseurs de zéros sont donc les matrices

$$\begin{pmatrix} b & b \\ -b & -b \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{K}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) $C \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $O_n \in C$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $A, B \in C$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$,

$$(\lambda A + \mu B)_{n+1-i,n+1-j} = \lambda A_{n+1-i,n+1-j} + \mu B_{n+1-i,n+1-j} = \lambda A_{i,j} + \mu B_{i,j}$$

et donc

$$(\lambda A + \mu B)_{n+1-i,n+1-j} = (\lambda A + \mu B)_{i,j}.$$

On en déduit $\lambda A + \mu B \in C$.
Ainsi C est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

(b) Soient $A, B \in C$.
Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

donc

$$(AB)_{n+1-i,n+1-j} = \sum_{k=1}^{n} a_{n+1-i,k} b_{k,n+1-j}.$$

Par le changement d'indice $\ell = n + 1 - k$

$$(AB)_{n+1-i,n+1-j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{n+1-i,n+1-\ell} b_{n+1-\ell,n+1-j}$$

et puisque A et B sont centro-symétriques

$$(AB)_{n+1-i,n+1-j} = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = (AB)_{i,j}.$$

Ainsi $AB \in C$.

(c) L'application $\varphi \colon X \in C \mapsto AX$ est linéaire et c'est évidemment un endomorphisme de C car C est stable par produit.
Soit $X \in \operatorname{Ker} \varphi$. On a $AX = O_n$ donc $A^{-1}(AX) = O_n$ puis $X = O_n$.
On en déduit que l'endomorphisme φ est injectif, or C est un espace vectoriel de dimension finie, donc φ est un automorphisme de C.
Puisque la matrice I_n est centro-symétrique, par surjectivité de φ, il existe $B \in C$ vérifiant $AB = I_n$. Or $A^{-1}(AB) = A^{-1}$ donc $B = A^{-1}$ puis $A^{-1} \in C$.

Exercice 37 : [énoncé]

On note A la représentation matricielle cherchée.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}.$$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Pour $u = (x, y, z)$ calculons $p(u) = (x', y', z')$.
Comme $p(u) - u \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $p(u) = u + \lambda.w$.
Comme $p(u) \in P$ on a $x' + 2y' - z' = 0$ ce qui donne

$$\lambda = -(x + 2y - z)/2$$

et donc
$$p(u) = \big((x - 2y + z)/2, y, (x + 2y + z)/2\big).$$

Par suite
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Comme $q = I - p$ et $s = 2p - I$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Les colonnes de A sont formées des coefficients de

$$\varphi(X^j) = (X + 1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} X^i.$$

Ainsi $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n+1} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ avec

$$a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1} \text{ si } i \le j \text{ et } a_{i,j} = 0 \text{ sinon.}$$

(b) L'endomorphisme φ est inversible avec

$$\varphi^{-1}(P) = P(X - 1).$$

On en déduit $\varphi^{-1}(X^j) = (X - 1)^j$ d'où

$$A^{-1} = ((-1)^{j-i} a_{i,j})_{1 \le i,j \le n+1}.$$

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Pour $0 \le k \le n$,

$$\varphi(X^k) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} X^i = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i + \sum_{i=k+1}^{n} \underbrace{\binom{k}{i}}_{=0} X^i = (X + 1)^k.$$

On en déduit
$$\varphi(P) = P(X + 1).$$

(b) $\varphi^m(P) = P(X + m)$ donc

$$\varphi^m(X^k) = (X + m)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} m^{k-i} X^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} m^{k-i} X^i$$

d'où
$$A^m = (m^{j-i} a_{i,j})_{1 \le i,j \le n+1}.$$

(c) $\varphi^{-1}(P) = P(X - 1)$ donc

$$\varphi^{-1}(X^k) = (X - 1)^k$$

d'où
$$A^{-1} = ((-1)^{j-i} a_{i,j})_{1 \le i,j \le n+1}.$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Posons $x = \mathrm{Re}(a)$ et $y = \mathrm{Im}(a)$.
$f(1) = 1 + x + \mathrm{i}y$ et $f(\mathrm{i}) = \mathrm{i} - a\mathrm{i} = y + \mathrm{i}(1 - x)$.
La matrice de f dans la base $(1, \mathrm{i})$ est donc

$$\begin{pmatrix} 1 + x & y \\ y & 1 - x \end{pmatrix}.$$

(b) Si $|a| \ne 1$ alors $\det f \ne 0$. $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{C}$ et $\mathrm{Ker}\, f = \{0\}$.
Si $|a| = 1$ alors $\det f = 0$ et $f \ne 0$. f est un endomorphisme de rang 1.
On a $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ et $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\pi)/2}) = 0$ donc

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\big\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\big\} \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}\, f = \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\, f.$$

Exercice 42 : [énoncé]
Comme $f^2 \neq 0$, il existe $x \in E$ tel que $f^2(x) \neq 0$. Posons

$$e_1 = x, e_2 = f(x), e_3 = f^2(x).$$

Si $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0$ alors

$$\lambda_1 x + \lambda_2 f(x) + \lambda_3 f^2(x) = 0.$$

En appliquant f^2 à cette relation, on a $\lambda_1 f^2(x) = 0$ car on sait $f^3 = 0$.
Puisque $f^2(x) \neq 0$, on a $\lambda_1 = 0$ et sans plus de difficultés on montre aussi $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_3 = 0$.
La famille $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est libre en dimension 3, c'est donc une base de E. La matrice de f dans celle-ci est comme voulue.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Comme $f^{n-1} \neq 0, \exists x \in E, f^{n-1}(x) \neq 0$.
Si $\lambda_0 x + \lambda_1 f(x) + \cdots + \lambda_{n-1} f^{n-1}(x) = 0$ alors :
en composant avec f^{n-1}, on obtient $\lambda_0 f^{n-1}(x) = 0$ d'où $\lambda_0 = 0$.
en composant successivement avec $f^{n-2}, \ldots, f, I$, on obtient successivement $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_{n-2} = 0, \lambda_{n-1} = 0$
Par suite $\mathcal{B} = \big(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\big)$ est libre et forme donc une base de E.

(b) On a

$$\operatorname{Mat}_B f = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

puis

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^2) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ (0) & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f^{n-1}) = A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 0 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 1 & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Notons $C(f) = \big\{g \in \mathcal{L}(E) \,\big|\, g \circ f = f \circ g\big\}$.
Il est clair que $\operatorname{Vect}(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1}) \subset C(f)$.
Inversement, soit $g \in C(f)$, notons $a_0, \ldots, a_{n-1}$ les composantes de $g(x)$ dans $\mathcal{B}$. On a

$$\begin{cases} g(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}(x) \\ g(f(x)) = f(g(x)) = a_0 f(x) + \cdots + a_{n-2} f^{n-1}(x) \\ \vdots \\ g(f^{n-1}(x)) = f^{n-1}(g(x)) = a_0 f^{n-1}(x). \end{cases}$$

Par suite

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} g = \begin{pmatrix} a_0 & & & (0) \\ a_1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ a_{n-1} & \cdots & a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_{n-1} A^{n-1}.$$

Donc $g = a_0 I + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \in \operatorname{Vect}(I, f, \ldots, f^{n-1})$.
Ainsi

$$C(f) = \operatorname{Vect}(I, f, f^2, \ldots, f^{n-1}).$$

Exercice 44 : [énoncé]

(a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

donc$f$ est une projection vectorielle.

(b) En résolvant les équations $f(x) = x$ et $f(x) = 0$ on obtient que (u, v) forme une base de $\operatorname{Im} f$ et (w) forme une base de $\operatorname{Ker} f$ avec $u = i + j, v = i + k$ et $w = i + j + k$.

(c)

$$\operatorname{Mat}_{(u,v,w)} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 45 : [énoncé]

(a) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1)$. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(v, w)$ avec $v = (2, -1, -1), w = (-1, 2, -1)$.
Comme $\mathcal{C} = (u, v, w)$ est libre on peut conclure que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

(b) $\mathcal{C}$ est une base adaptée à la supplémentarité de $\operatorname{Ker} f$ et Imf.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{C}} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) f est la composée, commutative, de l'homothétie vectorielle de rapport 3 avec la projection vectorielle sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

Exercice 46 : [énoncé]

Soit $x \notin \operatorname{Ker} f^{n-1}$. Un tel x existe puisque $f^{n-1} \neq 0$.
Considérons la famille $\mathcal{B} = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$.
Supposons

$$\lambda_{n-1} f^{n-1}(x) + \dots + \lambda_1 f(x) + \lambda_0 x = 0_E.$$

En y appliquant successivement $f^{n-1}, \dots, f, \operatorname{Id}$ on obtient $\lambda_0 = 0, \dots, \lambda_{n-2} = 0$ puis $\lambda_{n-1} = 0$ car $f^{n-1}(x) \neq 0_E$.
$\mathcal{B}$ est une famille libre formée de $n = \dim E$ vecteurs, c'est donc une base de E.
De plus $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est de la forme convenable.

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Par hypothèse $f(y) = 0$ et $f^2(z) = -z$. En composant l'identité $x = y + z$ avec f^2, on obtient

$$f^2(x) = 0 + f^2(z) = -z$$

et il en découle

$$y = x - z = x + f^2(x).$$

(b) Ce qui précède assure l'unicité de la décomposition d'un vecteur x de E et donc le caractère direct de la somme.
De plus, pour $x \in E$, en posant $y = x + f^2(x)$ et $z = -f^2(x)$, on vérifie $x = y + z$ et

$$f(y) = f(x) + f^3(x) = (f^3 + f)(x) = 0$$
$$(f^2 + \operatorname{Id})(z) = -f^4(x) - f^2(x) = -(f^3 + f)\big(f(x)\big) = 0.$$

On peut donc affirmer que E est la somme directe de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$.

(c) On a $(f^2 + \operatorname{Id}) \circ f = 0$ donc $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. Or $f \neq 0$ donc $\dim \operatorname{Im} f \geq 1$ puis $\dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) \geq 1$.
Soit x un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. Supposons

$$\lambda x + \mu f(x) = 0. \tag{1}$$

En composant avec f on obtient $\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0$ puis

$$\lambda f(x) - \mu x = 0. \tag{2}$$

La combinaison $\lambda \times (\mathbf{??}) - \mu \times (\mathbf{??})$ donne $(\lambda^2 + \mu^2)x = 0$. Sachant $x \neq 0$, on obtient $\lambda^2 + \mu^2 = 0$ puis $\lambda = \mu = 0$ car λ et μ sont réels. La famille $\big(x, f(x)\big)$ est donc libre.

(d) En dimension impaire $\det(-\operatorname{Id}) = -1$. Si l'endomorphisme f est inversible, la relation $f^3 + f = 0$ peut être simplifiée en $f^2 + \operatorname{Id} = 0$. Ceci donne $\det(f^2) = \det(-\operatorname{Id}) = -1$ ce qui est incompatible avec $\det(f^2) = (\det f)^2 \geq 0$.
On en déduit que f n'est pas inversible : $\dim \operatorname{Ker} f \geq 1$.
La conjonction des résultats qui précèdent donne

$$\dim \operatorname{Ker} f = 1 \text{ et } \dim \operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id}) = 2.$$

(e) Soit y un vecteur non nul de $\operatorname{Ker} f$ et x un vecteur non nul de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$.
La famille (y) est base de $\operatorname{Ker} f$ et la famille $\big(x, f(x)\big)$ est base de $\operatorname{Ker}(f^2 + \operatorname{Id})$. Ces deux espaces étant supplémentaires dans E, la famille $\big(y, x, f(x)\big)$ est base de E. La matrice de f dans celle-ci est de la forme voulue.

Exercice 48 : [énoncé]

(a) On vérifie que la famille $\mathcal{B}'$ est libre, puis c'est une base car formée de trois vecteurs en dimension 3.

(b) Par calcul matriciel

$$f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 0$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On observe que $\varepsilon_3 \in \operatorname{Ker} f$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \operatorname{Im} f$.
Le théorème du rang permet de conclure : (ε_3) est une base de $\operatorname{Ker} f$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) On vérifie aisément que famille $\mathcal{C}$ est libre et c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$, $f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_3$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par récurrence :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f^n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par changement de bases avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on obtient

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^n) = \begin{pmatrix} n+1 & n & -n \\ 0 & 1 & 0 \\ n & n & 1-n \end{pmatrix}.$$

Exercice 50 : [énoncé]

(a) $\mathcal{B}'$ est libre et formée de trois vecteurs en dimension 3, c'est une base de E. $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 3\varepsilon_3$ donc $D = \mathrm{diag}(1,2,3)$.

(b)
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par formule de changement base

$$A = PDP^{-1}.$$

(d) Puisqu'il est facile de calculer D^n

$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 51 : [énoncé]

(a) En résolvant les équations : $f(u) = 0, f(u) = u$ et $f(u) = 2u$ on trouve que $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + e_3, \varepsilon_2 = e_2 - e_3$ et $\varepsilon_3 = e_1 + e_3$ sont des vecteurs tels que $f(\varepsilon_1) = 0, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = 2\varepsilon_3$.
On vérifie aisément que la famille $\mathcal{C}$ est libre et c'est donc une base de E, celle-ci convient.

(b) On a
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par changement de base
$$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & -2^n & -2^n \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^{n+1}-1 & -2^n & 1-2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(d) Posons $X_n = {}^t\begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}$. On observe $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence $X_n = A^nX_0$.
Avec $X_0 = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ on obtient
$$\begin{cases} x_n = 2^{n+1} \\ y_n = 1 \\ z_n = 2^{n+1} - 1. \end{cases}$$

Exercice 52 : [énoncé]

(a) P est la matrice de l'application Id_E dans les bases B au départ et b à l'arrivée.
La relation $x = \mathrm{Id}_E(x)$ donne matriciellement $v = PV$.

(b) La relation $f = \mathrm{Id}_E^{-1} \circ f \circ \mathrm{Id}_E$ donne matriciellement $M = P^{-1}mP$.

(c) Dans une base de vecteurs propres, la matrice de f est diagonale et ses puissances sont alors faciles à calculer. Par changement de base, on en déduit m^n.

Exercice 53 : [énoncé]

(a) On vérifie aisément que la famille e' est libre et c'est donc une base de E. $f(e_1') = e_1', f(e_2') = e_2', f(e_3') = e_3' + e_1'$ donc
$$B = \mathrm{Mat}_{e'}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Par récurrence

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis $A^n = PB^nP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$A^n = \begin{pmatrix} 1-n & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ -n & n & n+1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 54 : [énoncé]

(a) On vérifie aisément que la famille $\mathcal{B}'$ est libre et c'est donc une base de E. $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, f(\varepsilon_2) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, f(\varepsilon_3) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

(b) $B = I_3 + J$ avec

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque I_3 et J commutent la formule du binôme donne

$$B^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2$$

car $J^k = O_3$ pour $k \geq 3$.
Par formule de changement de base, on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 - \frac{n(n+1)}{2} & \frac{n(n+3)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} \\ -n & n+1 & n \\ -\frac{n(n-1)}{2} & \frac{n(n+1)}{2} & 1 + \frac{n(n-1)}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 55 : [énoncé]

(a) En recherchant des vecteurs tels que $f(x) = x, f(x) = 2x$ et $f(x) = 3x$ on observe que $\varepsilon_1 = (-1,1,2), \varepsilon_2 = (0,1,1)$ et $\varepsilon_3 = (1,1,1)$ conviennent. De plus ces trois vecteurs forment une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(b)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Par changement base

$$A = PDP^{-1}.$$

(d) Sachant calculer D^n on obtient

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 1-3^n & -1+3^n \\ -2^n+3^n & -1+3.2^n-3^n & 1-2.2^n+3^n \\ -2^n+3^n & -2+3.2^n-3^n & 2-2.2^n+3^n \end{pmatrix}$$

qu'on peut encore écrire

$$A^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + 3^n \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56 : [énoncé]

(a) $\operatorname{rg}(x_1,x_2,x_3) = 3$ b) $\operatorname{rg}(x_1,x_2,x_3) = 3$ c) $\operatorname{rg}(x_1,x_2,x_3) = 2$

Exercice 57 : [énoncé]

(a) $\operatorname{rg}(f) = 3$
(b) $\operatorname{rg}(f) = 2$
(c) $\operatorname{rg}(f) = 4$.

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$,

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & c(a-b) & b(a-c) \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & (b-c)(a-c) \end{pmatrix}.$$

En discutant les 5 cas possibles : $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{Card}\{a,b,c\}$.

(b) Notons $A = \begin{pmatrix} 1 & \cos\theta & \cos 2\theta \\ \cos\theta & \cos 2\theta & \cos 3\theta \\ \cos 2\theta & \cos 3\theta & \cos 4\theta \end{pmatrix}$.

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin^2\theta & \sin\theta\sin 2\theta \\ \cos 2\theta & \sin\theta\sin 2\theta & \sin^2 2\theta \end{pmatrix}.$$

Si $\sin\theta = 0$ alors $\operatorname{rg}(A) = 1$.
Si $\sin\theta \neq 0$ alors

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\times\sin^2\theta \\ \cos 2\theta & \sin\theta\sin 2\theta & 2\cos\theta\times\sin\theta\sin 2\theta \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\theta & \sin^2\theta \\ \cos 2\theta & \sin\theta\sin 2\theta \end{pmatrix} = 2.$$

Résumons : Si $\theta \neq 0\ [\pi]$, $\operatorname{rg}(A) = 2$, sinon $\operatorname{rg}(A) = 1$.

(c) Notons A la matrice étudiée.
Cas $a = b = 0$ alors $\operatorname{rg}(A) = 0$ car la matrice A est nulle.
Cas $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\operatorname{rg}(A) = n$ car les n colonnes de A sont indépendantes.
Cas $a \neq 0$:
En effectuant successivement :
$C_2 \leftarrow aC_2 - bC_1, C_3 \leftarrow a^2C_3 - bC_2, \dots, C_n \leftarrow a^{n-1}C_n - bC_{n-1}$ on obtient :

$$\operatorname{rg}(A) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & \ddots & & \\ & & a & \\ & & & a^n - (-1)^n b^n \end{pmatrix}$$

(il y a conservation du rang car $a \neq 0$).
Donc si $a^n = (-b)^n$ alors $\operatorname{rg}(A) = n-1$, sinon $\operatorname{rg}(A) = n$.

Exercice 59 : [énoncé]

(a) En retirant la première ligne à la dernière

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

puis en ajoutant la deuxième ligne à la dernière etc.

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Si n est pair alors $\operatorname{rg} M = n-1$, sinon $\operatorname{rg} M = n$.

(b) *Cas:* n impair. C'est immédiat.
Cas: n pair. $\operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect} {}^t\begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\operatorname{Im} M : x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} - x_n = 0$.

(c) $M = I + N$ avec la matrice de permutation

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k = \begin{pmatrix} 2C_n^0 & C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} \\ C_n^{n-1} & 2C_n^0 & C_n^1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & C_n^2 \\ C_n^2 & & \ddots & \ddots & C_n^1 \\ C_n^1 & C_n^2 & \cdots & C_n^{n-1} & 2C_n^0 \end{pmatrix}$$

en notant $C_n^k = \binom{n}{k}$.

Exercice 60 : [énoncé]
Soit u et v les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à A et B.
Comme $u \circ v = 0$, on a $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$, puis $\operatorname{rg}(v) = 3 - \dim\operatorname{Ker} v \leq \dim\operatorname{Ker} u$.
Par suite $\dim\operatorname{Ker} u + \dim\operatorname{Ker} v \geq 3$, puis $\dim\operatorname{Ker} u \geq 2$ ou $\dim\operatorname{Ker} v \geq 2$.
On a alors respectivement $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(A) \leq 1$ ou $\operatorname{rg}(v) = \operatorname{rg}(B) \leq 1$.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) De part leurs tailles, on sait déjà

$$\operatorname{rg} A \leq 2 \text{ et } \operatorname{rg} B \leq 2.$$

Aussi

$$\operatorname{rg}(AB) = 2 \text{ et } \operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A, \operatorname{rg} B).$$

On en déduit

$$\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) = 2.$$

(b) On a $ABAB = AB$ donc $A(BA - I_2)B = O_3$.
On en déduit $\operatorname{Im}\big((BA - I_2)B\big) \subset \operatorname{Ker} A = \{0\}$ donc $(BA - I_2)B = O_{2,3}$.
Par suite $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker}(BA - I_2)$ or B est surjective donc $BA - I_2 = O_2$ puis

$$BA = I_2.$$

Exercice 62 : [énoncé]
On a $A(BA - I_2)B = 0$.
Or puisque A est de rang 2, $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ et donc $(BA - I_2)B = 0$.
De plus, puisque B est de rang 2, $\operatorname{Im} B = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et donc $BA - I_2 = 0$.

Exercice 63 : [énoncé]
Commençons par noter que le neutre multiplicatif de G n'est pas nécessairement I_n. Par exemple, $G = \{O_n\}$ est un groupe multiplicatif formé d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Notons J le neutre du groupe G. Soit $A \in G$.
D'une part $JA = A$ donc $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(JA) \leq \operatorname{rg}(J)$.
D'autre part, il existe $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $AB = J$ donc $\operatorname{rg}(J) = \operatorname{rg}(AB) \leq \operatorname{rg}(A)$.
Finalement,

$$\forall A \in G, \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(J).$$

On peut même être plus précis et constater que les matrices de A ont toutes la même image.

Exercice 64 : [énoncé]

(a) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = \pm 1 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$, donc $\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } m = \pm 1 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$.

(b) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = -2 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$, donc $\dim F = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 1 \\ 1 & \text{si } m = -2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exercice 65 : [énoncé]

(a) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \end{pmatrix} = 2$ donc $\dim F = 1$ et $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & -m & 1 \end{pmatrix} = 1$ donc $\dim G = 2$.

(b) $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & -m \\ 1 & -m & 1 \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } m = 0 \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$ donc

$$\dim F \cap G = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Si $m = -1$ alors

$$\mathcal{S} = \big\{(y, y, -1) \bigm| y \in \mathbb{C}\big\}.$$

Si $m \neq -1$ alors

$$\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{m+1}{2}, 0, \frac{m-1}{2}\right)\right\}.$$

(b) On a

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 2 & \text{si } m = -2 \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $m \neq 1$ et $m \neq -2$ alors

$$\mathcal{S} = \left\{\left(-\frac{1+m}{2+m}, \frac{1}{2+m}, \frac{(1+m)^2}{2+m}\right)\right\}.$$

Si $m = 1$ alors

$$\mathcal{S} = \big\{(x, y, 1 - x - y) \bigm| x, y \in \mathbb{C}\big\}.$$

Si $m = -2$ alors système incompatible

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

(c) Si $m=1$: système incompatible

$$\mathcal{S}=\emptyset.$$

Si $m\neq 1$,

$$\begin{cases} mx+y+z+t=1\\ x+my+z+t=m\\ x+y+mz+t=m+1\end{cases}\iff\begin{cases} x+y+mz+t=m+1\\ (1-m)y+(m-1)z=1\\ (m+2)z+t=\frac{m(m+1)}{m-1}\end{cases}$$

et donc

$$S=\left\{\left(z-\frac{m}{m-1},y=z-\frac{1}{m-1},z,\frac{m(m+1)}{m-1}-(m+2)z\right)\,\middle|\,z\in\mathbb{C}\right\}.$$

Exercice 67 : [énoncé]

$$\begin{cases} ax+by+z=1\\ x+aby+z=b\\ x+by+az=1.\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+by+az=1\\ b(1-a)y+(1-a^2)z=1-a\ ,.\\ b(a-1)y+(1-a)z=b-1\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+by+az=1\\ b(1-a)y+(1-a^2)z=1-a\\ (1-a)(2+a)z=b-a.\end{cases}$$

Cas $a\neq 1$, $a\neq -2$ et $b\neq 0$:

$$x=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)},y=\frac{ab-2+b}{(a-1)(a+2)b},z=\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}.$$

Cas $a\neq 1$, $a\neq -2$ et $b=0$:
On doit avoir simultanément

$$(1-a^2)z=1-a \text{ et } (1-a)(2+a)z=-a$$

ce qui est incompatible : $\mathcal{S}=\emptyset$.
Cas $a=1$ alors

$$\begin{cases} x+by+z=1\\ 0=0\\ 0=b-1.\end{cases}$$

Si $b\neq 1$ alors $\mathcal{S}=\emptyset$.
Si $b=1$ alors $\mathcal{S}$: $x+y+z=1$.
Cas $a=-2$ alors

$$\begin{cases} x+by-2z=1\\ 3by-3z=3\\ 0=b+2.\end{cases}$$

Si $b\neq -2$ alors $\mathcal{S}=\emptyset$.
Si $b=-2$ alors

$$\begin{cases} x=-1-2y\\ z=-1-2y.\end{cases}$$

Exercice 68 : [énoncé]
Par les opérations élémentaires : $L_n\leftarrow L_n-L_{n-1},\dots,L_2\leftarrow L_2-L_1$ on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x_1+x_2+\dots+x_n=1\\ x_2+\dots+x_n=0\\ \vdots\\ x_{n-1}+x_n=0\\ x_n=0.\end{cases}$$

Donc

$$\mathcal{S}=\{(1,0,\dots,0)\}.$$

Exercice 69 : [énoncé]

$$\begin{cases} x_1+x_2 & & & =0\\ x_1+x_2+x_3 & & & =0\\ x_2+x_3 & +x_4 & & =0\\ \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ & x_{n-2}+x_{n-1}+x_n & & =0\\ & x_{n-1}+x_n & & =0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases} x_1=x_1,x_2=-x_1,x_3=0\\ x_4=x_1,x_5=-x_1,x_6=0\\ \dots\\ x_n=\begin{cases}0 & \text{si } n=0\ [3]\\ x_1 & \text{si } n=1\ [3]\\ -x_1 & \text{si } n=2\ [3]\end{cases}\\ \dots\\ x_{n-1}+x_n=0.\end{cases}$$

Donc si $n \neq 2$ [3] alors

$$\mathcal{S} = \big\{(0,0,0)\big\}$$

et si $n = 2$ [3] alors

$$\mathcal{S} = \big\{(x,-x,0,x,-x,0,\dots,x,-x) \bigm| x \in \mathbb{C}\big\}.$$

Exercice 70 : [énoncé]
Le problème revient à résoudre le système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_1 = 2a_n \end{cases}$$

$(n) \leftarrow (n) - (1)$ donne

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n - z_2 = 2a_n - 2a_1 \end{cases}$$

$(n) \leftarrow (n) + (2)$ donne

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ z_n + z_3 = 2(a_n - a_1 + a_2) \end{cases}$$

etc.
On obtient au final

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a_1 \\ \vdots \\ z_{n-1} + z_n = 2a_{n-1} \\ \big(1 - (-1)^n\big) z_n = 2\big(a_n - a_1 + a_2 + \dots + (-1)^n a_{n-1}\big). \end{cases}$$

On peut alors conclure :
- Si n est impair, le système est de Cramer et donc possède une solution unique.
- Si n est pair alors le système possède une solution si, et seulement si,

$$a_1 - a_2 + \dots + a_{n-1} - a_n = 0.$$

Exercice 71 : [énoncé]

$$\begin{cases} ax + 2by + 2z = 1 \\ 2x + aby + 2z = b \\ 2x + 2by + az = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x + 2by + az = 1 \\ b(a-2)y + (2-a)z = b - 1 \\ (a-2)x + (2-a)z = 0. \end{cases}$$

Si $a = 2$, on parvient au système

$$\begin{cases} 2x + 2by + 2z = 1 \\ 0 = b - 1. \end{cases}$$

Dans le cas $b \neq 1$, le système est incompatible.
Dans le cas $b = 1$, on parvient à l'équation $2x + 2y + 2z = 1$.
Si $a \neq 2$, on parvient au système

$$\begin{cases} 2x + 2by + az = 1 \\ by - z = \frac{b-1}{a-2} \\ x - z = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} (a+4)z = \frac{a-2b}{a-2} \\ by = z + \frac{b-1}{a-2} \\ x = z. \end{cases}$$

Dans le cas $a = -4$, le système n'est compatible que si $b = -2$ et on parvient au système

$$\begin{cases} x = z \\ -4y = 2z + 1. \end{cases}$$

Dans le cas $b = 0$, le système est incompatible.
Dans le cas général restant, on parvient à

$$x = z = \frac{a - 2b}{(a-2)(a+4)}, y = \frac{ab + 2b - 4}{b(a-2)(a+4)}.$$

Exercice 72 : [énoncé]
Le déterminant de ce système carré est $(a-1)^3(a+3)$.
Cas $a = 1$:
Le système est compatible si, et seulement si, $b = 1$ et ses solutions sont les quadruplets (x,y,z,t) vérifiant

$$x + y + z + t = 1.$$

Cas $a = -3$:

En sommant les quatre équations, on obtient l'équation de compatibilité
$0 = 1 + b + b^2 + b^3$.
Si $b \notin \{i, -1, -i\}$ alors le système est incompatible.
Si $b \in \{i, -1, -i\}$ alors le système équivaut à

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = b \\ x + y - 3z + t = b^2 \\ x + y + z - 3t = b^3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z + t = b \\ \qquad 4y - 4z = b^2 - b \\ \qquad 4y - 4t = b^3 - b. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}b^3 \\ z = y + \frac{1}{4}(b - b^2) \\ t = y + \frac{1}{4}(b - b^3) \end{cases}$$

ce qui permet d'exprimer la droite des solutions.
Cas $a \notin \{1, -3\}$:
C'est un système de Cramer...
Sa solution est

$$x = \frac{2 + a - b - b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, y = \frac{ab - 1 + 2b - b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, .$$

$$z = \frac{ab^2 - 1 - b + 2b^2 - b^3}{2a - 3 + a^2}, t = \frac{ab^3 - 1 - b - b^2 + 2b^3}{2a - 3 + a^2}.$$

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Si A n'est pas inversible alors $\operatorname{rg} A < n$. Or il est possible de construire une matrice nilpotente de rang égal à $\operatorname{rg} A$. Deux matrices étant équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang, on peut conclure que A est équivalente à une matrice nilpotente. La réciproque est immédiate.

(b) Si A est inversible alors $f(A)f(A^{-1}) = f(\mathrm{I}_n) = 1$ donc $f(A) \neq 0$. Si A n'est pas inversible alors A est équivalente à une matrice nilpotente B. Pour celle-ci, on a $f(B) = 0$ car $f(B^n) = f(B)^n$. Puisqu'on peut écrire $A = PBQ$ avec P et Q inversibles, on peut conclure $f(A) = 0$.

Exercice 74 : [énoncé]

(a) Posons $r = \operatorname{rg} A$ et $s = \operatorname{rg} B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J'_s = \begin{pmatrix} O_{n-s} & O_{n-s,s} \\ O_{s,n-s} & I_s \end{pmatrix}.$$

Il existe donc $P, Q, R, S \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J'_s$$

et alors

$$PAQ + RBS = J_r + J'_s$$

qui est une matrice de rang $\min(n, r + s)$.
On peut aussi écrire

$$(R^{-1}P)A + B(SQ^{-1}) = R^{-1}(J_r + J'_s)Q^{-1}$$

et en posant $U = R^{-1}P$ et $V = SQ^{-1}$, on obtient $U, V \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\operatorname{rg}(UA + BV) = \min(n, r + s).$$

(b) Si $r + s \geq n$ alors $\min(n, r + s) = n$ et ce qui précède conduit à une matrice inversible.

Exercice 75 : [énoncé]
Soit $r = \operatorname{rg}(A)$. On peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et J_r matrice canonique de rang r de type (n, p). Considérons alors $M = P^{-1}J'_rQ^{-1}$ avec J'_r matrice canonique de rang r de type (p, n). Puisque $J_rJ'_rJ_r = J_r$, on obtient par simple calcul $AMA = A$.

Exercice 76 : [énoncé]
Il existe une colonne X telle que $AX \neq 0$ et alors $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(AX)$.
$A^2X \in \operatorname{Im} A$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A^2X = \lambda AX$.
De plus pour $Y \in \operatorname{Ker} A$, $A^2Y = 0 = \lambda AY$.
Enfin $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Vect}(X)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc $A^2 = \lambda A$.

Exercice 77 : [énoncé]

(a) Soit U une colonne non nulle de l'image de H.
Pour tout $1 \leq j \leq p$, la colonne C_j de H peut s'écrire $C_j = \lambda_j U$ avec $\lambda_j \in \mathbb{K}$.
La matrice colonne $V = {}^t\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$ vérifie alors $H = U{}^tV$.

(b) On a alors $H^2 = U({}^tVU){}^tV$ avec $\lambda = {}^tVU$ un scalaire donc $H^2 = \lambda H$ et

$$\lambda = {}^tVU = \operatorname{tr}\big({}^tVU\big) = \operatorname{tr}\big(U{}^tV\big) = \operatorname{tr} H.$$

(c) En développant

$$(\mathrm{I}_n + H)\left(\mathrm{I}_n - \frac{1}{1+\operatorname{tr} H}H\right) = \mathrm{I}_n + H - \frac{1}{1+\operatorname{tr} H}H - \frac{1}{1+\operatorname{tr} H}H^2 = \mathrm{I}_n.$$

Par le théorème d'inversibilité des matrices, on obtient $\mathrm{I}_n + H$ est inversible et

$$(\mathrm{I}_n + H)^{-1} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{1+\operatorname{tr} H}H.$$

(d) On a $\operatorname{rg}(HA^{-1}) = \operatorname{rg} H = 1$ car on ne modifie pas le rang en multipliant par une matrice inversible.
On en déduit que $\mathrm{I}_n + HA^{-1}$ est inversible et

$$\big(\mathrm{I}_n + HA^{-1}\big)^{-1} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(HA^{-1})}HA^{-1}.$$

En multipliant par la matrice inversible A, on obtient
$A + H = \big(\mathrm{I}_n + HA^{-1}\big)A$ inversible et

$$(A+H)^{-1} = A^{-1}\big(\mathrm{I}_n + HA^{-1}\big)^{-1} = A_n^{-1} - \frac{1}{1+\operatorname{tr}(HA^{-1})}A^{-1}HA^{-1}.$$

Exercice 78 : [énoncé]
Le produit d'une colonne de hauteur n par une matrice ligne de longueur n est possible et définit une matrice carrée de taille n :

$$X{}^tY = \begin{pmatrix} x_1y_1 & \cdots & x_1y_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

De plus, si les colonnes X et Y sont non nulles, le produit $X{}^tY$ n'est pas nul[1]. Au surplus, les colonnes d'une telle matrice sont colinéaires et il s'agit donc d'une matrice de rang 1.
Les colonnes X_i et Y_j n'étant pas nulles car éléments d'une famille libre, les produits $X_i{}^tY_j$ sont bien définis et sont des matrices de rang 1 éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Si les coefficients d'indice i de X et j de Y sont non nuls, le coefficient d'indice (i,j) de $X{}^tY$ n'est pas nul.

Supposons

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i{}^tY_j = \mathrm{O}_n \quad \text{avec} \quad \lambda_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

On interprète cette égalité de matrices carrées colonne par colonne afin d'employer la liberté de la famille $(X_1,\dots,X_n)$.

En organisant le calcul de la somme, on écrit

$$\sum_{i=1}^{n} X_iL_i = \mathrm{O}_n \quad \text{avec} \quad L_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}{}^tY_j = \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,n} \end{pmatrix}.$$

Pour $k \in [\![1\,;n]\!]$, l'égalité des colonnes d'indice k donne

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,k}X_i = \mathrm{O}_{n,1}.$$

Par liberté de la famille $(X_1,\dots,X_n)$, les $a_{i,k}$ sont tous nuls et donc les lignes L_i le sont aussi. Par transposition, on obtient

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j}Y_j = {}^tL_i = \mathrm{O}_{n,1} \quad \text{pour tout } i = 1,\dots,n.$$

Par liberté de la famille $(Y_1,\dots,Y_n)$, on conclut que les $\lambda_{i,j}$ sont tous nuls.
Finalement, la famille $(X_i{}^tY_j)_{1\le i,j\le n}$ est une famille libre constituée de $n^2 = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est donc une base de cet espace telle que voulue.

Exercice 79 : [énoncé]
(a) ($\Longrightarrow$) Supposons

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A = r.$$

Rappelons que le rang d'une matrice est le rang de la famille de ses colonnes.
Puisque $\operatorname{rg} A = r$, la matrice A possède r colonnes indépendantes.
Puisque $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = r$, les colonnes de $\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$ sont toutes combinaisons linéaires des colonnes précédentes.
En particulier les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A. Ceci permet de former $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $B = AU$.
($\Longleftarrow$) Supposons $B = AU$.
Les colonnes de B sont combinaisons linéaires des colonnes de A et donc par opérations sur les colonnes

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & \mathrm{O}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A.$$

(b) Il suffit de transposer le raisonnement qui précède en raisonnant sur les lignes et en exploitant que le rang d'une matrice est aussi le rang de la famille des ses lignes.

(c) Supposons
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A.$$
Puisque
$$\operatorname{rg} A \leq \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \leq \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A$$
on a
$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}.$$
En vertu de a) il existe une matrice $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$B = AU.$$
En raisonnant comme en b), il existe une matrice $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que
$$\begin{pmatrix} C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} VA & VB \end{pmatrix}.$$
On en déduit
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}.$$
Inversement, supposons
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ VA & VAU \end{pmatrix}.$$
Les n dernières lignes étant combinaisons linéaires des n premières, on a
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ \mathrm{O}_n & \mathrm{O}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & AU \end{pmatrix}$$
puis
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AU \\ \mathrm{O}_n & \mathrm{O}_n \end{pmatrix} = \operatorname{rg} A.$$

Exercice 80 : [énoncé]
Posons $r = \operatorname{rg} A$ et $s = \operatorname{rg} B$. Les matrices A et B sont respectivement équivalentes aux matrices
$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{n-r,t} & O_{n-r} \end{pmatrix} \text{ et } J_s = \begin{pmatrix} I_s & O_{s,p-s} \\ O_{p-s,t} & O_{p-s} \end{pmatrix}.$$
Il existe donc $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $R, S \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que
$$PAQ = J_r \text{ et } RBS = J_s.$$
En opérant par blocs, on a alors
$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix}$$
avec les facteurs
$$\begin{pmatrix} P & O \\ O & R \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} Q & O \\ O & S \end{pmatrix}$$
inversibles.
On en déduit
$$\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} J_r & O \\ O & J_s \end{pmatrix} = r + s.$$

Exercice 81 : [énoncé]
En multipliant par la matrice inversible
$$\begin{pmatrix} I_n & -B \\ O_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$$
on obtient
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix}.$$
En posant $r = \operatorname{rg} C$, on peut écrire $PCQ = J_r$ avec
$$P, Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \text{ et } J_r = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{p-r,r} & O_{p-r} \end{pmatrix}.$$
En multipliant à gauche et à droite par les matrices inversibles
$$\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & P \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & Q \end{pmatrix}$$
on obtient
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & B \\ O_{p,n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} I_n & O_{n,p} \\ O_{p,n} & J_r \end{pmatrix} = n + r.$$

Exercice 82 : [énoncé]
L'implication ($\Longleftarrow$) est immédiate car $\operatorname{rg} B = p$.
Inversement, supposons $\operatorname{rg} M = p$.
Puisque B est inversible, les p dernières lignes de M sont indépendantes et donc les autres lignes de M sont combinaisons linéaires de celles-ci puisque $\operatorname{rg} M = p$.
Puisque les n premières lignes de M sont combinaisons linéaires des p dernières lignes de M, on a

$$A = O_n.$$

Exercice 83 : [énoncé]
Introduisons la matrice inversible

$$M' = \begin{pmatrix} A^{-1} & O_{p,q} \\ O_{q,p} & I_q \end{pmatrix}.$$

On a $\operatorname{rg} M = \operatorname{rg}(MM')$ avec

$$MM' = \begin{pmatrix} I_p & B \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Par opérations élémentaires sur les colonnes, la matrice MM' a le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} I_p & O_{p,q} \\ O_{q,p} & C \end{pmatrix}.$$

Enfin, les opérations élémentaires déterminant le rang de C se transposent à la matrice en cours afin d'en donner le rang. Au final

$$\operatorname{rg} M = p + \operatorname{rg} C.$$

Exercice 84 : [énoncé]

(a) Si A est inversible alors en posant

$$C = \begin{pmatrix} O_n & I_n \\ A^{-1} & O_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$$

on obtient $BC = I_{2n}$ et on en déduit que B est inversible et que C est son inversible en vertu du théorème d'inversibilité.
Si A n'est pas inversible alors les lignes de A sont liées et les n premières lignes de B sont aussi liées par la même relation linéaire. On en déduit que B n'est pas inversible.

(b) On obtient

$$B^{2p} = \begin{pmatrix} A^p & O_n \\ O_n & A^p \end{pmatrix} \text{ et } B^{2p+1} = \begin{pmatrix} O_n & A^{p+1} \\ A^p & O_n \end{pmatrix}.$$

Exercice 85 : [énoncé]
On peut écrire la matrice M^{-1} sous la forme

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}.$$

La relation $MM^{-1} = I_{2n}$ donne alors le système

$$\begin{cases} AA' + BC' = I_n \\ CA' + DC' = O_n \\ AB' + BD' = O_n \\ CB' + DD' = I_n \end{cases}$$

qui entraîne

$$\begin{cases} (A - BD^{-1}C)A' = I_n \\ C' = -D^{-1}CA' \\ B' = -A^{-1}BD' \\ (D - CA^{-1}B)D' = I_n. \end{cases}$$

On en déduit que les matrices $A - BD^{-1}C$ et $D - CA^{-1}B$ sont nécessairement inversible et A' et D' sont leurs inverses respectifs.
Au final

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B - D)^{-1} \\ D^{-1}C(BD^{-1}C - A)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 86 : [énoncé]
Par blocs, on a

$$A = \begin{pmatrix} M & O_2 \\ O_2 & -M \end{pmatrix} \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, M^n = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n & (-1)^{n+1}n \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

On vérifie que cette relation est encore valable pour $n \in \mathbb{Z}$ en constatant que cette expression satisfait
$$A^n \times A^{-n} = I_4.$$

Exercice 87 : [énoncé]

(a) Par opérations par blocs
$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & A \\ \mathrm{O}_n & B-A \end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & \mathrm{O}_n \\ \mathrm{O}_n & B-A \end{pmatrix}.$$
On en déduit l'égalité
$$\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B-A).$$

(b) La matrice M est inversible si, et seulement si, A et $B-A$ le sont. Supposons que ce soit le cas et recherchons l'inverse de M de la forme
$$N = \begin{pmatrix} C & D \\ D & E \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad C, D, E \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
L'égalité $MN = \mathrm{I}_{2n}$ se traduit par le système
$$\begin{cases} AC + AD = \mathrm{I}_n \\ AD + AE = \mathrm{O}_n \\ AC + BD = \mathrm{O}_n \\ AD + BE = \mathrm{I}_n. \end{cases}$$
La deuxième équation et l'inversibilité de A donne $D = -E$ auquel cas la dernière équation produit $D = (A-B)^{-1}$ puis, par la troisième, il vient
$$C = A^{-1}B(B-A)^{-1}.$$
On observe alors que la première équation est vérifiée et, finalement,
$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1}B(B-A)^{-1} & (A-B)^{-1} \\ (A-B)^{-1} & (B-A)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 88 : [énoncé]

De telles matrices n'existent pas car
$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$
et donc
$$\operatorname{tr}(AB - BA) = 0 \neq \operatorname{tr}(I_n).$$

Exercice 89 : [énoncé]

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $e_1, \dots, e_{n-1} \in \operatorname{Ker}(f)$ et $e_n \notin \operatorname{Ker}(f)$ (ce qui est possible car $\operatorname{Ker}(f)$ est de dimension $n-1$ en vertu de la formule du rang). La matrice de f dans cette base est de la forme
$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_n = \operatorname{tr}(f)$$
On remarque $M^2 = a_n M$ et donc $f^2 = \operatorname{tr}(f) f$.
Aussi, pour f de rang 1, f est un projecteur si, et seulement si, $\operatorname{tr}(f) = 1$.

Exercice 90 : [énoncé]

Calculons les coefficients diagonaux de la représentation matricielle de φ dans la base canonique formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$.
On a $\varphi(E_{i,j}) = E_{i,j}A$.
Or $A = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n a_{k,\ell} E_{k,\ell}$ donc $\varphi(E_{i,j}) = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell} E_{i,\ell}$ car $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.
La composante de $\varphi(E_{i,j})$ selon $E_{i,j}$ vaut $a_{j,j}$.
Par suite la trace de φ vaut $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,j} = n \operatorname{tr} A$.

Exercice 91 : [énoncé]

Supposons que M soit semblable à une matrice M' via une matrice inversible P *i.e.*
$$M' = P^{-1}MP.$$
Si on peut écrire $M' = A'B' - B'A'$ alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.
On peut ainsi transformer la matrice M en une matrice semblable sans changer la problématique.
Établissons maintenant le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice M.
Si M est taille 1 : ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit M une matrice carrée d'ordre $n+1$ de trace nulle.
Montrons que M est semblable à une matrice de la forme
$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & * \end{array}\right).$$
Si M est matrice d'une homothétie alors $\operatorname{tr} M = 0$ permet de conclure $M = O_n$.

Sinon, il existe des vecteurs qui ne sont pas vecteurs propres de l'endomorphisme associé à M.
Soit x, un tel vecteur. En introduisant une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice M est semblable à celle voulue.
Compte tenu de la remarque préliminaire, on suppose désormais que la matrice M est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & M' \end{array}\right)$$

avec $\operatorname{tr} M' = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire

$$M' = A'B' - B'A'.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ qui n'est par valeur propre de la matrice B'.
En posant

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L(B'-\lambda I)^{-1} \\ \hline (\lambda I - B')^{-1}C & A' \end{array}\right)$$

et

$$B = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

on obtient

$$M = AB - BA.$$

Récurrence établie.

Exercice 92 : [énoncé]
Posons $a_{j,i} = \varphi(E_{i,j})$. $\varphi(M) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{j,i} m_{i,j} = \operatorname{tr}(AM)$ avec $A = (a_{i,j})$.

Exercice 93 : [énoncé]
Puisque $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, on a $\operatorname{tr}[A\,;B] = 0$. $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ est donc un sous-espace vectoriel contenant $\{[A\,;B] \mid A, B \in E\}$ donc

$$\operatorname{Vect}\{[A,B] \mid A, B \in E\} \subset \operatorname{Ker}(\operatorname{tr}).$$

De plus, tr étant une forme linéaire non nulle, $\operatorname{Ker}(\operatorname{tr})$ est un hyperplan.
Montrons qu'il en en est de même de $\operatorname{Vect}\{[A,B] \mid A, B \in E\}$.
Pour $i \neq j$,

$$E_{i,j} = [E_{i,i}, E_{i,j}]$$

et pour $i \neq n$,

$$E_{i,i} - E_{n,n} = [E_{i,n}, E_{n,i}]\,.$$

Par suite $\operatorname{Vect}\{[A,B] \mid A, B \in E\}$ contient la famille libre à n^2-1 éléments formée par les $E_{i,j}$, $i \neq j$ et les $E_{i,i} - E_{n,n}$, $i \neq n$. Il en découle que $\operatorname{Vect}\{[A,B] \mid A, B \in E\}$ est de dimension supérieure ou égale à n^2-1.
Par inclusion et un argument de dimension, on peut conclure

$$\operatorname{Ker}(\operatorname{tr}) = \operatorname{Vect}\{[A,B] \mid A, B \in E\}.$$

Exercice 94 : [énoncé]

(a) Soit p un projecteur de E espace de dimension n. En posant $F = \operatorname{Im} p$ et $G = \operatorname{Ker} p$, la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r & O_{p,r-p} \\ O_{r-p,p} & O_{r-p} \end{pmatrix}.$$

On y lit

$$\operatorname{rg} p = r = \operatorname{tr} p.$$

(b) Posons

$$B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^k.$$

Puisque $A^q = I_n$, on a $AB = B$ et plus généralement $A^kB = B$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
On en déduit

$$B^2 = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} A^kB = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} B = B$$

et donc B est la matrice d'un projecteur. Par suite

$$\operatorname{rg} B = \operatorname{tr} B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k).$$

Pour $X \in \operatorname{Ker}(A - I_n)$, on a $AX = X$ donc $BX = X$ et ainsi $\operatorname{Ker}(A - I_n) \subset \operatorname{Im} B$.
Inversement, si $Y \in \operatorname{Im} B$, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = BX$ et alors

$$(A - I_n)Y = ABX - BX = BX - BX = 0$$

donc $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Ker}(A - I_n)$ puis $\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker}(A - I_n)$. On peut alors conclure

$$\dim \operatorname{Ker}(A - I_n) = \operatorname{rg} B = \frac{1}{q}\sum_{k=0}^{q-1} \operatorname{tr}(A^k).$$

Exercice 95 : [énoncé]

(a) L'application considérée est au départ d'un ensemble infini et à valeurs dans un ensemble fini, elle ne peut donc être injective et il existe $k < \ell \in \mathbb{N}$, $M^k = M^\ell$ ce qui fournit $M^p = I_n$ avec $p = \ell - k$ car M est inversible. On en déduit que $I_n \in H$ et que $M^{-1} = M^{p-1} \in H$. Cela suffit pour conclure que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(b) Si $M \in H$ alors $N \mapsto MN$ et $N \mapsto NM$ sont des permutations de H. On en déduit que $MP = PM = P$ car pour chaque terme les sommes portent sur les mêmes éléments.
$$P^2 = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} MP = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} P = P.$$

(c) Puisque $P^2 = P$, $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(P - I_n)$ et $\operatorname{Ker} P$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $X \in \operatorname{Ker} P$ alors $PX = 0$ et pour tout $M \in H$, $PMX = PX = 0$ donc $MX \in \operatorname{Ker} P$. Ainsi $\operatorname{Ker} P$ est stable par H.
Si $X \in \bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n)$ alors pour tout $M \in H$, $MX = X$ donc $PX = X$ puis $X \in \operatorname{Ker}(P - I_n)$.
Inversement, si $X \in \operatorname{Ker}(P - I_n)$ alors $PX = X$ et pour tout $M \in H$, $X = PX = MPX = MX$ et donc $X \in \bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n)$. Ainsi
$$\bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n) = \operatorname{Ker}(P - I_n)$$
et $\operatorname{Ker} P$ est solution du problème posé.

(d) P est une projection donc $\operatorname{tr} P = \operatorname{rg} P \in \mathbb{N}$ et donc $\sum_{M\in H} \operatorname{tr} M = q \operatorname{tr} P \in q\mathbb{N}$.
Si $\sum_{M\in H} \operatorname{tr} M = 0$ alors $P = 0$. Par suite $\bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n) = \{0\}$ et il n'y a donc pas de vecteur non nul invariant pour tous les éléments de H et inversement.

Exercice 96 : [énoncé]

(a) Posons $p = \sum_{g\in G} g$. $p^2 = \sum_{g\in G}\sum_{h\in G} gh$. Or pour $g \in G$, l'application $h \mapsto gh$ est une permutation du groupe G donc $\sum_{h\in G} gh = p$ et par suite $p^2 = \operatorname{Card} G.p$.
Par suite $\frac{1}{\operatorname{Card} G}p$ est une projection vectorielle et puisque son rang égale sa trace, $\operatorname{rg} p = 0$. Ainsi $p = 0$.

(b) Considérons $\varphi(x, y) = \sum_{g\in G}(g(x) \mid g(y))$. φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel on a $\forall h \in G, h^* = h^{-1}$. Pour ce produit scalaire, $V^\perp$ est un supplémentaire de V stable pour tout h^{-1} avec h élément de G donc stable pour tout élément de G.

Exercice 97 : [énoncé]

$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j})$ et si $i \neq j$,
$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(0) = 0$.
Ainsi
$$f(A) = f(\sum a_{i,j}E_{i,j}) = \lambda \operatorname{tr} A$$
en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.

Exercice 98 : [énoncé]

(a) Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Puisque
$$E_{i,i} = E_{i,j}E_{j,i} \text{ et } E_{j,j} = E_{j,i}E_{i,j}$$
l'hypothèse de travail donne
$$f(E_{i,i}) = f(E_{i,j}E_{j,i}) = f(E_{j,i}E_{i,j}) = f(E_{j,j}).$$
De plus, pour $i \neq j$, on a
$$E_{i,j} = E_{i,j}E_{j,j} \text{ et } O_n = E_{j,j}E_{i,j}$$
donc
$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,j}E_{j,j}) = f(E_{j,j}E_{i,j}) = f(O_n) = 0.$$
Ainsi
$$f(A) = f(\sum a_{i,j}E_{i,j}) = \lambda \operatorname{tr} A$$
en notant λ la valeur commune des $f(E_{i,i})$.

(b) Posons $f = \operatorname{tr} \circ g$. L'application f est une forme linéaire vérifiant
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(AB) = f(BA).$$
Ainsi $f = \lambda \operatorname{tr}$.
Or $f(I_n) = \operatorname{tr}\big(g(I_n)\big) = \operatorname{tr} I_n$ donc $\lambda = 1$. Ainsi $f = \operatorname{tr}$ et
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(g(M)) = f(M) = \operatorname{tr}(M).$$

Exercice 99 : [énoncé]

La trace de f est la somme des coefficients diagonaux de la matrice représentative de f dans la base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée des matrices élémentaires $E_{i,j}$. Puisque le coefficient d'indice (i, j) de la matrice$f(E_{i,j})$ est $a_{i,i} + a_{j,j}$ on obtient
$$\operatorname{tr} f = \sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,i} + a_{j,j}) = 2n \operatorname{tr} A.$$

Exercice 100 : [énoncé]
Si X est solution alors

$$\operatorname{tr}(X) = \operatorname{tr}(X)\operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$

et donc

$$\operatorname{tr}(X)(1 - \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B).$$

Cas $\operatorname{tr} A \neq 1$.
On obtient

$$\operatorname{tr}(X) = \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)}$$

puis

$$X = \frac{\operatorname{tr}(B)}{1 - \operatorname{tr}(A)} A + B.$$

Inversement, cette matrice est bien solution.
Cas $\operatorname{tr} A = 1$.
Sous cas $\operatorname{tr} B \neq 0$.
L'équation $\operatorname{tr}(X)(1 - \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B)$ est incompatible, il n'y a pas de solution.
Sous cas $\operatorname{tr} B = 0$.
La solution X est de la forme $\lambda A + B$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et inversement de telles matrices sont solutions.

Exercice 101 : [énoncé]
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E avec $e_1, \dots, e_{n-1} \in \operatorname{Ker} f$.
La matrice de f dans cette base est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \lambda_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec $\lambda_n = \operatorname{tr} f$.
On observe alors que $A^2 = \lambda_n A$.
Ainsi si $\operatorname{tr} f = 1$ alors $A^2 = A$ donc $f^2 = f$ puis f est un projecteur.
Par l'isomorphisme de représentation matricielle dans une base donnée de E, on peut retraduire le problème matriciellement.
En considérant les éléments $E_{i,i}$ et $E_{i,i} + E_{i,j}$ pour $1 \leq i \neq j \leq n$ on forme une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que souhaitée.

Exercice 102 : [énoncé]
Les matrices A_i sont des matrices de projection et donc

$$\operatorname{tr} A_i = \operatorname{rg} A_i.$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{rg} A_i = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{tr} A_i = \operatorname{tr} \mathrm{I}_n = n.$$

Or

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{Im} \sum_{i=1}^{k} A_i \subset \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} A_i \subset \mathbb{R}^n.$$

Ainsi

$$\sum_{i=1}^{k} \operatorname{Im} A_i = \mathbb{R}^n$$

et la relation sur les rangs donne

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(\operatorname{Im} A_i) = \dim \mathbb{R}^n.$$

Les espaces $\operatorname{Im} A_i$ sont donc en somme directe

$$\bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Im} A_k = \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on peut écrire

$$x = A_1 x + \cdots + A_k x.$$

En particulier, pour le vecteur $A_j x$, on obtient

$$A_j x = A_1 A_j x + \cdots + A_j x + \cdots + A_k A_j x.$$

La somme directe précédente donne alors par unicité d'écriture

$$\forall 1 \leq i \neq j \leq k, A_i A_j x = 0$$

et peut alors conclure.

Exercice 103 : [énoncé]

(a) Si f est bijectif (nécessairement $n = p$), il suffit de composer de part et d'autre par f^{-1} pour écrire

$$f\circ g\circ g = 0 \iff f\circ g = 0 \iff g = 0.$$

(b) Dans des bases adaptées, l'application linéaire f peut être figurée par la matrice J_r canonique de rang r de type (n,p). Par représentation matricielle, l'espace H est alors isomorphe à

$$\left\{M\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})\,\middle|\,J_rMJ_r = O_n\right\}.$$

Un calcul par blocs, montre que les matrices solutions sont celles de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\quad\text{avec}\quad A = \mathrm{O}_r.$$

La dimension de H s'en déduit.

(c) Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E et $u_{i,j}$ l'endomorphisme de E envoyant e_i sur e_j et les autres vecteurs de bases sur 0_E ($u_{i,j}$ est l'endomorphisme figuré par la matrice élémentaire $E_{i,j}$).
On peut écrire

$$f = \sum_{k,\ell=1}^n a_{k,\ell}u_{k,\ell}$$

avec $A = (a_{k,\ell})$ la matrice figurant f dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.
Sachant $u_{i,j}\circ u_{k,\ell} = \delta_{j,k}u_{i,\ell}$, il vient

$$u_{i,j}\circ f = \sum_{\ell=1}^n a_{j,\ell}u_{i,\ell}$$

puis

$$f\circ u_{i,j}\circ f = \sum_{k=1}^n\sum_{\ell=1}^n a_{k,i}a_{j,\ell}u_{k,\ell}.$$

La coordonnée selon $u_{i,j}$ de $\varphi(u_{i,j})$ est donc $a_{i,i}a_{j,j}$. On en déduit

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{i,j=1}^n a_{i,i}a_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^n a_{j,j}\right) = (\mathrm{tr}\, f)^2.$$

Exercice 104 : [énoncé]

(a) En dimension finie, il suffit d'établir $\det f = 0$ pour conclure. Or

$$\det f = \det\bigl(-f^3\bigr) = (-1)^3(\det f)^3.$$

Ainsi, $\det f$ est un réel solution de l'équation $x = -x^3$ et donc $\det f = 0$.

(b) 0 est la seule racine réelle du polynôme annulateur $X^3 + X$ et c'est donc la seule valeur propre de f (0 est valeur propre car f n'est pas injectif). Si f est diagonalisable, c'est l'endomorphisme nul ce que le sujet exclut.
Soit $x\in\mathrm{Im}\, f\cap\mathrm{Ker}\, f$. On peut écrire $x = f(a)$ et on a alors

$$x = x + f^2(x) = f(a) + f^3(a) = 0.$$

Les espaces $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont donc en somme directe et par conséquent supplémentaires car la formule du rang donne $\dim\mathrm{Im}\, f + \dim\mathrm{Ker}\, f = \dim\mathbb{R}^3$.

(c) Soit $x\in E\setminus\mathrm{Ker}\, f$. Les vecteurs $f(x)$ et $f^2(x)$ appartiennent à $\mathrm{Im}\, f$.
Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda f(x) + \mu f^2(x) = 0. \tag{3}$$

En appliquant f aux deux membres

$$\lambda f^2(x) - \mu f(x) = 0. \tag{4}$$

La combinaison $\lambda\times(\textbf{??}) - \mu\times(\textbf{??})$, donne

$$\bigl(\lambda^2+\mu^2\bigr)f(x) = 0.$$

Puisque $f(x)\neq 0$, on obtient $\lambda^2+\mu^2 = 0$ et donc $(\lambda,\mu) = (0,0)$.
La famille $\bigl(f(x), f^2(x)\bigr)$ est donc libre et constitue une base de $\mathrm{Im}\, f$ qui est de dimension inférieure à 2 car f n'est pas surjectif.
Enfin, en complétant cette famille d'un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}\, f$, on forme une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On conclut $\mathrm{tr}\, f = 0$.

Exercice 105 : [énoncé]
Supposons que de telles matrices existent et posons $M = AB - BA$. D'une part

$$\mathrm{tr}(M) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = 0$$

et d'autre part $M^2 = \mathrm{I}_n$ et M est donc la matrice d'une symétrie, semblable à

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_q \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad p = \dim \operatorname{Ker}(M - \mathrm{I}_n) \text{ et } q = \dim \operatorname{Ker}(M + \mathrm{I}_s).$$

On a donc

$$p - q = 0$$

et l'entier $n = p + q$ est nécessairement pair.
Inversement, si n est pair, on écrit $n = 2p$ et les matrices A et B suivantes sont solutions

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{I}_p & 0 \end{pmatrix}.$$

En résumé, de telles matrices A et B existent si, et seulement si, n est un entier pair.

Exercice 106 : [énoncé]
Si $f = 0$ alors $f \circ g = 0$.
Sinon il existe une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice de g commutant avec f est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

et puisque $g^2 = 0$, $a = 0$.
Par suite la matrice de $f \circ g$ est nulle.

Exercice 107 : [énoncé]
F_ω est clairement un endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$. Sa matrice dans la base $(1, X, \dots, X^{n-1})$ est $A = (a_{i,j})_{0 \le i,j \le n-1}$ avec $a_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \omega^{ij}$. On remarque que $\overline{A}A = I_n$ car $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(j-i)k} = \delta_{i,j}$. Par suite F_ω est un automorphisme et F_ω^{-1} étant représenté par $\overline{A}$, $F_\omega^{-1}(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^{-k}) X^k$.

Exercice 108 : [énoncé]

(a) Les endomorphismes $\lambda \mathrm{Id}_E$ ont la propriété voulue.

(b) Les familles $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ engendrent le même espace vectoriel. Étant toutes deux formées de n vecteurs, si l'une est libre, l'autre aussi.

(c) Soit u un endomorphisme de E dont la matrice est diagonale dans toutes les bases de E.
La matrice de u dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ est de la forme $\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.
Puisque la matrice de u dans la base $(e_1 + e_i, e_2, \dots, e_n)$ est aussi diagonale, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$u(e_1 + e_i) = \alpha(e_1 + e_i).$$

Or par linéarité

$$u(e_1 + e_i) = u(e_1) + u(e_i) = \lambda_1 e_1 + \lambda_i e_i.$$

Par liberté de la famille (e_1, e_i) on identifie les scalaires et on peut affirmer

$$\lambda_1 = \alpha = \lambda_i.$$

Ainsi, si un endomorphisme à une représentation matricielle diagonale dans toutes les bases de E, sa matrice est de la forme λI_n et donc cet endomorphisme est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$.

(d) Soit u un tel endomorphisme. Si $A = (a_{i,j})$ est sa matrice dans une base $(e_1, \dots, e_n)$ alors sa matrice dans la base $(e_1, 2e_2, \dots, ne_n)$ a pour coefficient général

$$\frac{j}{i} a_{i,j}$$

et comme cette matrice doit être égale à la précédente, on obtient

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \ne i \implies a_{i,j} = 0.$$

Ainsi, cet endomorphisme a une matrice diagonale dans toute base de E et en vertu de ce qui précède, il est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 109 : [énoncé]
Soit $x \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f$. Il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $x = f(a)$ et alors

$$x = -f^3(a) = -f^2(x) = -f(f(x)) = -f(0) = 0.$$

Ainsi $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$ puis, par le théorème du rang, on peut affirmer

$$\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f.$$

Si $f^2 + \mathrm{Id} = \tilde{0}$ alors $f^2 = -\mathrm{Id}$ puis $(\det f)^2 = \det(-\mathrm{Id}) = -1$. C'est impossible.

On en déduit que $f^2 + \mathrm{Id} \neq \tilde{0}$ et puisque $f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = \tilde{0}$, on a $\operatorname{Ker} f \neq \{0\}$.
Soit $e_1 \in \operatorname{Ker} f$ non nul.
Puisque par hypothèse f n'est pas l'application nulle, considérons
$e_2 = f(a) \in \operatorname{Im} f$ vecteur non nul. Posons $e_3 = -f(e_2) \in \operatorname{Im} f$.
On vérifie

$$f(e_3) = -f^2(e_2) = -f^3(a) = f(a) = e_2.$$

De plus les vecteurs e_2 et e_3 ne sont pas colinéaires.
En effet si $e_3 = \lambda e_2$, on obtient en composant par f, $e_2 = -\lambda e_3$ et on en déduit
$e_2 = -\lambda^2 e_2$. Sachant $e_2 \neq 0$, on obtient $\lambda^2 = -1$ ce qui est impossible avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
Puisque (e_2, e_3) est une famille libre de $\operatorname{Im} f$ et puisque (e_1) est une famille libre
de $\operatorname{Ker} f$, on peut affirmer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$. Dans celle-ci, la
matrice de f est égale à A.

Exercice 110 : [énoncé]

(a) Dans la base canonique, la matrice de $u - v$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & & * \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 2n \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\operatorname{rg}(u - v) = (n+1) - 1 = n.$$

(b) On peut aussi étudier le noyau de $u - v$ et par un argument de périodicité justifier que seuls les polynômes constants sont éléments de ce noyau.

Exercice 111 : [énoncé]

Soit f solution. La matrice de f relative à la base canonique est à coefficients
entiers. De plus f est un automorphisme car les vecteurs de la base canonique
sont des valeurs prises par f et comme $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, la matrice de f^{-1} relative à
la base canonique est à coefficients entiers. Inversement, si f est un
automorphisme telle que f et f^{-1} soient représentés par des matrices à
coefficients entiers dans la base canonique, il est immédiat que $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et que
$f^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ donc que $\mathbb{Z}^n \subset f(\mathbb{Z}^n)$ et finalement $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons que les
endomorphismes solutions peuvent aussi se décrire comme étant les
endomorphismes canoniquement représentés par une matrice à coefficients entiers
et qui sont de déterminant égal à 1 ou -1.