Espaces euclidiens

Produit scalaire

Exercice 1 [01568] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$$

définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Exercice 2 [01569] [Correction]
Montrer que

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)(1-t^2)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur l'espace $E = \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{R})$.

Exercice 3 [01570] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}^1([0\,;1],\mathbb{R})$. Pour $f,g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

Calcul dans un espace préhilbertien

Exercice 4 [01572] [Correction]
Soit E espace vectoriel muni d'un produit scalaire $(\cdot \mid \cdot)$.
Pour $a \in E$ non nul et $\lambda \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation

$$(a \mid x) = \lambda$$

d'inconnue $x \in E$.

Exercice 5 [00507] [Correction]
Soit $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien réel E telle que

$$\forall x \in E, \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \mid x)^2.$$

Montrer que $(e_1,e_2,\dots,e_n)$ constitue une base orthonormée de E.

Exercice 6 [00509] [Correction]
Soient E un espace préhilbertien réel et $f\colon E \to E$ une application surjective telle que pour tout $x,y \in E$, on ait

$$(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$

Montrer que f est un endomorphisme de E.

Exercice 7 [00510] [Correction]
Soient x,y deux vecteurs non nuls d'un espace préhilbertien réel. Établir

$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|\|y\|}.$$

Calcul dans un espace euclidien

Exercice 8 [01584] [Correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x,y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$

(a) Montrer que la matrice de f dans une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est symétrique.

(b) Montrer que le noyau et l'image de f sont supplémentaires et orthogonaux.

Exercice 9 [00522] [Correction]
Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que

$$\forall x,y \in E, (f(x) \mid y) = (x \mid f(y)).$$

Montrer

$$\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}.$$

Exercice 10 [02396] [Correction]
Soit $(E, \langle\cdot\,,\cdot\rangle)$ un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x\rangle = 0$.

(b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 11 [04153] [Correction]
Soit v un endomorphisme d'un espace euclidien de de dimension n.

(a) Montrer que la quantité
$$S = \sum_{i=1}^{n} \langle v(e_i), e_i\rangle$$
ne dépend pas de la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E choisie.

(b) Montrer que la quantité
$$T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \langle v(e_i), f_j\rangle^2$$
ne dépend pas des bases orthonormées $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ de E choisies.

(c) Que vaut T lorsque v est un projecteur orthogonal de rang r ?

Inégalité de Cauchy Schwarz

Exercice 12 [01576] [Correction]
Soient $x_1, \dots, x_n > 0$ tels que $x_1 + \dots + x_n = 1$.
Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$
Préciser les cas d'égalité.

Exercice 13 [01577] [Correction]
On considère $\mathcal{C}^0([a\,;b], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire
$$(f\,|\,g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$
Pour f strictement positive sur $[a\,;b]$ on pose
$$\ell(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$
Montrer que $\ell(f) \geq (b-a)^2$.
Étudier les cas d'égalités.

Exercice 14 [01578] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. On pose $I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
Montrer
$$I_{n+p}^2 \leq I_{2n} I_{2p}.$$

Exercice 15 [00504] [Correction]
Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer
$$\bigl(\operatorname{tr}(AB + BA)\bigr)^2 \leq 4\operatorname{tr}(A^2)\operatorname{tr}(B^2).$$

Exercice 16 [03883] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle vérifiant
$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, a_{i,i} \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{i,j}^2 < 1.$$

(a) Montrer
$$\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0.$$

(b) En déduire que la matrice A est inversible.

Orthogonalité

Exercice 17 [01579] [Correction]
Soient E un espace euclidien et $x, y \in E$. Montrer que x et y sont orthogonaux si, et seulement si,
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Orthogonal d'une partie, d'un sous-espace vectoriel

Exercice 18 [01585] [Correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.
Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercice 19 [00516] [Correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^t AB).$$

(a) Montrer que la base canonique $(E_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.

(b) Observer que les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

(c) Établir que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a

$$\operatorname{tr}(A) \le \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}({}^t AA)}$$

et préciser les cas d'égalité.

Algorithme de Gram-Schmidt

Exercice 20 [01581] [Correction]
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Schmidt, la famille (u, v, w) avec

$$u = (1,0,1), v = (1,1,1), w = (-1,1,0).$$

Exercice 21 [03805] [Correction]

(a) Énoncer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(b) Orthonormaliser la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Projections et symétries orthogonales

Exercice 22 [01588] [Correction]
On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la projection orthogonale sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$.

Exercice 23 [01589] [Correction]
On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale sur le plan P d'équation $x = z$.

Exercice 24 [01590] [Correction]
On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y+z+t = x-y+z-t = 0\right\}.$$

(a) Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.

(b) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.

(c) Écrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.

(d) Calculer $d(u, F)$ où $u = (1,2,3,4)$.

Exercice 25 [01591] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, j, k)$.
Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ déterminé par

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est une projection orthogonale sur un plan dont on précisera une équation.

Exercice 26 [01592] [Correction]
Soient a et b deux vecteurs distincts d'un espace vectoriel euclidien E tels que

$$\|a\| = \|b\|.$$

Montrer qu'il existe une unique réflexion échangeant a et b.

Exercice 27 [01593] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure à 2.
Soient x et y deux vecteurs distincts de E tels que $(x \mid y) = \|y\|^2$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = p_H(x)$.

Exercice 28 [01594] [Correction]
Soit $E = \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{R})$.
Pour $f, g \in E$, on pose

$$\varphi(f,g) = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

(b) On note $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les sous-ensembles de E formés des fonctions paires et impaires.
Montrer que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.

(c) Soit $\psi\colon f \mapsto \hat{f}$ avec $\hat{f}\colon x \mapsto f(-x)$.
Montrer que ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 29 [01596] [Correction]
Soit E un espace vectoriel euclidien, H et H' deux hyperplans de E.
On note s et s' les réflexions par rapport à H et H'.
À quelle condition s et s' commutent-elles et préciser alors $s \circ s'$.

Exercice 30 [03403] [Correction]
Soient x et y deux vecteurs non nuls d'un espace euclidien E.
À quelle condition sur x et y, le projeté orthogonal du vecteur x sur la droite $\mathrm{Vect}(y)$ est-il égal au projeté orthogonal de y sur la droite $\mathrm{Vect}(x)$?

Exercice 31 [03803] [Correction]
Montrer que la matrice

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

est orthogonale.
Calculer $\det(M)$. Qu'en déduire d'un point de vue géométrique ?
Donner les caractéristiques géométriques de M.

Exercice 32 [04992] [Correction]
Soient x un vecteur d'un espace euclidien E de dimension $n \geq 1$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ une famille de réels.
À quelle condition existe-t-il une base orthonormale de E telle que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ soit la famille des coordonnées de x dans cette base ?

Distance à un sous-espace vectoriel

Exercice 33 [00073] [Correction]
On munit $E = \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{R})$ du produit scalaire :

$$(f \mid g) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour $i \in \{0,1,2,3\}$, on note $P_i(x) = x^i$.

(a) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre mais pas orthogonale.

(b) Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée (Q_0, Q_1, Q_2) de $F = \mathrm{Vect}(P_0, P_1, P_2)$ à partir de la famille (P_0, P_1, P_2).

(c) Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F et la distance de P_3 à F.

Exercice 34 [00527] [Correction]

(a) Montrer que $(P \mid Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(b) Calculer $d(X^2, P)$ où $P = \left\{aX + b \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 35 [02736] [Correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire rendant orthonormée la base canonique, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \|M - aI_n - bJ\|$.

Exercice 36 [03764] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer

$$\inf_{M\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1\leq i,j\leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2 \right).$$

Exercice 37 [03117] [Correction]

(a) Montrer que $(A \mid B) = \operatorname{tr}\left(A^t B\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
Exprimer la distance de

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 38 [02571] [Correction]

(a) Montrer que $(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur l'ensemble E des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ engendré par $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$ et $f_3(x) = x$.

(b) Pour quels réel a et b la distance de $f_2(x)$ à $g(x) = ax + b$ est-elle minimale ?

Exercice 39 [01598] [Correction]
Soient n un entier supérieur à 3 et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que

$$\varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire sur E.

(b) Calculer

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Exercice 40 [02734] [Correction]
Calculer le minimum de

$$\int_0^1 \left(t^3 - at^2 - bt - c\right)^2 \mathrm{d}t$$

pour a, b, c parcourant $\mathbb{R}$.

Exercice 41 [00526] [Correction]
(Déterminant de Gram) Soit E un espace préhilbertien réel. Pour $(u_1, \dots, u_p)$ famille de vecteurs de E, on note $G(u_1, \dots, u_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i, j) est $\langle u_i, u_j \rangle$.

(a) Montrer que si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est liée alors

$$\det G(u_1, \dots, u_p) = 0.$$

(b) Établir la réciproque.

(c) Montrer que si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x \in E$,

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, \dots, e_p)}}.$$

Exercice 42 [04080] [Correction]
On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique $\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left({}^t AB\right)$.

(a) Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.

(b) Calculer la distance à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

(c) Montrer que l'ensemble H des matrices de trace nulle est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.
Donner la distance à H de la matrice J dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 43 [04958] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

(a) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant, pour tous $P, Q \in E$,

$$(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k).$$

(b) Déterminer une base orthonormale de E pour le produit scalaire précédent.

(c) Exprimer la distance du polynôme X^n à l'espace

$$H = \left\{P \in E \,\middle|\, P(a_0) + \dots + P(a_n) = 0\right\}.$$

Exercice 44 [04969] [Correction]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux si, et seulement si,

$$\|x\|^2 = \bigl(d(x,F)\bigr)^2 + \bigl(d(x,G)\bigr)^2 \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Isométries vectorielles

Exercice 45 [01600] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y) \iff \forall x \in E, \bigl\|f(x)\bigr\| = \|x\|.$$

Exercice 46 [00344] [Correction]
Soient f une isométrie vectorielle d'un espace vectoriel euclidien E et $F = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id})$. Montrer

$$f(F^\perp) = F^\perp.$$

Exercice 47 [01601] [Correction]
Soit $f : E \to E$ une application vérifiant

$$\forall (x,y) \in E^2, \bigl(f(x) \mid f(y)\bigr) = (x \mid y).$$

Montrer que f est linéaire.

Exercice 48 [01603] [Correction]
Soient F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f \in \mathrm{O}(E)$ tels que $f(F) \subset F$.
Montrer

$$f(F) = F \text{ et } f(F^\perp) = F^\perp.$$

Exercice 49 [01606] [Correction]
Soient a un vecteur unitaire d'un espace vectoriel euclidien E, α un réel et $f_\alpha : E \to E$ l'application définie par

$$f_\alpha(x) = x + \alpha(x \mid a).a.$$

(a) Montrer que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour le produit de composition et observer que f_α et f_β commutent.

(b) Calculer f_α^p pour $p \in \mathbb{N}$.

(c) Montrer que f_α est inversible si, et seulement si, $\alpha \neq -1$. Quelle est la nature de f_{-1} ?

(d) Montrer

$$f_\alpha \in \mathrm{O}(E) \iff \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2.$$

Quelle est la nature de f_{-2} ?

Exercice 50 [00346] [Correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et $f : E \to E$ une application telle que

$$\forall x, y \in E, (f(x) \mid f(y)) = (x \mid y).$$

En observant que l'image par f d'une base orthonormée est une base orthonormée montrer que f est linéaire.

Matrices orthogonales

Exercice 51 [03926] [Correction]
Soient A et B dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A+2B)/3$ appartienne à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire de A et B ?

Exercice 52 [00339] [Correction]
Quelles sont les matrices orthogonales triangulaires supérieures ?

Exercice 53 [02743] [Correction]
Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice réelle orthogonale. Montrer que

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n.$$

Exercice 54 [02745] [Correction]
Soient $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, $\sigma = ab+bc+ca$, $S = a+b+c$ et la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}.$$

(a) Montrer
$$M\in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S\in\{-1,1\}.$$

(b) Montrer
$$M\in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1.$$

(c) Montrer que M est dans $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $k\in[0\,;4/27]$ tel que a,b et c sont les racines du polynôme X^3-X^2+k.

Exercice 55 [03171] [Correction]
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible vérifiant

$$A\,{}^tA = {}^tAA.$$

Montrer que la matrice $\Omega = {}^tA^{-1}A$ est orthogonale.

Isométries du plan

Exercice 56 [01607] [Correction]
Soit u et v deux vecteurs unitaires d'un plan vectoriel euclidien orienté.
Quels sont les isométries vectorielles qui envoient u sur v ?

Exercice 57 [01609] [Correction]
À quelle condition une réflexion σ et une rotation r du plan commutent ?

Mesures angulaires

Exercice 58 [01597] [Correction]
Soient E un espace vectoriel euclidien et u,v,w trois vecteurs unitaires.
On pose
$$\alpha = \mathrm{Ecart}(u,v), \beta = \mathrm{Ecart}(v,w) \text{ et } \theta = \mathrm{Ecart}(u,w).$$
En projetant v sur un plan contenant u et w, montrer que $\theta\leq\alpha+\beta$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors
$$\sum_{k=0}^{n} P(k)^2 = 0$$
donc
$$\forall k \in \{0, 1, \ldots, n\}, P(k) = 0.$$
Ainsi P admet au moins $n+1$ racines, or $\deg P \leq n$ donc $P = 0$.

Exercice 2 : [énoncé]
Symétrie, bilinéarité et positivité : claires.
Si $\varphi(f, f) = 0$ alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue et positive, on a pour tout $t \in [-1\,;1]$, $f(t)^2(1-t^2) = 0$ et donc pour tout $t \in]-1\,;1[$, $f(t) = 0$.
Par continuité de f en 1 et -1, on obtient $f(t) = 0$ sur $[-1\,;1]$.
On peut alors conclure que φ est un produit scalaire.

Exercice 3 : [énoncé]
φ est clairement une forme bilinéaire symétrique.
On a aussi $\varphi(f, f) \geq 0$ et
$$\varphi(f, f) = 0 \implies f(0) = 0 \text{ et } f' = 0$$
car f'^2 est continue, positive et d'intégrale nulle. On en déduit
$$\varphi(f, f) = 0 \implies f = 0.$$

Exercice 4 : [énoncé]
Considérons le vecteur
$$x_0 = \frac{\lambda}{\|a\|^2} a.$$
On a
$$(a \,|\, x_0) = \lambda$$
et donc $x_0 \in \mathcal{S}$.
Soit $x \in E$,
$$x \in \mathcal{S} \iff (a \,|\, x - x_0) = 0$$
donc
$$\mathcal{S} = x_0 + \mathrm{Vect}(a)^\perp.$$

Exercice 5 : [énoncé]
Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$,
$$\|e_j\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, e_j)^2$$
donc $(e_i \,|\, e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$. Ainsi la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est orthonormée.
Si la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ n'est pas une base, on peut déterminer $e_{n+1} \in E$ tel que $(e_1, e_2, \ldots, e_n, e_{n+1})$ soit libre. Par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt, on peut se ramener au cas où
$$e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)^\perp.$$
Mais alors
$$\|e_{n+1}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (e_i \,|\, e_{n+1})^2 = 0$$
ce qui est contradictoire.
Par suite la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée.

Exercice 6 : [énoncé]
$$\begin{aligned}(f(\lambda x + \lambda' x') \,|\, f(y)) &= (\lambda x + \lambda' x' \,|\, y) \\ &= \lambda(x \,|\, y) + \lambda'(x' \,|\, y) \\ &= \lambda(f(x) \,|\, f(y)) + \lambda'(f(x') \,|\, f(y)) \\ &= (\lambda f(x) + \lambda' f(x') \,|\, f(y))\end{aligned}$$
donc
$$f(\lambda x + \lambda' x') - (\lambda f(x) + \lambda' f(x')) \in (\mathrm{Im}\, f)^\perp = \{0\}$$
d'où la linéarité de f.
En fait, l'hypothèse de surjectivité n'est pas nécessaire pour résoudre cet exercice mais permet un « argument rapide ».

Exercice 7 : [énoncé]
En développant le produit scalaire
$$\left\| \frac{x}{\|x\|^2} - \frac{y}{\|y\|^2} \right\|^2 = \frac{1}{\|x\|^2} - 2\frac{(x \,|\, y)}{\|x\|^2\|y\|^2} + \frac{1}{\|y\|^2} = \left(\frac{\|x - y\|}{\|x\|\|y\|} \right)^2.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = (a_{i,j})$ avec $a_{i,j} = (e_i \,|\, f(e_j)) = (f(e_i) \,|\, e_j) = a_{j,i}$.

(b) Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et $z = f(y) \in \operatorname{Im} f$.
$(x \,|\, z) = (x \,|\, f(y)) = (f(x) \,|\, y) = (0 \,|\, y) = 0$ donc $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f^{\perp}$.
De plus $\dim \operatorname{Ker} f = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Im} f^{\perp}$ donc $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f^{\perp}$ puis la conclusion.

Exercice 9 : [énoncé]

Soit $y \in \operatorname{Im} f$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et alors

$$\forall z \in \operatorname{Ker} f, (y \,|\, z) = (f(x) \,|\, z) = (x \,|\, f(z)) = (x \,|\, 0) = 0$$

donc $\operatorname{Im} f \subset (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ puis $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$ par égalité des dimensions.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. $\operatorname{tr} u = 0$ donne

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_i) \rangle = 0.$$

Si $\dim E = 1$: ok
Si $\dim E > 1$, il existe $i \neq j$ tel que $\langle e_i, u(e_i) \rangle \geq 0$ et $\langle e_j, u(e_j) \rangle \leq 0$.
L'application $t \mapsto \langle u(te_i + (1-t)e_j), te_i + (1-t)e_j \rangle$ est continue, à valeurs réelles et change de signe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et donc il existe $t \in [0\,;1]$ tel que pour $x = te_i + (1-t)e_j$, $\langle u(x), x \rangle = 0$. De plus, l'indépendance de e_i et e_j assure $x \neq 0$.

(b) Il existe ε_1 vecteur unitaire tel que

$$\langle \varepsilon_1, u(\varepsilon_1) \rangle = 0.$$

On complète celui-ci en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A \end{pmatrix}$$

avec $\operatorname{tr} A = 0$. Considérons alors u' l'endomorphisme de $E' = \operatorname{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de matrice A dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Puisque $\operatorname{tr} u' = \operatorname{tr} A = 0$, un principe de récurrence permet de former une base orthonormée $(\varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ de E' dans laquelle u' est représenté par une matrice de diagonale nulle. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ est alors une base orthonormée solution du problème posé.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\langle v(e_i), e_i \rangle$ est le coefficient diagonal d'indice i de la matrice figurant v dans la base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. La quantité S correspond à la trace de v.

(b) La somme

$$\sum_{j}^{n} \langle v(e_i), f_j \rangle^2$$

correspond à la norme au carrée du vecteur $v(e_i)$ et donc

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left\| v(e_i) \right\|^2.$$

Notons A la matrice figurant l'endomorphisme v dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et w l'endomorphisme figuré dans cette base par la matrice ${}^tAA$. On remarque, pour x vecteur de E de colonne coordonnées X,

$$\left\| v(x) \right\|^2 = {}^t(AX)AX = {}^tX{}^tAAX = \langle x, w(x) \rangle.$$

On en déduit

$$T = \sum_{i=1}^{n} \langle w(e_i), e_i \rangle = \operatorname{tr} w.$$

(c) Si v est un projecteur orthogonal, il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ dans lequel il est figuré par une matrice diagonale avec r coefficients 1 et le reste de 0. On a alors

$$T = \sum_{i=1}^{n} \left\| v(e_i) \right\|^2 = r.$$

Exercice 12 : [énoncé]

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_k}} \sqrt{x_k} \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2.$$

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il y a colinéarité des n-uplets

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}} \right) \text{ et } \left(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n} \right)$$

ce qui correspond au cas où

$$\frac{\sqrt{x_1}}{1/\sqrt{x_1}} = \cdots = \frac{\sqrt{x_n}}{1/\sqrt{x_n}}$$

soit encore

$$x_1 = \cdots = x_n = 1/n.$$

Exercice 13 : [énoncé]
Soit $g \in \mathcal{C}([a\,;b],\mathbb{R})$ l'application définie par $g(t) = \sqrt{f(t)}$.
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$(b-a)^2 = \left(\int_a^b g(t).\frac{1}{g(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} = \ell(f).$$

Il y a égalité si, et seulement si, $t \mapsto g(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{g(t)}$ sont colinéaires ce qui correspond à f constante.

Exercice 14 : [énoncé]
Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\int_0^1 t^{n+p} f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 = \left(\int_0^1 t^n\sqrt{f(t)}t^p\sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 t^{2n} f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 t^{2p} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15 : [énoncé]
Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit un produit scalaire par

$$(A\,|\,B) = \operatorname{tr}({}^tAB).$$

Pour $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$,

$$\operatorname{tr}(AB + BA) = 2(A\,|\,B)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit la relation demandée.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) En notant $X = (x_1, \ldots, x_n)$, on obtient

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i x_j$$

et donc

$$^tXAX = \sum_{i=1}^n a_{i,i} x_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j\neq i}^n a_{i,j} x_i x_j.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{i,j}||x_j|.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{i,j}||x_j|\right)^2}$$

et une nouvelle fois

$$\left(\sum_{j=1,j\neq i}^n |a_{i,j}||x_j|\right)^2 \leq \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1,j\neq i}^n x_j^2 \leq \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2.$$

On obtient donc

$$\left|\sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}x_ix_j\right| \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1,j\neq i}^n a_{i,j}^2 < \sum_{i=1}^n x_i^2$$

puis

$$^tXAX > \sum_{i=1}^n a_{i,i}x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0.$$

(b) Si $X \in \operatorname{Ker} A$ alors $^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ en vertu de ce qui précède.

Exercice 17 : [énoncé]
($\Longrightarrow$) Via Pythagore
($\Longleftarrow$) Si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ alors $2\lambda(x\,|\,y) + \lambda^2\|y\|^2 \geq 0$.
Si, par l'absurde $(x\,|\,y) \neq 0$ alors $2\lambda(x\,|\,y) + \lambda^2\|y\|^2 \underset{\lambda\to 0}{\sim} 2\lambda(x\,|\,y)$ qui change de signe en 0. Absurde.
Par suite $(x\,|\,y) = 0$.

Exercice 18 : [énoncé]
$F, G \subset F \cup G$ donc $(F \cup G)^\perp \subset F^\perp \cap G^\perp$.
Soit $x \in F^\perp \cap G^\perp$. Pour tout $y \in F \cup G$, en discutant selon l'appartenance de y à F ou G, on a $(x \mid y) = 0$ donc $x \in (F \cup G)^\perp$. Ainsi $F^\perp \cap G^\perp \subset (F \cup G)^\perp$ puis l'égalité.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) $(E_{i,j} \mid E_{k,\ell}) = \operatorname{tr}(E_{j,i}E_{k,\ell}) = \operatorname{tr}(\delta_{i,k}E_{j,\ell}) = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$.

(b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^tAB) = \operatorname{tr}(AB) = -\operatorname{tr}(A^tB) = -\operatorname{tr}({}^tBA) = -(B \mid A)$$

donc $(A \mid B) = 0$ et l'orthogonalité des espaces. Leur supplémentarité est connue.

(c) L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|(I_n \mid A)| \leq \|I_n\|\|A\|$$

d'où

$$\operatorname{tr}(A) \leq \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}({}^tAA)}$$

avec égalité si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) \geq 0$ et (A, I_n) liée, *i.e.* $A = \lambda I_n$ avec $\lambda \geq 0$.

Exercice 20 : [énoncé]
On obtient la famille (e_1, e_2, e_3) avec

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), e_2 = (0,1,0) \text{ et } e_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) cf. cours !

(b) Au terme des calculs, on obtient la base (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, P_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}X \text{ et } P_2 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(X^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Exercice 22 : [énoncé]
Soit $n = i + j + k$ un vecteur normal à P. Notons p la projection orthogonale sur P.
On sait

$$\forall x \in E, p(x) = x - \frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}n$$

et donc

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 23 : [énoncé]
Soit $n = i - k$ un vecteur normal à P. Notons s la symétrie orthogonale par rapport à P. La relation

$$s(x) = x - 2\frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}n$$

donne

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soient

$$H = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y + z + t = 0\right\}$$

et

$$K = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y + z - t = 0\right\}.$$

On a $F = H \cap K$ puis $F^\perp = H^\perp + K^\perp$.
Soient $n = (1,1,1,1)$ et $m = (1,-1,1,-1)$ des vecteurs normaux à H et K.
Par Schmidt

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ et } e_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

forment une base orthonormée de $F^\perp$.

(b) On peut facilement former $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp})$ car

$$\forall x \in E, p_{F^\perp}(x) = (x \mid e_1)e_1 + (x \mid e_2)e_2$$

donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = I_4 - \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_{F^\perp}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) $s_F = 2p_F - \mathrm{Id}$ donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s_F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Pour $u = (1,2,3,4)$, $p_F(u) = (-1,-1,1,1)$ donc
$$d(u,F) = \left\|u - p_F(u)\right\| = \sqrt{4+9+4+9} = \sqrt{26}.$$

Exercice 25 : [énoncé]
Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$. On a $A^2 = A$ donc p est une projection.
En déterminant $\mathrm{Ker}\,p$, on obtient $\mathrm{Ker}\,p = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a = i + 2j - k$.
$\mathrm{Im}\,p$ est un plan dont $p(i)$ et $p(j)$ forment une base.
Puisque $(p(i)\,|\,a) = (p(j)\,|\,a) = 0$ on a $\mathrm{Im}\,p \subset (\mathrm{Ker}\,p)^\perp$ puis $\mathrm{Im}\,p = (\mathrm{Ker}\,p)^\perp$ par égalité des dimensions.
p est donc la projection orthogonale sur le plan dont a est vecteur normal *i.e.*
$$P\colon x + 2y - z = 0.$$

Exercice 26 : [énoncé]
Unicité : Si σ est une réflexion par rapport à un hyperplan H solution alors : $\sigma(a-b) = b - a$ et donc
$$H = \mathrm{Vect}(b-a)^\perp.$$
Existence : Soit $H = \mathrm{Vect}(b-a)^\perp$ et σ la réflexion par rapport à H.
$\sigma(a-b) = b - a$ et $\sigma(a+b) = a + b$ car $(a+b\,|\,a-b) = 0$.
Donc
$$\sigma(a) = \frac{1}{2}\sigma(a+b) + \frac{1}{2}\sigma(a-b) = b \text{ et } \sigma(b) = a.$$
La réflexion σ est solution.

Exercice 27 : [énoncé]
Unicité : $y = p_H(x)$ implique $y - x \in H^\perp$, or $y - x \neq 0$ donc $y - x$ est vecteur normal à H.
Ceci détermine H de manière unique.
Existence : Soit H l'hyperplan dont $y - x$ est vecteur normal.
Puisque $(x\,|\,y) = (y\,|\,y)$ on a $(x - y\,|\,y) = 0$ donc $y \in H$.
On a alors $x = y + (x - y)$ avec $y \in H$ et $x - y \in H^\perp$ donc $p_H(x) = y$ et H est solution.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Rien à signaler.

(b) On a
$$\forall f \in \mathcal{P} \text{ et } \forall g \in \mathcal{I}, \varphi(f,g) = 0$$
car le produit $t \mapsto f(t)g(t)$ est impair et intégré sur un intervalle symétrique par rapport à 0.
Ainsi $\mathcal{P} \subset \mathcal{I}^\perp$.
Inversement, soit $h \in \mathcal{I}^\perp$. On sait $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = E$ donc on peut écrire $h = f + g$ avec $f \in \mathcal{P}$ et $g \in \mathcal{I}$.
On a $\varphi(h,g) = \varphi(f,g) + \varphi(g,g)$. Or $\varphi(h,g) = 0$ et $\varphi(f,g) = 0$ donc $\varphi(g,g) = 0$ d'où $g = 0$.
Ainsi $h = f \in \mathcal{P}$ puis $\mathcal{I}^\perp \subset \mathcal{P}$. On conclut.

(c) $\psi^2 = \mathrm{Id}$ donc ψ est une symétrie.
$$\forall f \in \mathcal{P}, \psi(f) = f \text{ et } \forall f \in \mathcal{I} = (\mathcal{P})^\perp, \psi(f) = -f$$
donc ψ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 29 : [énoncé]
Soit n et n' des vecteurs normaux à H et H'.
Si s et s' commutent alors $s \circ s'(n) = s' \circ s(n) = -s'(n)$ donc $s'(n) \in H^\perp$.
Puisque $\left\|s'(n)\right\| = \|n\|$ on a $s'(n) = n$ ou $s'(n) = -n$ *i.e.* $n \in H'$ ou $n \in H'^\perp$.
Inversement :
Si $n \in H'$ alors on peut construire une base adaptée qui permet matriciellement de conclure à la commutativité et d'observer que $s \circ s'$ est la symétrie orthogonale par rapport à $H \cap H'$.
Si $n \in H'^\perp$ alors $H = H'$ et $s \circ s' = \mathrm{Id}$.

Exercice 30 : [énoncé]
Le projeté orthogonal de x sur la droite $\text{Vect}(y)$ est

$$\frac{(y\,|\,x)}{\|y\|^2}y.$$

Les projetés orthogonaux considérés seront donc égaux si, et seulement si,

$$\frac{(y\,|\,x)}{\|y\|^2}y = \frac{(x\,|\,y)}{\|x\|^2}x.$$

Cette équation est vérifiée si, et seulement si, x et y sont orthogonaux ou

$$\|x\|^2 y = \|y\|^2 x.$$

Dans ce dernier cas x et y sont colinéaires ce qui permet d'écrire $y = \lambda x$ et l'égalité donne

$$\lambda\|x\|^2 x = \lambda^2\|x\|^2 x$$

d'où $\lambda = 1$.
Finalement, les projetés orthogonaux considérés seront égaux si, et seulement si, les vecteurs x et y sont égaux ou orthogonaux.

Exercice 31 : [énoncé]
Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales, c'est donc une matrice orthogonale.
En développant selon une rangée $\det M = -1$.
Puisque la matrice M est de surcroît symétrique, c'est une matrice de réflexion par rapport à un plan. Ce plan est celui de vecteur normal ${}^t\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 32 : [énoncé]
Supposons que $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ soit la famille des coordonnées de x dans une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \quad \text{avec} \quad \lambda_i = (e_i\,|\,x).$$

On sait calculer la norme d'un vecteur à partir de ses coordonnées dans une base orthonormale et ceci donne la condition nécessaire

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2. \tag{1}$$

Inversement, supposons la condition (**??**) remplie et montrons l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{B}$ telle que souhaitée.

On raisonne par récurrence sur la dimension de l'espace en utilisant une projection orthogonale pour se ramener à la dimension inférieure.

Pour $n = 1$, supposons que x soit un vecteur d'un espace euclidien E de dimension 1 et considérons λ un réel tel que $\|x\| = |\lambda|$. Si le vecteur x est nul, n'importe qu'elle base orthonormale de E convient. Sinon, la famille (e_1) avec

$$e_1 = \frac{1}{\lambda}x$$

est immédiatement solution.
Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ (avec $n \geq 2$). Soient x un vecteur d'un espace euclidien E de dimension n et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ une famille de réels vérifiant la condition (**??**). Si x est le vecteur nul, la résolution est immédiate. Supposons désormais ce cas écarté.

On détermine un premier vecteur unitaire e_1 tel que $(e_1\,|\,x) = \lambda_1$.

Introduisons un vecteur y non nul orthogonal à x (ceci est possible car $\dim E \geq 2$) et considérons les vecteurs unitaires

$$x_1 = \frac{1}{\|x\|}x \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{\|y\|}y.$$

Enfin, posons $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda_1 = \|x\|\cos(\theta)$ et considérons le vecteur

$$e_1 = \cos(\theta)x_1 + \sin(\theta)x_2$$

Celui-ci vérifie $\|e_1\| = 1$ et $(e_1\,|\,x) = \lambda_1$. Considérons ensuite l'espace $H = \text{Vect}(e_1)^\perp$ qui est de dimension $n-1$ et le vecteur x' projeté orthogonal de x sur H.

$$x = \lambda_1 e_1 + x' \quad \text{avec} \quad (e_1\,|\,x') = 0.$$

On a

$$\|x'\|^2 = \|x^2\| - \lambda_1^2 = \sum_{i=2}^n \lambda_i^2.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $(e_2, \ldots, e_n)$ base orthonormale de H telle que

$$x' = \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

et alors

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$$

avec $(e_1, \ldots, e_n)$ base orthonormale de E.
La récurrence est établie.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Si $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0$ alors le polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ admet une infinité de racines. C'est donc le polynôme nul et par conséquent
$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
La famille (P_0, P_1, P_2) est donc libre. Elle n'est pas orthogonale puisque $(P_0 \mid P_2) = 1/3 \neq 0$.

(b) $R_0 = P_0$, $\|R_0\| = 1$, $Q_0 \colon x \mapsto 1$
$(P_0 \mid P_1) = 0$, $R_1 = P_1$, $\|R_1\| = 1/\sqrt{3}$, $Q_1 \colon x \mapsto \sqrt{3}x$.
$R_2 = P_2 + \lambda_0 R_0 + \lambda_1 R_1$.
$(R_2 \mid R_0) = 0$ donne $\lambda_0 = -(P_2 \mid P_0) = -1/3$,
$(R_2 \mid R_1) = 0$ donne $\lambda_1/3 = -(P_2 \mid R_1) = 0$.
$R_2 \colon x \mapsto x^2 - 1/3$, $\|R_2\| = \frac{2}{3\sqrt{5}}$, $Q_2 \colon x \mapsto \frac{\sqrt{5}}{2}\big(3x^2 - 1\big)$.

(c) Le projeté orthogonal de P_3 sur F est

$$R = (Q_0 \mid P_3)Q_0 + (Q_1 \mid P_3)Q_1 + (Q_2 \mid P_3)Q_2$$

soit, après calculs

$$R \colon x \mapsto \frac{3}{5}x.$$

La distance de P_3 à F est alors

$$d = \|P_3 - R\| = \frac{2}{5\sqrt{7}}.$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Sans difficulté, notamment parce qu'un polynôme de degré ≤ 2 possédant trois racines est nécessairement nul.

(b) $d(X^2, P) = \big\|X^2 - \pi\big\|$ avec $\pi = aX + b$ projeté orthogonal de X^2 sur P.
$(X^2 - \pi \mid 1) = (X^2 - \pi \mid X) = 0$ donne le système

$$\begin{cases} 3a + 3b = 5 \\ 5a + 3b = 9. \end{cases}$$

Après résolution

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1/3 \end{cases}$$

et après calcul

$$d = \sqrt{2/3}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

Le cas $n = 1$ étant évident, on suppose désormais $n \geq 2$.
La quantité cherchée est $m = d(M, \mathrm{Vect}(I, J)) = \big\|M - p(M)\big\|$ avec p la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(I, J)$.
$p(M) = aI + bJ$ avec $(p(M) \mid I) = (M \mid I) = \mathrm{tr}(M)$ et $(p(M) \mid J) = (M \mid J) = \sigma$ avec σ la somme des coefficients de M.
La résolution de ce système donne

$$a = \frac{n\,\mathrm{tr}(M) - \sigma}{n(n-1)} \text{ et } b = \frac{\sigma - \mathrm{tr}(M)}{n(n-1)}$$

donc

$$m^2 = \big\|M - p(M)\big\|^2 = (M - p(M) \mid M) = \|M\|^2 - \frac{(n-1)\,\mathrm{tr}(M)^2 + (\mathrm{tr}(M) - \sigma)^2}{n(n-1)}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

En introduisant la norme euclidienne canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\|A\| = \left(\sum_{1 \leq i,j \leq} a_{i,j}^2\right)^{1/2}$$

on peut interpréter l'infimum calculé

$$\inf_{M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} \left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j} - m_{i,j})^2\right) = d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2.$$

La distance introduite se calcule par projection orthogonale. Sachant $A = M + N$ avec

$$M = \frac{A + {}^tA}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } N = \frac{A - {}^tA}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})^{\perp}$$

on obtient

$$d(A, \mathcal{S}_n(\mathbb{R}))^2 = \|N\|^2 = \frac{1}{4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i})^2.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) $(A \mid B) = \mathrm{tr}\big(A^tB\big)$ définit le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$(A \mid B) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} b_{i,j}.$$

(b) Pour $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a

$$(A \mid B) = \operatorname{tr}(A^t B) = -\operatorname{tr}(AB) \text{ et } (A \mid B) = (B \mid A) = \operatorname{tr}({}^t AB) = \operatorname{tr}(AB).$$

On en déduit $(A \mid B) = 0$.
Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.
Puisqu'on peut écrire pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$M = \frac{1}{2}\left(M + {}^t M\right) + \frac{1}{2}\left(M - {}^t M\right)$$

avec $\frac{1}{2}\left(M + {}^t M\right) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac{1}{2}\left(M - {}^t M\right) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ *i.e.*

$$d(M, \mathcal{S}_3(\mathbb{R})) = \frac{1}{2}\left\|M - {}^t M\right\| = 2.$$

(c) H est le noyau de la forme linéaire non nulle trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice I_n est orthogonale à tout élément de H et c'est donc un vecteur normal à l'hyperplan H.
On en déduit

$$d(H, J) = \frac{|(I_n \mid J)|}{\|I_n\|} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Exercice 38 : [énoncé]

(a) On reconnaît une restriction du produit scalaire usuel sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0\,;1]$.

(b) La distance f_2 à g sera minimale quand g est le projeté orthogonal de f_2 sur $\operatorname{Vect}(f_1, f_3)$.
Ce projeté g vérifie $(f_2 - g \mid f_1) = (f_2 - g \mid f_3) = 0$ ce qui donne le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = \mathrm{e} - 1 \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b = 1. \end{cases}$$

Après résolution, on obtient $a = 18 - 6\mathrm{e}$ et $b = 4\mathrm{e} - 10$.

Exercice 39 : [énoncé]

(a) Symétrie, bilinéarité et positivité : ok
Si $\varphi(P, P) = 0$ alors $\int_{-1}^{1} P^2(t)\,\mathrm{d}t = 0$ donc (fonction continue positive d'intégrale nulle)

$$\forall t \in [-1\,;1], P(t) = 0.$$

Comme le polynôme P admet une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

(b) On a

$$\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^{1} \left(t^3 - (at^2 + bt + c)\right)^2 \mathrm{d}t = d(X^3, F)^2$$

où $F = \operatorname{Vect}(1, X, X^2)$.
Soit P le projeté orthogonal de X^3 sur F. On peut écrire $P = a + bX + cX^2$ et on a par orthogonalité

$$(X^3 - P \mid 1) = (X^3 - P \mid X) = (X^3 - P \mid X^2) = 0.$$

On en déduit que $P = \frac{3}{5}X$ puis

$$d(X^3, F)^2 = \frac{8}{175}.$$

Exercice 40 : [énoncé]
Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit un produit scalaire par

$$(P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

La quantité cherchée m apparaît alors sous la forme

$$m = \inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \left\|X^2 - (aX^2 + bX + c)\right\|^2.$$

C'est donc le carré de la distance de X^3 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$. En introduisant la projection orthogonale p sur ce sous-espace vectoriel

$$m = d(X^3, \mathbb{R}_2[X])^2 = \left\|X^3 - p(X^3)\right\|^2.$$

On peut écrire

$$p(X^3) = a + bX + cX^2.$$

Pour chaque $i = 0, 1, 2$, on a

$$\left(p(X^3) \mid X^i\right) = (X^3 \mid X^i)$$

car
$$\big(p(X^3)-X^3\,|\,X^i\big)=0.$$
On obtient alors un système d'équations d'inconnue (a,b,c)
$$\begin{cases} c+b/2+a/3=1/4\\ c/2+b/3+a/4=1/5\\ c/3+b/4+a/5=1/6.\end{cases}$$
La résolution de ce système donne
$$c=1/20, b=-3/5 \text{ et } a=3/2.$$
On en déduit
$$m=\left\|X^3-p(X^3)\right\|^2=\big(X^3-p(X^3)\,|\,X^3\big)=\frac{1}{2800}.$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Si la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\neq(0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^p\lambda_iu_i=0_E$ et on observe alors $\sum_{i=1}^n\lambda_iL_i=0$ en notant $L_1,\dots,L_n$ les lignes de la matrice $G(u_1,\dots,u_p)$.
On conclut $\det G(u_1,\dots,u_p)=0$.

(b) Si $\det G(u_1,\dots,u_p)=0$ alors il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p)\neq(0,\dots,0)$ tel que $\sum_{i=1}^n\lambda_iL_i=0$ et on obtient alors que le vecteur $\sum_{i=1}^n\lambda_iu_i$ est orthogonal à tout u_j, c'est donc un vecteur commun à $\operatorname{Vect}(u_1,\dots,u_p)$ et à son orthogonal, c'est le vecteur nul.
On conclut que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée.

(c) $x=u+n$ avec $u\in F$ et $n\in F^\perp$. En développant $\det G(e_1,\dots,e_p,x)$ selon la dernière colonne :
$$\det G(e_1,\dots,e_p,u+n)=\det G(e_1,\dots,e_p,u)+\begin{vmatrix}G(e_1,\dots,e_p) & 0\\ * & \|n\|^2\end{vmatrix}$$
or $\det G(e_1,\dots,e_p,u)=0$ car la famille est liée et donc
$$\det G(e_1,\dots,e_p,x)=\|n\|^2\det G(e_1,\dots,e_p)$$
avec $\|n\|=d(x,F)$.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Pour $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $B\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on a
$$\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(A^tB)=-\operatorname{tr}(AB) \text{ et } \langle A,B\rangle=\langle B,A\rangle=\operatorname{tr}({}^tAB)=\operatorname{tr}(AB).$$
On en déduit $\langle A,B\rangle=0$.
Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont donc en somme directe.
Puisqu'on peut écrire pour tout $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$M=\frac{1}{2}\big(M+{}^tM\big)+\frac{1}{2}\big(M-{}^tM\big)$$
avec $\frac12\big(M+{}^tM\big)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\frac12\big(M-{}^tM\big)\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

(b) La distance de M à $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est égale à la distance de M à son projeté orthogonal sur $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ *i.e.*
$$d(M,\mathcal{S}_3(\mathbb{R}))=\frac{1}{2}\left\|M-{}^tM\right\|=2.$$

(c) H est le noyau de la forme linéaire non nulle trace, c'est donc un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
La matrice I_n est orthogonale à tout élément de H et c'est donc un vecteur normal à l'hyperplan H.
On en déduit
$$d(H,J)=\frac{|\langle I_n,J\rangle|}{\|I_n\|}=\frac{n}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}.$$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) L'application $(\cdot\,|\,\cdot)$ est bien définie de $E\times E$ vers $\mathbb{R}$ et clairement bilinéaire symétrique. Elle est positive car, pour tout $P\in E$,
$$(P\,|\,P)=\sum_{k=0}^n\big(P(a_k)\big)^2\geq 0.$$
De plus, si $(P\,|\,P)=0$, on a $P(a_0)=\dots=P(a_n)=0$ ce qui détermine $n+1$ racines distinctes au polynôme P. Ce dernier est de degré inférieur à n et est donc nul.
Finalement, $(\cdot\,|\,\cdot)$ est bien un produit scalaire sur E.

(b) Considérons la famille $(L_0,\dots,L_n)$ des polynômes interpolateurs de Lagrange en les $a_0,\dots,a_n$:
$$L_i=\prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^n\frac{X-a_k}{a_i-a_k}\quad\text{pour tout } ii[\![0\,;n]\!].$$

On sait

$$L_i(a_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \deg L_i = n$$

de sorte que

$$(L_i \mid L_j) = \sum_{k=0}^{n} L_i(a_k) L_j(a_k) = \delta_{i,j}.$$

La famille $(L_0, \dots, L_n)$ est donc orthonormale. C'est par conséquent une famille libre et, puisqu'elle est formée de $n+1 = \dim E$ vecteurs de E, c'est une base de E.

(c) Le polynôme constant égal à 1 est vecteur normal à l'hyperplan H et on sait qu'alors

$$d(X^n, H) = \frac{\left|(X^n \mid 1)\right|}{\|1\|} = \frac{\left|a_0^n + \dots + a_n^n\right|}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 44 : [énoncé]

Introduisons p_F et p_G les projections orthogonales sur les espaces F et G. On sait

$$d(x, F) = \left\|x - p_F(x)\right\| \quad \text{et} \quad d(x, G) = \left\|x - p_G(x)\right\|.$$

($\Longrightarrow$) Supposons F et G sont supplémentaires orthogonaux.

Les projections orthogonales p_F et p_G sont liées par la relation $p_F + p_G = \mathrm{Id}_E$.

Pour tout vecteur x de E, on a alors

$$\|x\|^2 = \left\|p_F(x) + p_G(x)\right\|^2.$$

Les vecteurs $p_F(x)$ et $p_G(x)$ étant orthogonaux, le théorème de Pythagore donne

$$\|x\|^2 = \left\|p_F(x)\right\|^2 + \left\|p_G(x)\right\|^2. \tag{2}$$

De plus,

$$\big(d(x, F)\big)^2 + \big(d(x, G)\big)^2 = \left\|x - p_F(x)\right\|^2 + \left\|x - p_G(x)\right\|^2$$

et donc

$$\big(d(x, F)\big)^2 + \big(d(x, G)\big)^2 = \left\|p_G(x)\right\|^2 + \left\|p_F(x)\right\|^2. \tag{3}$$

Les égalités (**??**) et (**??**) donnent alors l'égalité voulue.

($\Longleftarrow$) Supposons $\|x\|^2 = \big(d(x, F)\big)^2 + \big(d(x, G)\big)^2$ pour tout $x \in E$, autrement dit,

$$\|x\|^2 = \left\|p_G(x)\right\|^2 + \left\|p_F(x)\right\|^2. \tag{4}$$

Soit x un élément de F. Le projeté de x sur F est égal à x et l'égalité ci-dessus se simplifie en $\left\|p_G(x)\right\| = 0$. Par conséquent, x est élément de $G^\perp$. On a ainsi démontré l'inclusion de F dans l'orthogonal de G, autrement dit, les espaces F et G sont orthogonaux. En montrant que leur somme est égale à E, on peut conclure que les espaces F et G sont supplémentaires orthogonaux.

On étudie l'orthogonal de l'espace $F + G$.

Soit $x \in (F + G)^\perp$. Le vecteur x est élément de l'orthogonal de F et donc $p_F(x) = 0_E$. Un argument symétrique donne $p_G(x) = 0_E$ et l'égalité (**??**) donne $x = 0_E$. Ainsi, l'orthogonal de $F + G$ est l'espace nul et par conséquent

$$F + G = \big((F + G)^\perp\big)^\perp = \{0_E\}^\perp = E.$$

Exercice 45 : [énoncé]

($\Longrightarrow$) Il suffit de prendre $x = y$

($\Longleftarrow$) Par polarisation, pour tout $x, y \in E$,

$$\big(f(x) \mid f(y)\big) = \frac{1}{2}\big(\left\|f(x) + f(y)\right\|^2 - \left\|f(x)\right\|^2 - \left\|f(y)\right\|^2\big).$$

Or $f(x) + f(y) = f(x + y)$ et donc

$$\big(f(x) \mid f(y)\big) = \frac{1}{2}\big(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\big) = (x \mid y).$$

Exercice 46 : [énoncé]

Soit $y \in f(F^\perp)$. Il existe $x \in F^\perp$ tel que $y = f(x)$. On a alors

$$\forall z \in F, (y \mid z) = \big(f(x) \mid f(z)\big) = (x \mid z) = 0.$$

Par suite $f(F^\perp) \subset F^\perp$.

De plus, f conserve les dimensions car c'est un automorphisme. Il y a donc égalité.

Exercice 47 : [énoncé]

Soient $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\left\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\right\|^2 = \left\|f(\lambda x)\right\|^2 - 2\lambda\big(f(\lambda x) \mid f(x)\big) + \lambda^2\left\|f(x)\right\|^2$$

or $\left\|f(\lambda x)\right\|^2 = \lambda^2\|x\|^2$, $\big(f(\lambda x)\,|\,f(x)\big) = \lambda(x\,|\,x)$ et $\left\|f(x)\right\|^2 = \|x\|^2$ donc

$$\left\|f(\lambda x) - \lambda f(x)\right\|^2 = 0.$$

Ainsi

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Soient $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\left\|f(x+y) - (f(x)+f(y))\right\|^2 = \left\|f(x+y)\right\|^2 - 2\big(f(x+y)\,|\,f(x)\big) + f(y))\\ + \left\|f(x)+f(y)\right\|^2\end{aligned}$$

or $\left\|f(x+y)\right\|^2 = \|x+y\|^2$,

$$\begin{aligned}\big(f(x+y)\,|\,f(x)+f(y)\big) &= \big(f(x+y)\,|\,f(x)\big) + \big(f(x+y)\,|\,f(y)\big)\\ &= (x+y\,|\,x+y)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\left\|f(x)+f(y)\right\|^2 &= \left\|f(x)\right\|^2 + 2\big(f(x)\,|\,f(y)\big) + \left\|f(y)\right\|^2\\ &= \|x\|^2 + 2(x\,|\,y) + \|y\|^2\end{aligned}$$

donc

$$\left\|f(x+y) - (f(x)+f(y))\right\|^2 = 0$$

et ainsi

$$f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Finalement, f est linéaire. En fait, f apparaît une isométrie vectorielle.

Exercice 48 : [énoncé]
f étant un automorphisme, $\dim f(F) = \dim F$ donc $f(F) = F$.
Soit $y \in f(F^\perp)$ on peut écrire $y = f(x)$ avec $x \in F^\perp$.
Soit $v \in F$ on peut écrire $v = f(u)$ avec $u \in F$.
On a alors

$$(y\,|\,v) = (f(x)\,|\,f(u)) = (x\,|\,u) = 0.$$

Ainsi $f(F^\perp) \subset F^\perp$, puis par égalité des dimensions $f(F^\perp) = F^\perp$.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) On a
$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, f_\alpha \circ f_\beta = f_{\alpha+\beta+\alpha\beta} = f_\beta \circ f_\alpha.$$

(b) Par récurrence
$$f_\alpha^p = f_{(\alpha+1)^p-1}.$$

(c) Si $\alpha = -1$ alors $f_\alpha(a) = 0$.
f_{-1} est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Si $\alpha \neq -1$ alors $g = f_{-\alpha/(\alpha+1)}$ satisfait à la propriété $f_\alpha \circ g = g \circ f_\alpha = \mathrm{Id}$ donc f_α inversible.

(d) Si $\alpha = 0$ alors $f_\alpha = \mathrm{Id}$.
Si $\alpha = -2$ alors f_α est la réflexion par rapport à $\mathrm{Vect}(a)^\perp$.
Dans les deux cas $f_\alpha \in \mathrm{O}(E)$.
Si $\alpha \neq 0, -2$ alors $f_\alpha(a) = (1+\alpha).a$ puis
$$\left\|f_\alpha(a)\right\| = |1+\alpha| \neq 1 = \|a\|$$
et donc $f_\alpha \notin \mathrm{O}(E)$.

Exercice 50 : [énoncé]
f transforme une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ en une base orthonormée $\mathcal{B}' = (e_1', \dots, e_n')$. Pour tout $x \in E$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (f(x)\,|\,e_i')e_i' = \sum_{i=1}^n (x\,|\,e_i)e_i'$$

d'où la linéarité de f.

Exercice 51 : [énoncé]
Puisque $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe multiplicatif, on a

$$(I+2M)/3 \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$$

avec $M = A^{-1}B \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ unitaire,

$$\|x + 2Mx\| = 3.$$

Mais aussi

$$\|x\| + \|2Mx\| = \|x\| + 2\|x\| = 3.$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire et, par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ vérifiant

$$2Mx = \lambda x.$$

En considérant à nouveau la norme, on obtient $\lambda = 2$ puis $Mx = x$. Ceci valant pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on conclut $M = I_n$ puis $A = B$.

Exercice 52 : [énoncé]
Les matrices diagonales avec coefficients diagonaux égaux à 1 ou -1. Le résultat s'obtient en étendant les colonnes de la première à la dernière, en exploitant qu'elles sont unitaires et deux à deux orthogonales.

Exercice 53 : [énoncé]
Pour $X = {}^t\begin{pmatrix}1 & \dots & 1\end{pmatrix}$, on vérifie

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j} = {}^tXAX.$$

Or ${}^tXAX = (X\,|\,AX)$ donc par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|{}^tXAX\right| \leq \|X\|\|AX\|.$$

Or $\|X\| = \sqrt{n}$ et $\|AX\| = \|X\| = \sqrt{n}$ car $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ donc

$$\left|\sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}\right| \leq n.$$

Exercice 54 : [énoncé]

(a) Les colonnes de M sont unitaires et deux à deux orthogonales si, et seulement si,

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 = 1 \\ ab+bc+ca = 0. \end{cases}$$

Puisque $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2\sigma$, on obtient

$$M \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S^2 = 1.$$

(b) On suppose la matrice M orthogonale et l'on calcule sont déterminant. En ajoutant toutes les colonnes à la première puis en factorisant

$$\det M = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & a & b \\ 1 & c & a \end{vmatrix}$$

puis en retranchant les premières lignes aux suivantes

$$\det M = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & a-b & b-c \\ 0 & c-b & a-c \end{vmatrix}.$$

Enfin

$$\det M = (a+b+c)\big((a-b)(a-c)+(b-c)^2\big).$$

Ainsi

$$\det M = S\big(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\big) = S$$

car $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $\sigma = 0$.
Finalement

$$M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \iff \sigma = 0 \text{ et } S = 1.$$

(c) Les nombres a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ si, et seulement si,

$$X^3 - X^2 + k = (X-a)(X-b)(X-c).$$

En identifiant les coefficients, cette identité polynomiale équivaut à la satisfaction du système

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ ab+bc+ca = 0 \\ abc = -k. \end{cases}$$

De plus, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines réelles si, et seulement si, $k \in [0\,;4/27]$. En effet, considérons la fonction $f\colon x \mapsto x^3 - x^2 + k$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = x(3x-2)$.
Compte tenu de ses variations, pour que f s'annule 3 fois il est nécessaire que $f(0) \geq 0$ et $f(2/3) \leq 0$.
Cela fournit les conditions $k \geq 0$ et $k \leq 4/27$.
Inversement, si $k \in [0\,;4/27]$, f admet trois racines réelles (comptées avec multiplicité)
Ainsi, si $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ alors a, b, c sont les racines du polynôme $X^3 - X^2 + k$ avec $k \in [0\,;4/27]$.
Inversement, si $k \in [0\,;4/27]$, le polynôme $X^3 - X^2 + k$ admet trois racines a, b, c vérifiant $\sigma = 0$ et $S = 1$ donc $M \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 55 : [énoncé]
On a

$$\Omega^t\Omega = {}^tA^{-1}A^tAA^{-1}.$$

Or A et ${}^tA$ commutent donc

$$\Omega^t\Omega = {}^tA^{-1t}AAA^{-1} = I_n.$$

Exercice 56 : [énoncé]
Il existe une seule rotation (et non deux) qui envoie u sur v, celle d'angle (u, v).
Reste à déterminer les réflexions qui échangent u et v. Soit s une telle réflexion.
Si $u = v$ alors s est la réflexion par rapport à $\operatorname{Vect}(u)$.
Si $u \neq v$ alors s est la réflexion par rapport à $\operatorname{Vect}(u-v)^{\perp}$.

Exercice 57 : [énoncé]
Si $\sigma \circ r = r \circ \sigma$ alors $r = \sigma \circ r \circ \sigma$ or $\sigma \circ r \circ \sigma = r^{-1}$ donc $r = r^{-1}$. Ainsi, si σ et r commutent alors $r = \mathrm{Id}$ ou $r = \mathrm{Rot}_\pi$. La réciproque est immédiate.

Exercice 58 : [énoncé]
Notons v' le projeté de v sur un plan P contenant u et w.
Orientons P, de sorte que $(u, w) = \theta\ [2\pi]$.
Notons $\alpha' = \operatorname{Ecart}(u, v')$ et $\beta' = \operatorname{Ecart}(v', w)$.
$(u \mid v) = \|u\|\|v\| \cos\alpha$ et $(u \mid v) = (u \mid v') = \|u\|\|v'\| \cos\alpha'$ avec $\|v'\| \leq \|v\|$ donc $\cos\alpha \leq \cos\alpha'$ puis $\alpha' \leq \alpha$.
De même $\beta' \leq \beta$.
Par des considérations d'angles orienté :
$\theta = \alpha' + \beta', \alpha' - \beta', -\alpha' + \beta', -\alpha' - \beta'\ [2\pi]$.
Si $\theta = \alpha' + \beta'\ [2\pi]$ alors $\theta = \alpha' + \beta'$ et $\theta \leq \alpha + \beta$.
Si $\theta = \alpha' - \beta'\ [2\pi]$ alors $\theta = \alpha' - \beta' \leq \alpha' \leq \alpha + \beta$.
Si $\theta = -\alpha' + \beta'\ [2\pi]$: idem.
Si $\theta = -\alpha' - \beta'\ [2\pi]$ alors $\theta = 2\pi - \alpha' - \beta'$ et $\alpha + \beta \geq \alpha' + \beta' \geq \pi \geq \theta$.