Relations binaires

Relations d'équivalence

Exercice 1 [02643] [Correction]
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive.
On définit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par :

$$x\mathcal{S}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \iff (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x).$$

Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalences ?

Exercice 2 [02644] [Correction]
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\wp(E)$ par :

$$X\mathcal{R}Y \iff X \cup A = Y \cup A.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

(b) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \wp(E)$

Exercice 3 [02983] [Correction]
On considère sur $\mathcal{F}(E,E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$f\mathcal{R}g \iff \exists\varphi \in \mathcal{S}(E) \text{ telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g.$$

(a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

(b) Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathcal{F}(E,E)$.

Exercice 4 [02984] [Correction]
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive.
On définit une relation $\mathcal{S}$ par :

$$x\mathcal{S}y \iff x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x.$$

Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 5 [02985] [Correction]
Soit $(G,\times)$ un groupe et H un sous groupe de $(G,\times)$.
On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur G par :

$$x\mathcal{R}y \iff xy^{-1} \in H.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence et en décrire les classes d'équivalence.

Exercice 6 [03243] [Correction]
Soit G un groupe multiplicatif de cardinal p^α avec p premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que

$$Z(G) \neq \{1\}.$$

Exercice 7 [02357] [Correction]
Soit E un ensemble de cardinal n, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et $G = \left\{(x,y) \in E^2 \mid x\mathcal{R}y\right\}$ le graphe de $\mathcal{R}$ supposé de cardinal p. Prouver qu'on a $n^2 \leq kp$.

Calculs en congruence

Exercice 8 [01190] [Correction]
Montrer que $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 9 [01191] [Correction]
Quel est le reste de la division euclidienne de $1234^{4321} + 4321^{1234}$ par 7 ?

Exercice 10 [01192] [Correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(a) $6 \mid 5n^3 + n$

(b) $7 \mid 3^{2n+1} + 2^{n+2}$

(c) $5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$

(d) $11 \mid 3^{8n} \times 5^4 + 5^{6n} \times 7^3$

(e) $9 \mid 4^n - 1 - 3n$

(f) $15^2 \mid 16^n - 1 - 15n$

Exercice 11 [01193] [Correction]
Trouver les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tel que $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$.

Exercice 12 [03679] [Correction]
Montrer que si n est entier impair alors

$$n^2 \equiv 1\ [8]\,.$$

Exercice 13 [03680] [Correction]
Soient $\lambda, a, b \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose λ et m premiers entre eux. Montrer

$$a \equiv b\ [m] \iff \lambda a \equiv \lambda b\ [m]\,.$$

Exercice 14 [02359] [Correction]
Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444}, B celle de A et enfin C celle de B. Que vaut C ?

Relations d'ordre

Exercice 15 [01518] [Correction]
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 16 [01519] [Correction]
Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x \le y\right\}$ par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \iff (x,y) = (x',y') \text{ ou } y \le x'.$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 17 [01520] [Correction]
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \mathrm{Im}(z) \ge 0\right\}$ par :

$$z \preccurlyeq z' \iff |z| < |z'| \text{ ou } \big(|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \le \mathrm{Re}(z')\big).$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 18 [01521] [Correction]
Soit E l'ensemble des couples (I,f) formé d'un intervalle I et d'une fonction réelle définie sur I.
On définit une relation $\preccurlyeq$ sur E par : $(I,f) \preccurlyeq (J,g) \iff I \subset J$ et $g|_I = f$.
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 19 [01523] [Correction]
Soient A, B deux parties d'un ensemble E ordonné par $\preccurlyeq$.
On suppose que A et B ont chacun un plus grand élément.
Qu'en est-il de $A \cup B$ lorsque l'ordre est total ? lorsqu'il ne l'est pas ?
Que dire de $A \cap B$?

Exercice 20 [01524] [Correction]
Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné tel que toute partie non vide admet un plus petit élément et un plus grand élément.
Montrer que E est fini.

Exercice 21 [01525] [Correction]
Soit E un ensemble ordonné par une relation $\le$.
Un tableau à n lignes et p colonnes est formé d'éléments $a_{i,j} \in E$ avec i indice de ligne$(1 \le i \le n)$ et j indice de colonne$(1 \le j \le p)$.
On note le plus petit élément de chaque colonne et l'on prend le plus grand de ces plus petits :

$$\max_{1 \le j \le p} \big(\min_{1 \le i \le n} a_{i,j} \big).$$

On note aussi le plus grand élément de chaque ligne et l'on prend le plus petit de ces plus grands :

$$\min_{1 \le i \le n} \big(\max_{1 \le j \le p} a_{i,j} \big).$$

(a) Comparer ces deux nombres.

(b) Donner un exemple de non égalité.

Exercice 22 [02055] [Correction]
Montrer qu'il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

Supremum et infimum

Exercice 23 [02107] [Correction]
Soit
$$A = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n+1} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}.$$
Montrer que A est bornée, déterminer $\inf A$ et $\sup A$.

Exercice 24 [02108] [Correction]
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Comparer $\inf A, \sup A, \inf B$ et $\sup B$.

Exercice 25 [02110] [Correction]
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Montrer que $\sup A, \sup B$ et $\sup(A \cup B)$ existent et
$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B).$$

Exercice 26 [02113] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1-x)$. Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in[0;1]} f_n(x).$$

Exercice 27 [00225] [Correction]
Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. On pose
$$m = \inf A \text{ et } B = A \cap \left]-\infty\,;m+1\right].$$
Déterminer la borne inférieure de B.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont clairement réflexives et symétriques.
Soient $x, y, z \in E$.
Supposons $x\mathcal{S}y$ et $y\mathcal{S}z$.
On a alors $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ donc $x\mathcal{R}z$ et aussi $y\mathcal{R}x$ et $z\mathcal{R}y$ donc $z\mathcal{R}x$ puis $x\mathcal{S}z$.
Le raisonnement n'est plus valable avec $\mathcal{T}$ et on peut présumer que $\mathcal{T}$ ne sera pas une relation d'équivalence.
Prenons pour $\mathcal{R}$ la relation divise définie sur $\mathbb{N}^*$. On a $2 \mid 6$ et $3 \mid 6$ donc $2\mathcal{T}6$ et $6\mathcal{T}3$ or $2 \not\mathcal{T} 3$.
Ici la relation $\mathcal{T}$ n'est pas transitive.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) La relation étudiée est évidemment réflexive, symétrique et transitive.

(b) $Y \in Cl(X) \iff Y \cup A = X \cup A$.
Soit $Y \in Cl(X)$. On a $Y \cup A = X \cup A$
$\forall x \in Y \setminus A$ on a $x \in Y \cup A = X \cup A$ et $x \notin A$ donc $x \in X \setminus A$. Ainsi $Y \setminus A \subset X \setminus A$ et inversement $X \setminus A \subset Y \setminus A$ donc $X \setminus A = Y \setminus A$.
Puisque $Y = (Y \setminus A) \cup (Y \cap A)$ on a $Y = (X \setminus A) \cup B$ avec $B \in \wp(A)$.
Inversement soit $Y = (X \setminus A) \cup B$ avec $B \in \wp(A)$.
On a $Y \cup A = (X \setminus A) \cup (B \cup A) = (X \cap \overline{A}) \cup A = X \cup A$.
Finalement $Cl(X) = \left\{(X \setminus A) \cup B \,\middle|\, B \in \wp(A)\right\}$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f$ donc $f\mathcal{R}f$.
Si $f\mathcal{R}g$ alors il existe $\varphi \in \mathcal{S}(E)$ telle que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ mais alors $g \circ \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \circ f$ donc $g\mathcal{R}f$.
Si $f\mathcal{R}g$ et $g\mathcal{R}h$ alors il existe $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(E)$ telles que $f \circ \varphi = \varphi \circ g$ et $g \circ \psi = \psi \circ h$ donc $f \circ \theta = \theta \circ h$ avec $\theta = \varphi \circ \psi \in \mathcal{S}(E)$. Ainsi $f\mathcal{R}h$.

(b)
$$g \in Cl(f) \iff \exists \varphi \in \mathcal{S}(E), g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi.$$
Finalement
$$Cl(f) = \left\{\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \,\middle|\, \varphi \in \mathcal{S}(E)\right\}.$$

Exercice 4 : [énoncé]
$\mathcal{S}$ est réflexive, symétrique et transitive sans difficultés.
On définit $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y) \iff x\mathcal{R}y$. La relation $\preccurlyeq$ est bien définie, réflexive transitive.
Si $Cl(x) \preccurlyeq Cl(y)$ et $Cl(y) \preccurlyeq Cl(x)$ alors $x\mathcal{S}y$ donc $Cl(x) = Cl(y)$.

Exercice 5 : [énoncé]
Soit $x \in G$. On a $x\mathcal{R}x$ car $xx^{-1} = 1 \in H$.
Soient $x, y \in G$. Si $x\mathcal{R}y$ alors $xy^{-1} \in H$ et donc $yx^{-1} \in H$ d'où $y\mathcal{R}x$.
Soient $x, y, z \in G$. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $xy^{-1} \in H$ et $yz^{-1} \in H$ donc $xz^{-1} \in H$ d'où $x\mathcal{R}z$.
Finalement $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
Soit $a \in G$.
$$x \in Cl(a) \iff x\mathcal{R}a \iff xa^{-1} \in H$$
donc
$$Cl(a) = Ha = \{ha \mid h \in H\}.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Considérons la relation binaire $\mathcal{R}$ sur G définie par
$$y_1\mathcal{R}y_2 \iff \exists x \in G, xy_1 = y_2x.$$
Il est immédiat de vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur G. Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ forment donc une partition de G ce qui permet d'affirmer que le cardinal de G est la somme des cardinaux des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.
Une classe d'équivalence d'un élément y est réduite à un singleton si, et seulement si,
$$\forall x \in G, xy = yx.$$
i.e.
$$y \in Z(G).$$
En dénombrant G en fonction des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ et en isolant parmi celles-ci celles qui sont réduites à un singleton on a
$$\operatorname{Card} G = \operatorname{Card} Z(G) + N$$
avec N la somme des cardinaux des classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ qui ne sont pas réduites à un singleton.
Pour poursuivre, montrons maintenant que le cardinal d'une classe d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$ divise le cardinal de G.

Considérons une classe d'équivalence $\{y_1, \dots, y_n\}$ pour la relation $\mathcal{R}$ et notons

$$H_i = \{x \in G \mid xy_1 = y_i x\}.$$

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, puisque $y_1 \mathcal{R} y_i$, il existe $x_i \in G$ tel que

$$x_i y_1 = y_i x_i.$$

Considérons alors l'application $\varphi\colon H_1 \to H_i$ définie par

$$\varphi(x) = x_i x.$$

On vérifie que cette application est bien définie et qu'elle est bijective.
On en déduit

$$\operatorname{Card} H_1 = \ldots = \operatorname{Card} H_n = m$$

et puisque G est la réunion disjointes des $H_1, \dots, H_n$

$$\operatorname{Card} G = mn = p^\alpha.$$

Ainsi toutes les classes d'équivalences qui ne sont pas réduites à 1 élément ont un cardinal multiple de p et donc $p \mid N$.
Puisque p divise $\operatorname{Card} G = \operatorname{Card} Z(G) + N$, on a

$$p \mid \operatorname{Card} Z(G).$$

Sachant $Z(G) \neq \emptyset$ (car $1 \in Z(G)$) on peut affirmer

$$\operatorname{Card} Z(G) \geq p.$$

Exercice 7 : [énoncé]
Notons $n_1, \dots, n_k$ les cardinaux respectifs des k classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. D'une part $n = n_1 + \dots + n_k$, d'autre part $p = n_1^2 + \dots + n_k^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(n_1 + \dots + n_k)^2 \leq k(n_1^2 + \dots + n_k^2)$.

Exercice 8 : [énoncé]
$2^5 = -1$ [11] donc $2^{10} = 1$ [11] puis $2^{123} = 2^{120} \times 2^3 = (2^{10})^{12} \times 8 = 1 \times 8 = 8$ [11].
$3^5 = 1$ [11] donc $3^{121} = 3^{120} \times 3 = (3^5)^{24} \times 3 = 1 \times 3 = 3$ [11].
Ainsi $2^{123} + 3^{121} = 8 + 3 = 0$ [11] et donc $11 \mid 2^{123} + 3^{121}$.

Exercice 9 : [énoncé]
$1234 = 2$ [7] et $2^3 = 1$ [7] donc $1234^{4321} = 2^{4321} = 2^{4320} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ [7].
$4321 = 2$ [7] donc $4321^{1234} = 2^{1234} = 2^{1233} \times 2 = 1 \times 2 = 2$ [7].
Par suite $1234^{4321} + 4321^{1234} = 2 + 2 = 4$ [7]. Le reste cherché est 4.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) Pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ on a $n^3 = n$ [6] donc $5n^3 + n = 6n = 0$ [6].

(b) $3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3.(3^2)^n + 4.2^n = 3.2^n + 4.2^n = 7.2^n = 0$ [7].

(c) $2^{2n+1} + 3^{2n+1} = 2.(2^2)^n + 3.(3^2)^n = 2.4^n + 3.4^n = 5.4^n = 0$ [5].

(d) $3^{8n} \times 5^4 + 5^{6n} \times 7^3 = 5^n \times 9 + 5^n \times 2 = 11 \times 5^n = 0$ [11].

(e) $4^n - 1 - 3n = (4-1)(1 + 4 + \dots + 4^{n-1}) - 3n = 3(1 + 4 + \dots + 4^{n-1} - n)$ or $1 + 4 + \dots + 4^{n-1} - n = 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$ [3] donc $9 \mid 4^n - 1 - 3n$.

(f) $16^n - 1 - 15n = (16-1)(1 + 16 + \dots + 16^{n-1}) - 15n = 15(1 + 16 + \dots + 16^{n-1} - n)$ or $1 + 16 + \dots + 16^{n-1} - n = 1 + \dots + 1 - n = n - n = 0$ [15] donc $15^2 \mid 16^n - 1 - 15n$.

Exercice 11 : [énoncé]
On a

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2$	0	1	8	1	0	5	6	3	6	5

donc $10 \mid n^2 + (n+1)^2 + (n+3)^2 \iff n = 0$ ou 4 [10].

Exercice 12 : [énoncé]
On peut écrire $n = 2p + 1$ et alors

$$n^2 = (2p+1)^2 = 4p(p+1) + 1.$$

Puisque l'un des facteurs de $p(p+1)$ est pair, le produit $4p(p+1)$ est multiple de 8 et donc

$$4p(p+1) + 1 \equiv 1\ [8]\,.$$

Exercice 13 : [énoncé]
$(\implies)$ Si $a \equiv b$ $[m]$ alors m divise $b - a$ et divise *a fortiori* $\lambda b - \lambda a = \lambda(b - a)$.
$(\impliedby)$ Si $\lambda a \equiv \lambda b$ $[m]$ alors m divise $\lambda(b - a)$. Or m et λ sont supposés premiers entre eux donc, en vertu du théorème de Gauss, m divise $b - a$.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons $x = 4444^{4444}$, $4444 = 7\ [9]$, $7^3 = 1\ [9]$ donc $4444^{4444} = 7\ [9]$.
$x < 10^{5\times 4444}$ donc $A \leq 9 \times 5 \times 4444 = 199980$, $B \leq 9 \times 5 + 1 = 46$ puis $C \leq 4 + 9 = 13$.
Or $C = B = A = x\ [9]$ donc $C = 7$

Exercice 15 : [énoncé]
Soit $x > 0$, on a $x = x^n$ pour $n = 1 \in \mathbb{N}$ donc $x \preccurlyeq x$. La relation $\preccurlyeq$ est réflexive.
Soient $x, y > 0$, si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$ alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^n$ et $x = y^m$.
On a alors $x = x^{nm}$ donc $\ln x = nm \ln x$
Si $x = 1$ alors $y = x^n = 1 = x$.
Si $x \neq 1$ alors $\ln x \neq 0$ puis $1 = nm$. Or $n, m \in \mathbb{N}$ donc $n = m = 1$ puis $x = y$.
Finalement la relation $\preccurlyeq$ est antisymétrique.
Soient $x, y, z > 0$. Si $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$ alors $\exists n, m \in \mathbb{N}$ tels que $y = x^n$ et $z = y^m$.
On a $z = x^{mn}$ avec $mn \in \mathbb{N}$ donc $x \preccurlyeq z$. La relation $\preccurlyeq$ est transitive.
Finalement $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.
Cet ordre n'est pas total car, par exemple, 2 et 3 ne sont pas comparables.

Exercice 16 : [énoncé]
$\preccurlyeq$ est clairement réflexive et transitive.
Si $(x, y) \preccurlyeq (x', y')$ et $(x', y') \preccurlyeq (x, y)$ alors $(x, y) = (x', y')$ ou $x \leq y \leq x' \leq y' \leq x$ et donc $(x, y) = (x, x) = (x', y')$.

Exercice 17 : [énoncé]
$\preccurlyeq$ est clairement réflexive.
Si $z \preccurlyeq z'$ et $z' \preccurlyeq z$ alors nécessairement $|z| = |z'|$ et $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z')$ donc $z = z'$ car $\mathrm{Im}(z), \mathrm{Im}(z') \geq 0$.
Si $z \preccurlyeq z'$ et $z' \preccurlyeq z''$ alors si $|z| < |z''|$ alors $z \preccurlyeq z''$ et sinon $|z| = |z'| = |z''|$ et donc $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z') \leq \mathrm{Re}(z'')$ ce qui permet à nouveau d'affirmer $z \preccurlyeq z''$.
Pour $z, z' \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$.
Si $|z| < |z'|$ alors $z \preccurlyeq z'$
Si $|z| > |z'|$ alors $z' \preccurlyeq z$.
Si $|z| = |z'|$ alors dans le cas où $\mathrm{Re}(z) \leq \mathrm{Re}(z')$ on a $z \preccurlyeq z'$ et, dans le cas complémentaire, on a $z' \preccurlyeq z$.
Dans tout les cas z et z' sont comparables, la relation d'ordre est totale.

Exercice 18 : [énoncé]
La relation est clairement réflexive.
Si $(I, f) \preccurlyeq (J, g)$ et $(J, g) \preccurlyeq (I, f)$ alors $I \subset J$, $J \subset I$ et $g|_I = f$ donc $I = J$ et $f = g$.
Si $(I, f) \preccurlyeq (J, g)$ et $(J, g) \preccurlyeq (K, h)$ alors $I \subset J \subset K$ et $h_{\restriction I} = (h|_J)|_I = g|_I = f$ donc $(I, f) \preccurlyeq (K, h)$.
Finalement $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

Exercice 19 : [énoncé]
Si l'ordre est total $A \cup B$ possède un plus grand élément :
$\max(A \cup B) = \max(\max(A), \max(B))$.
Si l'ordre n'est pas total, les plus grands éléments de A et de B peuvent ne pas être comparés aux éléments de A et B. Dans $(\mathbb{N}^*, |)$, pour $A = \{2, 4\}$ et $B = \{3, 9\}$, A et B ont un plus grand élément alors que $A \cup B$ n'en a pas.
$A \cap B$ peut ne pas posséder de plus grand élément, cet ensemble peut notamment être vide.

Exercice 20 : [énoncé]
Par l'absurde supposons E infini.
Posons $x_0 = \min E$, $x_1 = \min E \setminus \{x_0\}, \dots, x_n = \min E \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}\}, \dots$
L'ensemble $\{x_0, \dots, x_n, \dots\}$ n'a pas de plus grand élément. Absurde.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Pour tout $1 \leq m \leq p$,
$$a_{i,m} \leq \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$
donc
$$\min_{1 \leq i \leq n} a_{i,m} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}$$
puis
$$\max_{1 \leq m \leq p} \min_{1 \leq i \leq n} a_{i,m} \leq \min_{1 \leq i \leq n} \max_{1 \leq j \leq p} a_{i,j}.$$

(b) Pour le tableau $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
$$\max_{1 \leq j \leq 2} \min_{1 \leq i \leq 2} a_{i,j} = 2 \text{ et } \min_{1 \leq i \leq 2} \max_{1 \leq j \leq 2} a_{i,j} = 3.$$

Exercice 22 : [énoncé]
Par l'absurde, supposons que (u_n) soit une telle suite.
$A = \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$, elle possède donc un plus petit élément m.
Puisque $m \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $m = u_n$. Mais alors
$u_{n+1} < u_n \leq m = \min A$. Absurde.

Exercice 23 : [énoncé]
$\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1} \leq 2$ donc A est bornée.
A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée donc $\inf A$ et $\sup A$ existent.

n	0	1	2	3	$\dots$
$(-1)^n + \frac{1}{n+1}$	2	$-1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{3}$	$-1+\frac{1}{4}$	$\dots$

2 est plus grand élément de A et donc $\sup A = \max A = 2$.
A est clairement minorée par -1 et $(-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+2} \to -1$ donc il existe une suite d'éléments de A qui converge vers -1 donc $\inf A = -1$.

Exercice 24 : [énoncé]
A et B sont des parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ donc les bornes sup et inf considérées existent.
Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $a \leq \sup B$. $\sup B$ majore A donc $\sup A \leq \sup B$.
Pour tout $a \in A$, on a $a \in B$ donc $\inf B \leq a$. $\inf B$ minore A donc $\inf B \leq \inf A$.
Enfin, puisque $A \neq \emptyset$, $\inf A \leq \sup A$.

Exercice 25 : [énoncé]
$A, B, A \cup B$ sont des parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées donc
$\sup A, \sup B, \sup(A \cup B)$ existent dans $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in A \cup B$ on a $x \leq \max(\sup A, \sup B)$ donc

$$\sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B).$$

Puisque $A, B \subset A \cup B$ on a $\sup A, \sup B \leq \sup(A \cup B)$ donc

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$$

puis l'égalité.

Exercice 26 : [énoncé]
La fonction f_n est dérivable avec

$$f_n'(x) = nx^{n-1}(1-x) - x^n = nx^{n-1} - (n+1)x^n.$$

On en déduit les variations

x	0		x_n		1
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

avec $x_n = \frac{n}{n+1} \in [0\,;1]$ et

$$M_n = \sup_{x \in [0;1]} f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \to 0.$$

Exercice 27 : [énoncé]
Puisque $m+1$ ne minore pas A, la partie B est non vide.
De plus $B \subset A$ donc la borne inférieure de B existe et

$$\inf A \leq \inf B.$$

Soit $x \in A$, si $x \leq m+1$ alors $x \in B$ et donc $x \geq \inf B$.
Si $x > m+1$ alors à nouveau $x \geq \inf B$.
Ainsi $\inf B$ minore A et donc

$$\inf A \geq \inf B.$$

Finalement

$$\inf A = \inf B.$$