

# Équations différentielles linéaires

## Résolution d'équations d'ordre 1

### Exercice 1 [01541] [Correction]

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

- (a)  $y' + 2y = x^2$  (c)  $y' - y = (x + 1)e^x$   
 (b)  $y' + y = 2 \sin x$  (d)  $y' + y = x - e^x + \cos x$

### Exercice 2 [01543] [Correction]

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Résoudre sur  $I = \mathbb{R}_+^*$  ou  $\mathbb{R}_-^*$  l'équation différentielle

$$xy' - \alpha y = 0.$$

### Exercice 3 [01542] [Correction]

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations différentielles suivantes :

- (a)  $(x^2 + 1)y' + 2xy + 1 = 0$  (c)  $(x^2 + 1)^2 y' + 2x(x^2 + 1)y = 1$   
 (b)  $(x^2 + 1)y' - xy = (x^2 + 1)^{3/2}$

### Exercice 4 [01280] [Correction]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

- (a)  $(1 + e^x)y' + e^x y = (1 + e^x)$  sur  $\mathbb{R}$   
 (b)  $(e^x - 1)y' + e^x y = 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ ,  
 (c)  $x(1 + \ln^2(x))y' + 2 \ln(x)y = 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$

### Exercice 5 [01281] [Correction]

Résoudre sur  $] -1; 1[$  l'équation différentielle suivante

$$\sqrt{1 - x^2} y' + y = 1.$$

### Exercice 6 [01379] [Correction]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

- (a)  $(2 + \cos x)y' + \sin(x)y = (2 + \cos x) \sin x$  sur  $\mathbb{R}$   
 (b)  $(1 + \cos^2 x)y' - \sin 2x \cdot y = \cos x$  sur  $\mathbb{R}$   
 (c)  $y' \sin x - y \cos x + 1 = 0$  sur  $]0; \pi[$ ,  
 (d)  $(\sin x)^3 y' = 2(\cos x)y$  sur  $]0; \pi[$ .

### Exercice 7 [01434] [Correction]

Résoudre les équations différentielles suivantes sur les intervalles précisés

- (a)  $\operatorname{ch} x \cdot y' - \operatorname{sh} x \cdot y = \operatorname{sh}^3 x$  sur  $\mathbb{R}$   
 (b)  $y' - \frac{\operatorname{sh} x}{1 + \operatorname{ch} x} y = \operatorname{sh} x$  sur  $\mathbb{R}$   
 (c)  $\operatorname{sh}(x)y' - \operatorname{ch}(x)y = 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ ,

## Résolution d'équations d'ordre 2

### Exercice 8 [01550] [Correction]

Soient  $\omega$  et  $\omega_0$  deux réels strictement positifs et distincts.

Trouver les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x)$$

vérifiant les conditions initiales  $y(0) = 1$  et  $y'(0) = 0$ .

### Exercice 9 [03849] [Correction]

Déterminer les solutions réelles de l'équation

$$(E): y'' - 3y' + 2y = \sin(2x).$$

## Problèmes se ramenant à la résolution d'une équation différentielle

### Exercice 10 [01546] [Correction]

Déterminer les fonctions  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall x \in [0; 1], f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

**Exercice 11** [01552] [[Correction](#)]

Trouver toutes les applications  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(-x) = e^x.$$

**Exercice 12** [03197] [[Correction](#)]

Déterminer les fonctions réelles  $f$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(2 - x).$$

**Exercice 13** [00379] [[Correction](#)]

Trouver toutes les applications  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivables en 0 telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = e^x f(y) + e^y f(x).$$

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

$$(a) y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + Ce^{-2x}.$$

$$(b) y(x) = -\cos x + \sin x + Ce^{-x}.$$

$$(c) y(x) = (x^2/2 + x)e^x + Ce^x.$$

$$(d) y(x) = x - 1 - \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + Ce^{-x}.$$

### Exercice 2 : [énoncé]

Sur  $I$ ,

$$xy' - \alpha y = 0 \iff y' = \frac{\alpha}{x}y.$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène.

$$\int \frac{\alpha}{x} dx = \alpha \ln|x|$$

donc la solution générale de l'équation étudiée est

$$y(x) = C|x|^\alpha.$$

### Exercice 3 : [énoncé]

$$(a) y(x) = \frac{C-x}{1+x^2}$$

$$(b) y(x) = \sqrt{1+x^2}(C+x)$$

$$(c) y(x) = \frac{C+\arctan x}{1+x^2}$$

### Exercice 4 : [énoncé]

$$(a) y(x) = \frac{C+x+e^x}{1+e^x}$$

$$(b) y(x) = \frac{C+x}{e^x-1}$$

$$(c) y(x) = \frac{C+\ln x}{(1+\ln^2 x)}$$

### Exercice 5 : [énoncé]

On obtient la solution générale

$$y(x) = 1 + Ce^{\arccos x}$$

ou encore, et c'est équivalent

$$y(x) = 1 + C'e^{-\arcsin x}.$$

### Exercice 6 : [énoncé]

$$(a) y(x) = (2 + \cos x)(C - \ln(2 + \cos x))$$

$$(b) y(x) = \frac{C+\sin x}{1+\cos^2 x}$$

$$(c) y(x) = C \sin x + \cos x$$

$$(d) y(x) = Ce^{-1/\sin^2 x}$$

### Exercice 7 : [énoncé]

$$(a) y(x) = \operatorname{ch}^2 x + 1 + C \operatorname{ch} x$$

$$(b) y(x) = (\ln(1 + \operatorname{ch} x) + C)(1 + \operatorname{ch} x)$$

$$(c) y(x) = C \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$$

### Exercice 8 : [énoncé]

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. L'équation homogène associée a pour équation caractéristique  $r^2 + \omega^2 = 0$  de racines  $\pm i\omega$ .

La solution générale homogène est donc  $y(x) = \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x)$

En introduisant l'équation complexe

$$z'' + \omega^2 z = e^{i\omega_0 x}$$

et en considérant la partie réelle d'une solution particulière de celle-ci, on peut exprimer la solution générale

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x).$$

Les conditions initiales déterminent  $\lambda$  et  $\mu$

$$y(x) = \frac{\cos(\omega_0 x) - \cos(\omega x)}{\omega^2 - \omega_0^2} + \cos(\omega x).$$

### Exercice 9 : [énoncé]

(E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique

$$r^2 - 3r + 2 = 0$$

de racines 1 et 2

Solution générale homogène :

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

Cherchons une solution particulière à l'équation

$$z'' - 3z' + 2z = e^{2ix}$$

de la forme  $z(x) = \lambda e^{2ix}$ . On est amené à résoudre

$$(-2 - 6i)\lambda e^{2ix} = e^{2ix}.$$

On obtient

$$z(x) = \frac{3i - 1}{20} e^{2ix}$$

et l'on peut donc proposer la solution particulière

$$y(x) = \frac{3}{20} \cos(2x) - \frac{1}{20} \sin(2x).$$

La solution générale de (E) est alors

$$y(x) = \lambda e^x + \mu e^{2x} + \frac{3}{20} \cos(2x) - \frac{1}{20} \sin(2x) \text{ avec } \lambda, \mu \text{ parcourant } \mathbb{R}.$$

### Exercice 10 : [énoncé]

Supposons  $f$  solution.

$f$  est solution d'une équation différentielle de la forme  $y' + y + \lambda = 0$  et donc

$$f(x) = C e^{-x} - \lambda.$$

De plus, une fonction de cette forme est solution de l'équation étudiée si, et seulement si,

$$\int_0^1 f(t) dt = \frac{C(e-1)}{e} - \lambda$$

et donc une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\frac{C(e-1)}{e} - \lambda = \lambda$$

d'où

$$\lambda = \frac{C(e-1)}{2e}.$$

Finalement, les solutions sont les fonctions données par

$$\forall x \in [0; 1], f(x) = C e^{-x} - \frac{C(e-1)}{2e}.$$

### Exercice 11 : [énoncé]

Analyse : Supposons  $f$  est solution. On a

$$f'(x) = e^x - f(-x).$$

La fonction  $f'$  est dérivable et

$$f''(x) = e^x + f'(-x) = e^x + e^{-x} - f(x).$$

La fonction  $f$  est donc de l'équation différentielle  $y'' + y = 2 \operatorname{ch} x$

Après résolution

$$f(x) = \operatorname{ch} x + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Synthèse : Une telle fonction est solution du problème si, et seulement si,

$$\operatorname{sh} x - C_1 \sin x + C_2 \cos x + \operatorname{ch} x + C_1 \cos x - C_2 \sin x = e^x.$$

Ce qui donne  $C_1 + C_2 = 0$ .

Finalement les solutions du problème posé sont

$$f(x) = \operatorname{ch} x + C(\cos x - \sin x).$$

### Exercice 12 : [énoncé]

Soit  $f$  une fonction solution (s'il en existe).

La dérivée de  $f$  apparaît dérivable et donc  $f$  est deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -f'(2-x) = -f(x).$$

Ainsi  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y'' + y = 0$ . C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constant de solution générale

$$y(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

En injectant dans l'équation étudiée, une telle fonction est solution si, et seulement si,

$$\begin{cases} -\lambda = \lambda \sin 2 - \mu \cos 2 \\ \mu = \lambda \cos 2 + \mu \sin 2 \end{cases}$$

ce qui après résolution équivaut à l'équation

$$(1 + \sin 2)\lambda = (\cos 2)\mu.$$

En écrivant  $\lambda = (\cos 2)\alpha$ , on a  $\mu = (1 + \sin 2)\alpha$  et la solution générale de l'équation étudiée est de la forme

$$f(x) = \alpha(\sin x + \cos(2-x)) \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 13 :** [\[énoncé\]](#)

Soit  $f$  une solution.

Pour  $x = y = 0$  on obtient  $f(0) = 0$ .

De plus

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{e^x f(h) + e^h f(x) - f(x)}{h} = e^x \frac{f(h) - f(0)}{h} + \frac{e^h - 1}{h} f(x)$$

donc

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} e^x f'(0) + f(x).$$

Par suite  $f$  est dérivable en  $x$  et  $f'(x) = f'(0)e^x + f(x)$ .

La fonction  $f$  est alors solution d'une équation différentielle de la forme

$y' = y + Ce^x$  vérifiant la condition initiale  $y(0) = 0$ .

Après résolution, on obtient

$$f(x) = Cxe^x.$$

Inversement, de telles fonctions sont solutions.