Calculs algébriques

Équations et systèmes

Exercice 1 [02116] [Correction]
Observer que

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

est solution d'une équation de la forme $x^3 = \alpha x + \beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Résoudre cette dernière et déterminer x.

Exercice 2 [02117] [Correction]
Résoudre les systèmes d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

(a) $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 1 \\ x^2 + xy = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy = 1 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$

Exercice 3 [02118] [Correction]
Résoudre les systèmes suivants d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

(a) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + z = 2 \\ xyz = 0 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ x - y + 2z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 3z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \end{cases}$

Exercice 4 [02119] [Correction]
Résoudre le système

$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases}$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, a désignant un paramètre réel.

Exercice 5 [02115] [Correction]
Résoudre les équations suivantes d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

(a) $x = 2x - 1\ [1]$ (b) $3x = 2 - x\ [\pi]$ (c) $nx = 0\ [\pi]$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$)

Exercice 6 [05019] [Correction]
Soient a un réel non nul. Déterminer les triplets (x, y, z) de réels non nuls vérifiant :

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{a}. \end{cases}$$

Sommes

Exercice 7 [02062] [Correction]
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

(a) $\sum_{i=1}^n \alpha + a_i = \alpha + \sum_{i=1}^n a_i$
(b) $\sum_{i=1}^n a_i + b_i = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i$
(c) $\sum_{i=1}^n \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^n a_i$
(d) $\sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i$
(e) $\sum_{i=1}^n a_i^\alpha = \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^\alpha$
(f) $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{i,j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}$?

Exercice 8 [02063] [Correction]
Établir l'une des trois formules suivantes :

(a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$
(b) $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
(c) $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Exercice 9 [02064] [Correction]
À partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^n k$ et $\sum_{k=1}^n k^2$, calculer :

(a) $\sum_{k=1}^n k(k+1)$
(b) $1.n + 2.(n-1) + \cdots + (n-1).2 + n.1$.

Exercice 10 [02065] [Correction]
Calculer
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k.$$

Exercice 11 [02066] [Correction]
Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$ est strictement croissante.

Exercice 12 [02067] [Correction]
Montrer
$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!$$

Exercice 13 [02068] [Correction]
Calculer
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$$

Exercice 14 [02069] [Correction]

(a) Calculer
$$\sum_{k=1}^{p} kk!.$$

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $n \in [\![0, (p+1)! - 1]\!]$, il existe un uplet $(n_0, n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tel que
$$\forall k \in [\![0\,; p]\!], 0 \leq n_k \leq k \text{ et } n = \sum_{k=0}^{p} n_k k!.$$

(c) Justifier l'unicité d'une telle suite.

Exercice 15 [05012] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer
$$\sum_{k=0}^{n} \left|\cos(kx)\right| \geq \frac{2n+5}{8}.$$

Sommes géométriques

Exercice 16 [02070] [Correction]
Calculer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}$.

Exercice 17 [02071] [Correction]
Calculer, pour tout $q \in \mathbb{C}$, la somme $\sum_{k=0}^{n} q^{2k}$.

Exercice 18 [02053] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre, lorsqu'elle a un sens, l'équation :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k x} = 0.$$

Sommes doubles

Exercice 19 [02073] [Correction]
À partir des valeurs connues de $\sum_{k=1}^{n} k$, $\sum_{k=1}^{n} k^2$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$, calculer :

(a) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} (i+j)^2$

(b) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

(c) $\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$

Exercice 20 [02074] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $C_n = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (p+q)$ en remarquant
$$\sum_{1 \leq p,q \leq n} p + q = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p.$$

Produits

Exercice 21 [02075] [Correction]
Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies :

(a) $\prod_{i=1}^{n} \alpha a_i = \alpha \prod_{i=1}^{n} a_i$ b) $\prod_{i=1}^{n} a_i b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i \prod_{i=1}^{n} b_i$ c) $\prod_{i=1}^{n} a_i + b_i = \prod_{i=1}^{n} a_i + \prod_{i=1}^{n} b_i$?

Exercice 22 [02076] [Correction]
Calculer
$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

Exercice 23 [02077] [Correction]
On désire calculer le produit
$$P(x)=\prod_{0\leq k\leq n}\cos(2^k x)$$
pour tout $x\in\mathbb{R}$.

(a) Commencer par traiter le cas $x\equiv 0\ [\pi]$.

(b) Pour $x\not\equiv 0\ [\pi]$, simplifier $\sin(x)P(x)$ et exprimer $P(x)$.

Exercice 24 [03498] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, simplifier
$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}.$$

Nombres factoriels

Exercice 25 [02079] [Correction]
Exprimer $2\times 4\times\cdots\times(2n)$ puis $1\times 3\times\cdots\times(2n+1)$ à l'aide de factoriels

Formule du binôme

Exercice 26 [02082] [Correction]
Calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

(a) $S_0=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$

(b) $S_1=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$

(c) $S_2=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$

Exercice 27 [02084] [Correction]
Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}j^p.$$
En déduire
$$A=\sum_{k=0}^{\lfloor n/3\rfloor}\binom{n}{3k}, B=\sum_{k=0}^{\lfloor (n-1)/3\rfloor}\binom{n}{3k+1}\text{ et }C=\sum_{k=0}^{\lfloor (n-2)/3\rfloor}\binom{n}{3k+2}.$$

Exercice 28 [02088] [Correction]
Développer $(a+b+c)^n$.

Exercice 29 [02089] [Correction]

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}.$$

(b) Soient $k,\ell,n\in\mathbb{N}$ tels que $\ell\leq k\leq n$. Comparer
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}\text{ et }\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

(c) Soit (x_n) une suite de réels. On pose
$$\forall k\in\mathbb{N}, y_k=\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k}{\ell}x_\ell.$$
Montrer que
$$\forall n\in\mathbb{N}, x_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k.$$

Coefficients binomiaux

Exercice 30 [02087] [Correction]
Calculer pour $n,p\in\mathbb{N}^*$, la somme
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right).$$

Exercice 31 [02090] [Correction]
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 32 [03682] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$.

(a) On suppose que n est premier. Montrer

$$\forall k \in \{2, \dots, n-1\}, n \text{ divise } \binom{n}{k}.$$

(b) Inversement, on suppose que n est composé. Montrer

$$\exists k \in \{2, \dots, n-1\}, n \text{ ne divise pas } \binom{n}{k}.$$

Exercice 33 [03688] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Justifier

$$\forall 1 \leq k \leq n, \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k} \binom{n}{k-1}.$$

(b) En déduire que pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq n/2$

$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k}$$

et pour tout entier k vérifiant $n/2 \leq k \leq n-1$

$$\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}.$$

(c) Comment interpréter simplement les inégalités qui viennent d'être obtenues ?

Exercice 34 [03689] [Correction]
Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{2n}{n} \geq \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On remarque
$$x^3 = 6x + 40$$
4 est solution apparente de cette équation.
$$x^3 - 6x - 40 = (x-4)(x^2 + 4x + 10).$$
Les solutions de l'équation sont $4, -2 + i\sqrt{6}, -2 - i\sqrt{6}$. Le nombre x correspond à la seule solution réelle donc $x = 4$.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Si (x, y) est solution alors (2) $\implies x(x + y) = 0$ donc $x = 0$ ou $y = -x$.
Si $x = 0$ alors (1) donne $y = \pm 1/\sqrt{2}$.
Si $y = -x$ alors (1) donne $x = \pm 1/\sqrt{3}$.
Inversement : ok
Finalement :
$$\mathcal{S} = \left\{(0, 1/\sqrt{2}), (0, -1/\sqrt{2}), (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\right\}.$$

(b) Si (x, y) est solution alors $(1) - (2)$ donne $(x - y)^2 = 0$ d'où $x = y$ puis (1) donne $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Inversement : ok. Finalement
$$\mathcal{S} = \left\{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\right\}.$$

(c) Si (x, y) est solution alors (1) et (2) donnent $x^4 = x$ d'où $x = 0$ ou $x = 1$.
Si $x = 0$ alors $y = 0$. Si $x = 1$ alors $y = 1$.
Inversement : ok. Finalement,
$$\mathcal{S} = \left\{(0, 0), (1, 1)\right\}.$$

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Si (x, y, z) est solution alors (3) donne $x = 0, y = 0$ ou $z = 0$.
Si $x = 0$ alors $y = 3, z = 5$. Si $y = 0$ alors $x = \frac{3}{2}, z = \frac{1}{2}$. Si $z = 0$ alors $x = \frac{5}{3}, y = -\frac{1}{3}$.
Inversement : ok. Finalement $\mathcal{S} = \left\{(0, 3, 5), (\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}), (\frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, 0)\right\}$.

(b) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{7}{9}\right)\right\}$.

(c) $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{5}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right)\right\}$.

Exercice 4 : [énoncé]
On a
$$\begin{cases} x - ay + z = 2 \\ x + (a+1)z = 3 \\ x + ay + 3z = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ ay + az = 1 \\ ay + z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - ay + z = 2 \\ ay + az = 1 \\ (1-a)z = 0. \end{cases}$$
Si $a = 1$ alors le système a pour solution les triplets
$$(3 - 2z, 1 - z, z) \text{ avec } z \in \mathbb{R}.$$
Si $a \neq 1$ alors le système équivaut à
$$\begin{cases} x - ay = 2 \\ ay = 1 \\ z = 0. \end{cases}$$
Si $a = 0$, il n'y a pas de solutions.
Si $a \neq 0, 1$ alors le système possède pour solution l'unique le triplet
$$(3, 1/a, 0).$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) $x = 2x - 1\ [1] \iff -x = -1\ [1] \iff x = 1\ [1]$, $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$.

(b) $3x = 2 - x\ [\pi] \iff 4x = 2\ [\pi] \iff x = \frac{1}{2}\ \left[\frac{\pi}{4}\right]$, $\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi + 2}{4} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

(c) $nx = 0\ [\pi] \iff x = 0\ \left[\frac{\pi}{n}\right]$,
$$\mathcal{S} = \left\{\frac{k\pi}{n} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Soit (x, y, z) un triplet de réels non nuls. En passant l'inconnue z en second membre avant de réduire au même dénominateur,

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{a} \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=a-z \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{z} \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=a-z \\ \dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{z-a}{az} \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=a-z \\ \dfrac{x+y}{xy}=-\dfrac{x+y}{az}. \end{cases}$$

On poursuit l'étude en distinguant deux cas.
Cas: $x+y=0$. Le système se réduit à la seule équation $z=a$ ce qui produit les solutions

$$(x,-x,a) \quad \text{avec} \quad x \in \mathbb{R}^*.$$

Cas: $x+y \neq 0$. On simplifie la deuxième équation par $x+y$ et on obtient le système somme-produit

$$\begin{cases} x+y=a-z \\ xy=-az. \end{cases}$$

Les solutions de ce dernier système en les inconnues x et y sont les racines de l'équation

$$r^2-(a-z)r-az=0$$

c'est-à-dire

$$(r-a)(r+z)=0.$$

Ses racines sont a et $-z$ ce qui conduit aux triplets solutions

$$(a,-z,z) \quad \text{et} \quad (-z,a,z) \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{R}^*.$$

Finalement, les triplets solutions sont ceux formés par a et deux réels non nuls opposés.

Exercice 7 : [énoncé]
b) c) f)

Exercice 8 : [énoncé]
Chacune des formules peut être acquise en raisonnant par récurrence.

Exercice 9 : [énoncé]
(a) En séparant la somme

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\sum_{k=1}^{n} k^2+\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(b) On réécrit

$$1.n+2.(n-1)+\cdots+(n-1).2+n.1=\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$

et on réorganise

$$\sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)=(n+1)\sum_{k=1}^{n} k-\sum_{k=1}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Exercice 10 : [énoncé]
D'une part

$$\sum_{k=1}^{2p}(-1)^k k=\sum_{\ell=1}^{p}\big(-(2\ell-1)+2\ell\big)=p$$

et d'autre part

$$\sum_{k=1}^{2p+1}(-1)^k k=p-(2p+1)=-(p+1).$$

Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k=\begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^n(n+1)/2 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 11 : [énoncé]
En étant attentif à l'expression de la somme associée à u_{n+1}, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}>0. \end{aligned}$$

Exercice 12 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, sachant

$$(n+1)! + (n+1)! = 2.(n+1)! \leq (n+2)!$$

Exercice 13 : [énoncé]
En écrivant au numérateur $k = (k+1) - 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Exercice 14 : [énoncé]
(a) En écrivant $k = (k+1) - 1$

$$\sum_{k=1}^{p} kk! = \sum_{k=1}^{p} (k+1)! - k! = (p+1)! - 1.$$

(b) Par récurrence forte sur $p \geq 0$.
Pour $p = 0$: ok
Supposons la propriété établie jusqu'au rang $p \geq 0$.
Soit $n \in [\![0, (p+2)! - 1]\!]$.
Réalisons la division euclidienne de n par $(p+1)!$: $n = q(p+1)! + r$ avec $0 \leq r < (p+1)!$.
Puisque $0 \leq n < (p+2)!$ on a $0 \leq q \leq p+1$.
Par hypothèse de récurrence, on peut écrire $r = \sum_{k=0}^{p} n_k k!$ et en prenant $n_{p+1} = q$ on a $n = \sum_{k=0}^{p+1} n_k k!$.
Récurrence établie.

(c) Supposons $n = \sum_{k=0}^{p} n_k k! = \sum_{k=0}^{p} n'_k k!$ avec les conditions requises.
Si $n_p < n'_p$ alors

$$\sum_{k=0}^{p} n_k k! \leq n_p p! + \sum_{k=0}^{p-1} k.k! = (n_p + 1)p! - 1 < n'_p p! \leq \sum_{k=0}^{p} n'_k k!.$$

Ceci est absurde donc nécessairement $n_p \geq n'_p$ puis par symétrie $n_p = n'_p$.
On simplifie alors le terme $n_p p!$ et on reprend le principe pour conclure à l'unicité.

Exercice 15 : [énoncé]

Il n'est pas possible d'exprimer simplement la somme. On minore celle-ci en employant l'inégalité $\left|\cos(t)\right| \geq \cos^2(t)$.

Pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, on a $\cos(kx) \in [-1\,; 1]$ et donc

$$\left|\cos(kx)\right| \geq \cos^2(kx).$$

En sommant ces inégalités, il vient

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\cos(kx)\right| \geq \sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx).$$

On peut calculer la somme en second membre en linéarisant $\cos^2(kx)$.

On sait $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ et donc $\cos^2(kx) = \frac{1}{2}\big(1 + \cos(2kx)\big)$. On en déduit

$$\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \big(1 + \cos(2kx)\big) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx).$$

Cas: $x \equiv 0\ [\pi]$. On a $\cos(2kx) = 1$ pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$ et donc

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \frac{n+1}{2}.$$

On a alors

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\cos(kx)\right| \geq n + 1 \geq \frac{2n+5}{8}$$

(ce que l'on peut aussi trouver par un calcul direct).
Cas: $x \not\equiv 0\ [\pi]$. On peut calculer la somme des $\cos(2kx)$ comme cela a déjà été réalisé dans le sujet 2028 et on obtient

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \frac{1}{2} \cos(nx) \frac{\sin\big((n+1)x\big)}{\sin(x)}.$$

On transforme l'expression en employant

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

et on écrit

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin\big((2n+1)x\big) + \sin(x)}{4\sin(x)} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)} + \frac{1}{4}.$$

Étudions ensuite la fonction φ donnée par

$$\varphi(x)=\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}\quad\text{pour } x\not\equiv 0\ [\pi].$$

Celle-ci est π périodique et paire ce qui permet de limiter son étude sur $]0\,;\pi/2]$.
Soit $x\in\,]0\,;\pi/2]$. Si $x\leq\pi/(2n+1)$, la valeur $\varphi(x)$ est positive. Sinon, on a

$$\sin(x)\geq\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$$

et l'inégalité $\sin\big((2n+1)x\big)\geq -1$ entraîne

$$\varphi(x)=\frac{\sin\big((2n+1)x\big)}{\sin(x)}\geq-\frac{1}{\sin(x)}\geq-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}.$$

On en déduit

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2kx)\geq\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

puis

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\cos(kx)\right|\geq\frac{n+1}{2}+\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)}\right).$$

Enfin, en employant l'inégalité

$$\sin(x)\geq\frac{2}{\pi}x\quad\text{pour tout } x\in[0\,;\pi/2]$$

on conclut

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\cos(kx)\right|\geq\frac{2n+5}{8}.$$

Exercice 16 : [énoncé]
Si $\theta\neq 0\ [2\pi]$ alors

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}$$

(somme géométrique de raison $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\neq 1$)
Si $\theta=0\ [2\pi]$ alors

$$\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=\sum_{k=0}^{n}1=n+1.$$

Exercice 17 : [énoncé]
Si $q^2\neq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n}q^{2k}=\frac{q^{2n+2}-1}{q^2-1}$ (somme géométrique de raison q^2)
Si $q^2=1$ alors $\sum_{k=0}^{n}q^{2k}=n+1$.

Exercice 18 : [énoncé]
L'équation a un sens pour $x\not\equiv\pi/2\ [\pi]$. En exploitant $\cos(kx)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx})$, on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\cos^k x}\right)$$

ce qui apparaît comme une somme géométrique.
Si $x\not\equiv 0\ [\pi]$ alors $q=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\cos x}\neq 1$ et

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\cos^k x}=\frac{1}{\cos^n x}\frac{\cos^{n+1}x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{\cos x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

Il reste à en déterminer la partie réelle. Puisque

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}}{\cos^k x}=\frac{1}{\cos^n x}\frac{\cos^{n+1}x-\cos(n+1)x-\mathrm{i}\sin(n+1)x}{-\mathrm{i}\sin x}$$

on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=\frac{\sin(n+1)x}{\sin x(\cos x)^n}.$$

Alors, pour les x considérés

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos kx}{\cos^k x}=0\iff\sin(n+1)x=0$$
$$\iff x\equiv 0\left[\frac{\pi}{n+1}\right].$$

Si $x\equiv 0\ [\pi]$ alors x n'est pas solution car

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{\cos(kx)}{\cos^k x}=n+1.$$

Finalement, les solutions sont les

$$\frac{k\pi}{n+1}$$

avec $k\in\mathbb{Z}$, k non mutiple de $n+1$ et non multiple impaire de $(n+1)/2$ (lorsque n est impair et afin de tenir compte de la condition $x\not\equiv\pi/2\ [\pi]$.)

Exercice 19 : [énoncé]

(a) On développe

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(i^2+2ij+j^2\right)$$

puis

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}(i+j)^2=n\sum_{i=1}^{n}i^2+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij+n\sum_{j=1}^{n}j^2=\frac{n^2(n+1)(7n+5)}{6}.$$

(b) Il s'agit d'une somme triangulaire

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}ij=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}ij=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n}j\right)$$

puis

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}ij=\sum_{i=1}^{n-1}i\frac{n+i+1}{2}(n-i)=\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{24}.$$

(c) On organise la somme afin de résoudre la valeur du min

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}j+\sum_{j=i+1}^{n}i\right)$$

puis

$$\sum_{1\leq i,j\leq n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 20 : [énoncé]

Après réorganisation des termes

$$\sum_{1\leq p,q\leq n}p+q=2C_n+2\sum_{p=1}^{n}p.$$

Or

$$2\sum_{p=1}^{n}p=n(n+1)$$

et

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n}p+q=n^2(n+1)$$

d'où

$$C_n=\frac{(n-1)n(n+1)}{2}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

b)

Exercice 22 : [énoncé]

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}=\frac{2}{1}\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}=n+1.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) *Cas:* $x\equiv 0\ [2\pi]$. Tous les facteurs sont égaux à 1 donc $P(x)=1$.
Cas: $x\equiv \pi\ [2\pi]$. Tous les facteurs sont égaux à 1 sauf le premier qui vaut -1. On a donc $P(x)=-1$.

(b) En exploitant successivement la formule $\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

$$\sin(x)P(x)=\sin(x).\cos(x).\cos(2x)\ldots\cos(2^nx)=\frac{1}{2^{n+1}}\sin(2^{n+1}x)$$

donc

$$P(x)=\frac{\sin\left(2^{n+1}x\right)}{2^{n+1}\sin(x)}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

Pour $n\geq 2$, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}=\frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1)\times\ldots\times 5}{(2n-1)(2n-3)\times\ldots\times 5\times 3\times 1}$$

puis après simplification

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}=\frac{(2n+3)(2n+1)}{3}$$

et pour $n=1$

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+3}{2k-1}=5$$

ce qui rend la formule précédente encore valable.

Exercice 25 : [énoncé]
En extrayant un 2 dans chaque facteur

$$2.4.6\times\cdots\times(2n)=2^n 1.2.3\times\cdots\times n=2^n n!$$

En introduisant les facteurs pairs intermédiaires

$$1.3.5\times\cdots\times(2n+1)=\frac{1.2.3.4.5.6\times\cdots\times(2n)\times(2n+1)}{2.4.6\times\cdots\times(2n)}=\frac{(2n+1)!}{2^n n!}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Par la formule du binôme

$$S_0=(1+1)^n=2^n.$$

(b) $((1+x)^n)'=n(1+x)^{n-1}$ donne

$$\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}$$

donc

$$S_1=n2^{n-1}.$$

(c)

$$(x((1+x)^n)')'=(nx(1+x)^{n-1})'=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

donne

$$\sum_{k=1}^{n}k^2\binom{n}{k}x^{k-1}=n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}$$

donc

$$S_2=n2^{n-1}+n(n-1)2^{n-2}=n(n+1)2^{n-2}.$$

Exercice 27 : [énoncé]
Par la formule du binôme

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}j^p=(1+j)^n=2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}\cos^n\frac{\pi}{3}.$$

On a aussi

$$A+B+C=(1+1)=2^n$$

et par ce qui précède

$$A+jB+j^2C=2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}\cos^n\frac{\pi}{3}$$

puis aussi par conjugaison

$$A+j^2B+jC=2^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}\cos^n\frac{\pi}{3}.$$

On en déduit après résolution

$$A=\frac{2^n}{3}\left(1+2\cos\frac{n\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right),B=\frac{2^n}{3}\left(1+2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right)$$

et

$$C=\frac{2^n}{3}\left(1+2\cos\frac{(n+2)\pi}{3}\cos^n\frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 28 : [énoncé]
$(a+b+c)^n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{ell}a^{n-k}b^{k-\ell}c^{\ell}$ et $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=\frac{n!}{(n-k)!(k-\ell)!\ell!}$.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) Par la formule du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=(1+(-1))^n=\begin{cases}1 & \text{si } n=0\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

(b) On a

$$\binom{n}{k}\binom{k}{ell}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{\ell!(k-\ell)!}=\frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(n-\ell)!}{(n-k)!(k-\ell)!}=\binom{n}{ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

(c) On a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}x_\ell=\sum_{\ell=0}^{n}x_\ell\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}.$$

Or

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}=(-1)^{n-\ell}\binom{n}{\ell}\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

avec

$$\sum_{k=\ell}^{n}(-1)^{k-\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}=\begin{cases}1 & \text{si } \ell=n\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}y_k=x_n.$$

Exercice 30 : [énoncé]
On commence par exprimer le produit comme un rapport de nombres factoriels

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(i+p)!}{i!}$$

puis on introduit un coefficient du binôme

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\sum_{i=0}^{n}\binom{i+p}{i}.$$

La somme introduite peut être calculée grâce à la formule de Pascal

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j=1}^{p}(i+j)\right)=p!\binom{p+n+1}{n}=\frac{(p+n+1)!}{(p+1)n!}.$$

Exercice 31 : [énoncé]
Par récurrence sur $n\geq 1$ sachant :

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k-1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{n+1}\binom{n+1}{k}=\frac{1}{n+1}-\frac{(1-1)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n+1}{k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}.$$

Exercice 32 : [énoncé]

(a) On suppose n premier. On sait

$$\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

donc

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

ce qui permet d'affirmer que n divise l'entier $k\binom{n}{k}$. Or n est premier et donc premier avec k puisque $k<n$. Par le théorème de Gauss, on peut alors affirmer que n divise $\binom{n}{k}$.

(b) Supposons maintenant n composé. On peut introduire p un facteur premier de n avec $p<n$. Nous allons alors montrer que n ne divise par $\binom{n}{p}$ ce qui permet de conclure.
Par l'absurde, supposons que $m=\frac{1}{n}\binom{n}{p}$ soit un entier. On peut écrire

$$(n-1)!=m.p!(n-p)!$$

Puisque p divise n, on peut aussi écrire $n=pq$ avec q entier et donc

$$(pq-1)!=mp!\big(p(q-1)\big)!$$

Dans les produits définissant $(pq-1)!$ et $\big(p(q-1)\big)!$, on retrouve les mêmes multiples de p, à savoir $p,2p,\dots(q-1)p$. On peut donc écrire

$$(pq-1)!=ka \text{ et } \big(p(q-1)\big)!=kb$$

avec k regroupant le produit des multiples de p précédents et a et b non divisibles par p.
La relation initiale se simplifie alors pour donner

$$a=mp!b$$

ce qui entraîne que a est divisible par p. C'est absurde !

Exercice 33 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)}{k}\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}$$

ce qui donne directement la relation soumise.

(b) Si $1 \leq k \leq n/2$ alors $2k < n+1$ et donc $n-k+1 > k$ puis

$$\binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} > \binom{n}{k-1}.$$

La deuxième inégalité s'en déduit par la relation de symétrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

(c) Pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux croît puis décroît en étant extrémale en son milieu.

Exercice 34 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k} = (1+1)^{2n} = 2^{2n}.$$

Or, pour n fixé, la suite finie des coefficients binomiaux est maximale en son milieu donc

$$\forall 0 \leq k \leq 2n, \binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}$$

et donc

$$2^{2n} \leq (2n+1)\binom{2n}{n}$$

puis l'inégalité proposée.