Fonctions usuelles

Radicaux

Logarithmes

Exercice 1 [01827] [Correction]
Établir, pour tout $x \geq 0$, l'encadrement

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

Exercice 2 [01828] [Correction]

(a) Montrer que, pour tout $x > -1$

$$\ln(1+x) \leq x.$$

(b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \mathrm{e} \leq \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}.$$

Exercice 3 [01829] [Correction]
Montrer que pour tout $a, b > 0$

$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \frac{a+b}{2}.$$

Exercice 4 [01830] [Correction]
Soit $0 < a \leq b$. On pose $f\colon x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudier la monotonie de f et en déduire que $\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2$.

Exercice 5 [01831] [Correction]
Montrer que le nombre de chiffres dans l'écriture décimale d'un entier $n > 0$ est $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 6 [03626] [Correction]
(Lemme de Gibbs)

(a) Justifier

$$\forall x > 0, \ln x \leq x - 1.$$

(b) Soient $(p_1, \dots, p_n)$ et $(q_1, \dots, q_n)$ des n-uplets formés de réels strictement positifs vérifiant

$$\sum_{k=1}^n p_k = \sum_{k=1}^n q_k = 1.$$

Établir

$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i \leq \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i.$$

Dans quel(s) cas y a-t-il égalité ?

Puissances et exponentielles

Exercice 7 [01833] [Correction]
Simplifier a^b pour $a = \exp x^2$ et $b = \frac{1}{x}\ln x^{1/x}$.

Exercice 8 [01834] [Correction]
Parmi les relations suivantes, lesquelles sont exactes :

(a) $(a^b)^c = a^{bc}$

(b) $a^b a^c = a^{bc}$

(c) $a^{2b} = (a^b)^2$

(d) $(ab)^c = a^{c/2}b^{c/2}$

(e) $(a^b)^c = a^{(b^c)}$

(f) $(a^b)^c = (a^c)^b$?

Exercice 9 [01835] [Correction]
Comparer

$$\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x)} \text{ et } \lim_{x\to 0^+} (x^x)^x.$$

Exercice 10 [01836] [Correction]
Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x}$ (b) $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}$ (c) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$

Exercice 11 [01837] [Correction]
Résoudre les équations suivantes :

(a) $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{1-x} = \mathrm{e} + 1$ (b) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ (c) $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

Exercice 12 [01838] [Correction]
Résoudre les systèmes suivants :

(a) $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases}$ (b) $\begin{cases} \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{2y} = a \\ 2xy = 1 \end{cases}$

Exercice 13 [03652] [Correction]
Résoudre le système

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ \mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b + \mathrm{e}^c = 3 \end{cases}$$

d'inconnue $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$

Fonctions trigonométriques

Exercice 14 [01839] [Correction]
Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\sin x \le x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 15 [01840] [Correction]
Développer :

(a) $\cos(3a)$ (b) $\tan(a+b+c)$

Exercice 16 [01841] [Correction]
Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ en observant $2 \times \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 17 [01842] [Correction]
Simplifier

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}.$$

En déduire la valeur de

$$\tan\frac{\pi}{24}.$$

Exercice 18 [01845] [Correction]
Pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b \ne 0\ [2\pi]$, calculer simultanément

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb) \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb).$$

Exercice 19 [01846] [Correction]
Soit $x \ne 0\ [2\pi]$.

(a) Montrer

$$\sin(x) + \sin(2x) + \cdots + \sin(nx) = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

en procédant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

(b) En exploitant les nombres complexes.

Exercice 20 [01847] [Correction]
Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$.

(a) $\cos(2x - \pi/3) = \sin(x + 3\pi/4)$
(b) $\cos^4 x + \sin^4 x = 1$
(c) $\sin x + \sin 3x = 0$
(d) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$
(e) $3\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{6}$
(f) $2\sin x.\cos x + \sqrt{3}\cos 2x = 0$

Exercice 21 [01848] [Correction]
Résoudre l'équation

$$\tan x \tan 2x = 1.$$

Exercice 22 [02645] [Correction]
Calculer

$$\sum_{k=1}^{4} \cos^2\frac{k\pi}{9}.$$

Fonctions trigonométriques réciproques

Exercice 23 [01849] [Correction]
Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\cos(2\arccos x)$
(b) $\cos(2\arcsin x)$
(c) $\sin(2\arccos x)$
(d) $\cos(2\arctan x)$
(e) $\sin(2\arctan x)$
(f) $\tan(2\arcsin x)$

Exercice 24 [01850] [Correction]
Simplifier la fonction $x \mapsto \arccos(4x^3 - 3x)$ sur son intervalle de définition.

Exercice 25 [01851] [Correction]
Simplifier

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 26 [01853] [Correction]
Déterminer $\lim_{x\to 0+} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$ à l'aide d'un changement de variable judicieux.

Exercice 27 [01854] [Correction]
Étudier les fonctions suivantes afin de les représenter :

(a) $f\colon x \mapsto \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$
(b) $f\colon x \mapsto \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2}\arccos(\cos 2x)$
(c) $f\colon x \mapsto \arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$
(d) $f\colon x \mapsto \arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exercice 28 [01855] [Correction]
Simplifier :

(a) $\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$.
(b) $\arctan 2 + \arctan 3 + \arctan(2+\sqrt{3})$.
(c) $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65}$.

Exercice 29 [01858] [Correction]
Simplifier $\arctan a + \arctan b$ pour $a, b \geq 0$.

Exercice 30 [01859] [Correction]
Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\arctan(p+1) - \arctan(p).$$

Étudier la limite de la suite (S_n) de terme général

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\frac{1}{p^2+p+1}.$$

Fonctions hyperboliques

Exercice 31 [01861] [Correction]
Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\operatorname{sh} x \geq x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}$.

Exercice 32 [01862] [Correction]
Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. On pose $x = \ln\left(\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
Montrer que $\operatorname{th}\frac{x}{2} = \tan\frac{y}{2}$, $\operatorname{th} x = \sin y$ et $\operatorname{ch} x = \frac{1}{\cos y}$.

Exercice 33 [01864] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, simplifier $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)$ en calculant $P_n(x)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Exercice 34 [01865] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, observer

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}.$$

Calculer

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)}.$$

Exercice 35 [01866] [Correction]
Soient a et α deux réels.
Résoudre le système d'inconnues x et y

$$\begin{cases}\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2a \operatorname{ch} \alpha \\ \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2a \operatorname{sh} \alpha.\end{cases}$$

Exercice 36 [01869] [Correction]
Établir :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \left|\arctan(\operatorname{sh} x)\right| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
L'étude des variations des fonctions $x \mapsto x - \ln(1+x)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$ montre que celles-ci sont croissantes sur $\mathbb{R}_+$, puisqu'elles s'annulent en 0, on peut conclure.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Posons $f\colon]-1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x - \ln(1+x)$. f est dérivable, $f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{x}{1+x}$.
Le tableau de variation de f donne f positive.

(b) D'une part
$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})} \le \mathrm{e}^{n\times\frac{1}{n}} \le \mathrm{e}$$
et d'autre part
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1-\frac{1}{n})} \ge \mathrm{e}$$
car
$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \le -\frac{1}{n}.$$

Exercice 3 : [énoncé]
On a
$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\frac{a+b}{2\sqrt{ab}}$$
or
$$a+b = \sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2 \ge 2\sqrt{ab}$$
donc
$$\ln\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} \ge 0.$$

Exercice 4 : [énoncé]
$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2}$ avec $g(x) = a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
$g(0) = 0$ et $g'(x) = ab\ln\frac{1+bx}{1+ax} \ge 0$ donc g est positive et par suite f croissante.
$\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$ donc $f\left(\frac{1}{b}\right) \le f\left(\frac{1}{a}\right)$ ce qui donne l'inégalité voulue.

Exercice 5 : [énoncé]
Notons m le nombre de décimale dans l'écriture de n.
On a $10^{m-1} \le n < 10^m$ donc $m-1 \le \log_{10} n < m$ puis $m = \lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Une étude de la fonction $x \mapsto \ln x - x + 1$ assure l'inégalité écrite.
De plus on observe qu'il y a égalité si, et seulement si, $x = 1$.

(b) On étudie la différence
$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i = \sum_{i=1}^n p_i \ln\frac{q_i}{p_i}.$$
Par l'inégalité précédente
$$\sum_{i=1}^n p_i \ln q_i - \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i \le \sum_{i=1}^n p_i\left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right) = \sum_{i=1}^n (q_i - p_i) = 0.$$
De plus il y a égalité si, et seulement si,
$$\forall 1 \le i \le n, p_i = q_i.$$
Cette inégalité est fameuse lorsqu'on s'intéresse à l'entropie d'une source d'information...

Exercice 7 : [énoncé]
$(\exp x^2)^{\frac{\ln x^{1/x}}{x}} = x$.

Exercice 8 : [énoncé]
(a) c) f)

Exercice 9 : [énoncé]
Quand $x \to 0^+$
$$x^{(x^x)} = \exp(x^x \ln x) = \exp(\exp(x\ln x)\ln x) \to 0$$
et
$$(x^x)^x = \exp(x\ln x^x) = \exp(x^2 \ln x) \to 1.$$

Exercice 10 : [énoncé]

(a) $\lim_{x\to+\infty} x^{1/x} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}} = 1$

(c) $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x} = 0$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\mathcal{S} = \{0, 1\}$

(b) $\mathcal{S} = \{0, 1, 4\}$

(c) Obtenir $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ puis $\mathcal{S} = \{3/2\}$.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) $x = 1/2, y = \sqrt{2}/5$

(b) Obtenir un système somme/produit en x et $2y$ puis le résoudre.

Exercice 13 : [énoncé]
Il est clair que le triplet nul est solution de ce système.
Inversement, soit (a, b, c) solution. Posons $x = \mathrm{e}^a$, $y = \mathrm{e}^b$ de sorte que $\mathrm{e}^c = \mathrm{e}^{-(a+b)} = 1/xy$.
On a donc $x, y > 0$ et

$$x + y + \frac{1}{xy} = 3.$$

Pour $y > 0$ fixé, étudions la fonction $f : x \mapsto x + y + 1/xy$.
Cette fonction est dérivable et admet un minimum strict en $x = 1/\sqrt{y}$ valant $g(y) = y + 2/\sqrt{y}$.
La fonction g est dérivable et admet un minimum strict en $y = 1$ valant $g(1) = 3$.
On en déduit que si $(x, y) \neq (1, 1)$ alors $f(x, y) > 3$ et donc

$$f(x, y) = 3 \implies x = y = 1.$$

On peut alors conclure $a = b = c = 0$.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons $f(x) = x - \sin x$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
f est dérivable, $f' \geq 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive.
Posons $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.
g est deux fois dérivable, $g'' \geq 0$, $g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de g. On conclut g positive.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) $\cos(3a) = \cos(2a + a)$ puis

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a.$$

(b) $\tan(a + b + c) = \tan((a + b) + c)$ puis

$$\tan(a + b + c) = \frac{\tan a + \tan b + \tan c - \tan a \tan b \tan c}{1 - \tan a \tan b - \tan b \tan c - \tan c \tan a}.$$

Exercice 16 : [énoncé]
On sait $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc

$$2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

puis

$$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

et enfin

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}.$$

Exercice 17 : [énoncé]
Par factorisation

$$\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q} = -\frac{\sin\frac{p-q}{2}}{\cos\frac{p-q}{2}} = -\tan\frac{p-q}{2}.$$

Pour $p = \frac{\pi}{4}$ et $q = \frac{\pi}{6}$ on obtient

$$\tan\frac{\pi}{24} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}.$$

Exercice 18 : [énoncé]
En passant aux nombres complexes

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(a + kb) + \mathrm{i}\sum_{k=0}^{n} \sin(a + kb) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+kb)}.$$

Par sommation géométrique puis factorisation de l'exponentielle équilibrée

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+kb)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)b}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}b}-1} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(a+nb/2)}\frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}.$$

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb) = \frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cos\left(a+\frac{nb}{2}\right)$$

et

$$\sum_{k=0}^{n}\sin(a+kb) = \frac{\sin\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\sin\left(a+\frac{nb}{2}\right).$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) L'hérédité de la récurrence s'obtient via :

$$\begin{aligned}\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}+\sin(n+1)x\sin\frac{x}{2}\\ &= \sin\frac{(n+1)x}{2}\left(\sin\frac{nx}{2}+2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{x}{2}\right)\\ &\sin\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{(n+2)x}{2}\end{aligned}$$

en exploitant

$$\sin p-\sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

avec

$$p=\frac{(n+2)x}{2} \text{ et } q=\frac{nx}{2}.$$

(b) Par les nombres complexes

$$\sin(x)+\sin(2x)+\dots+\sin(nx) = \operatorname{Im}(\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}) = \operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\right)$$

donc

$$\sin(x)+\sin(2x)+\dots+\sin(nx) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+1)x}{2}}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right) = \sin\frac{(n+1)x}{2}\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos(2x-\pi/3)=\cos(x+\pi/4).$$

On obtient pour solutions

$$x=\frac{7\pi}{12}\ [2\pi] \text{ et } x=\frac{\pi}{36}\left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

(b) L'équation étudiée équivaut à

$$\cos^4 x+\sin^4 x = (\cos^2 x+\sin^2 x)^2$$

soit encore

$$2\cos^2 x\sin^2 x = 0.$$

On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2].$$

(c) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin 2x\cos x = 0.$$

On obtient pour solutions

$$x = 0\ [\pi/2].$$

(d) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sin(2x)\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)=0.$$

On obtient pour solutions

$$x=0\ [\pi/2]\,, x=\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \text{ et } x=-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi].$$

(e) L'équation étudiée équivaut à

$$2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x\right)=\sqrt{6}$$

soit encore

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{4}.$$

On obtient pour solutions

$$x=\frac{\pi}{12}\ [2\pi] \text{ et } x=-\frac{5\pi}{12}\ [2\pi].$$

(f) L'équation étudiée équivaut à

$$2\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)=0$$

soit encore

$$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0.$$

On obtient pour solutions

$$x=\frac{\pi}{3}\ [\pi]\ \text{ et } x=-\frac{\pi}{6}\ [\pi]\,.$$

Exercice 21 : [énoncé]
Pour $x\neq\frac{\pi}{2}\ [\pi]$ et $x\neq\frac{\pi}{4}\ \left[\frac{\pi}{2}\right]$, $\tan x\tan 2x=1\iff\sin x\sin 2x-\cos x\cos 2x=0\iff\cos 3x=0\iff x=\frac{\pi}{6}\ \left[\frac{\pi}{3}\right]$.

Exercice 22 : [énoncé]
En linéarisant et en faisant quelques transformations angulaires de simplification

$$\sum_{k=1}^{4}\cos^2\frac{k\pi}{9}=\frac{7}{4}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) $\cos(2\arccos x)=2\cos^2(\arccos x)-1=2x^2-1$.
(b) $\cos(2\arcsin x)=1-2\sin^2\arcsin x=1-2x^2$.
(c) $\sin(2\arccos x)=2x\sqrt{1-x^2}$
(d) $\cos(2\arctan x)=2\cos^2\arctan x-1=\frac{2}{1+x^2}-1=\frac{1-x^2}{1+x^2}$.
(e) $\sin(2\arctan x)=2\sin(\arctan x)\cos(\arctan x)=\frac{2x}{1+x^2}$.
(f) $\tan(2\arcsin x)=\frac{2\tan(\arcsin x)}{1-\tan^2(\arcsin x)}=\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$.

Exercice 24 : [énoncé]
$f\colon x\mapsto\arccos(4x^3-3x)$ est définie sur $[-1\,;1]$.
Pour $x\in[-1\,;1]$, posons $\theta=\arccos x$, on a alors
$f(x)=\arccos(4\cos^3\theta-3\cos\theta)=\arccos(\cos 3\theta)$.
Si $\theta\in[0\,;\pi/3]$ *i.e.* $x\in[1/2\,;1]$ alors $f(x)=3\theta=3\arccos x$.
Si $\theta\in[\pi/3\,;2\pi/3]$ *i.e.* $x\in[-1/2\,;1/2]$ alors $f(x)=2\pi-3\theta=2\pi-3\arccos x$.
Si $\theta\in[2\pi/3\,;\pi]$ *i.e.* $x\in[-1\,;-1/2]$ alors $f(x)=3\theta-2\pi=3\arccos x-2\pi$.

Exercice 25 : [énoncé]
La fonction $x\mapsto\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable et à valeurs dans $]-1\,;1[$ donc $x\mapsto\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable et

$$\left(\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{1}{1+x^2}.$$

On en déduit

$$\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\arctan x+C.$$

En évaluant en $x=0$, on obtient $C=0$.

Exercice 26 : [énoncé]
Quand $x\to 0^+$: $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}=\frac{y}{\sqrt{1-\cos(y)}}$ avec $y=\arccos(1-x)\to 0^+$.
Or $1-\cos(y)\sim\frac{y^2}{2}$ donc $\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}=\frac{y}{\sqrt{1-\cos(y)}}\to\sqrt{2}$.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) f est 2π périodique.
Sur $[-\pi/2\,;0]$: $\arcsin(\sin x)=x$ et $\arccos(\cos x)=-x$ donc $f(x)=0$.
Sur $[0\,;\pi/2]$: $\arcsin(\sin x)=x$ et $\arccos(\cos(x))=x$ donc $f(x)=2x$.
Sur $[\pi/2\,;\pi]$: $\arcsin(\sin x)=\pi-x$ et $\arccos(\cos x)=x$ donc $f(x)=\pi$.
Sur $[-\pi\,;-\pi/2]$: $\arcsin(\sin x)=-x-\pi$ et $\arccos(\cos(x))=-x$ donc $f(x)=-2x-\pi$.
(b) f est 2π périodique.
Sur $[0\,;\pi/2]$, $f(x)=x+x=2x$. Sur $[\pi/2\,;\pi]$, $f(x)=\pi-x+\pi-x=2\pi-2x$.
Sur $[-\pi/2\,;0]$, $f(x)=x-x=0$. Sur $[-\pi\,;-\pi/2]$, $f(x)=-x-\pi+\pi+x=0$.
(c) $f(x)=\arccos\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=\arccos\left|\cos(x/2)\right|$. f est 2π périodique, paire, sur $[0\,;\pi]$ $f(x)=x/2$.
(d) $f(x)=\arctan\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\arctan\left|\tan x/2\right|$. f est 2π périodique, paire. Sur $[0\,;\pi[$, $f(x)=x/2$. On retrouve la fonction ci-dessus.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Posons $\theta=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{5}+\arctan\frac{1}{8}$.
On a $0\leq\theta<3\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\pi/2$ et $\tan\theta=1$ donc $\theta=\pi/4$.

(b) Posons $\theta = \arctan 2 + \arctan 3 + \arctan\big(2+\sqrt{3}\big)$.
On a $3\arctan 1 = \frac{3\pi}{4} \le \theta < \frac{3\pi}{2}$ et $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ donc $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

(c) $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13}\right) = \frac{3}{5}\frac{12}{13} - \frac{4}{5}\frac{5}{13} = \frac{16}{65}$ et
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{16}{65}\right) = \sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right) = \frac{16}{65}$.
Or $\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$ et $\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{16}{65} \in [0\,;\frac{\pi}{2}]$ d'où l'égalité
$\arcsin\frac{4}{5} + \arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$

Exercice 29 : [énoncé]

On a $\tan(\arctan a + \arctan b) = \frac{a+b}{1-ab}$ donc $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)\ [\pi]$.

Si $ab = 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \pi/2$.

Si $ab < 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$.

Si $ab > 1$ alors $\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) + \pi$.

Exercice 30 : [énoncé]

Posons $\theta = \arctan(p+1) - \arctan(p)$. Comme $0 \le \arctan p \le \arctan(p+1) < \pi/2$ on a $\theta \in [0\,;\pi/2[$.
De plus $\tan\theta = \frac{1}{p^2+p+1}$ donc

$$\theta = \arctan\frac{1}{p^2+p+1}.$$

Par télescopage $S_n = \sum_{p=0}^{n} \arctan\frac{1}{p^2+p+1} = \arctan(n+1) \to \pi/2$.

Exercice 31 : [énoncé]

Posons $f(x) = \operatorname{sh} x - x$ définie sur $\mathbb{R}_+$. f est dérivable, $f' \ge 0$ et $f(0) = 0$ donc f est positive.
Posons $g(x) = \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$. g est deux fois dérivable, $g'' \ge 0$, $g'(0) = g(0) = 0$ permet de dresser les tableaux de variation et de signe de g' puis de g. On conclut g positive.

Exercice 32 : [énoncé]

$$\begin{aligned}\operatorname{th}\frac{x}{2} &= \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1} = \frac{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 1}{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 1} = \frac{\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}\right)} = \frac{\sin\frac{y}{2}\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{y}{2}\sin\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{y}{2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{th} x &= \frac{\tan^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - 1}{\tan^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + 1} = \sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\\ &= -\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) = \sin y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{ch} x &= \frac{\tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sin^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \frac{1}{\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{\cos y}.\end{aligned}$$

Exercice 33 : [énoncé]

Si $x = 0$ alors $P_n(x) = 1$, sinon $P_n(x)\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right) = \ldots = \frac{1}{2^n}\operatorname{sh}(x)$ donc $P_n(x) = \frac{\operatorname{sh}(x)}{2^n\operatorname{sh}(x/2^n)}$.

Exercice 34 : [énoncé]

Après quelques calculs

$$\operatorname{th}((n+1)x) - \operatorname{th}(nx) = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}(nx)\operatorname{ch}((n+1)x)}.$$

Par télescopage

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\operatorname{ch}(kx)\operatorname{ch}((k+1)x)} = \frac{\operatorname{th}((n+1)x)}{\operatorname{sh}(x)}.$$

Exercice 35 : [énoncé]
Si $a < 1$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
Si $a = 1$ alors $\mathcal{S} = \{(\alpha, \alpha)\}$.
Si $a > 1$ alors en faisant apparaître un système somme produit :

$$\mathcal{S} = \left\{(\ln(a - \sqrt{a^2-1}) + \alpha, \ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \alpha), (\ln(a + \sqrt{a^2-1}) + \alpha, \ln(a - \sqrt{a^2-1}) + \alpha)\right\}.$$

Exercice 36 : [énoncé]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x}\frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 x - 1}} = \frac{1}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\frac{1}{\operatorname{sh} x} = 0.$$

Donc f est constante sur $]0\,;+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+$ par continuité.
Puisque $f(0) = 0$, on peut conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \left|\arctan(\operatorname{sh} x)\right| = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right).$$

Par parité, le résultat se prolonge aussi à $x \in \mathbb{R}_-$.