

# Suites numériques

## Convergence de suites

### Exercice 1 [02249] [Correction]

Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N}, u_n \leq a \text{ et } v_n \leq b \\ u_n + v_n \rightarrow a + b. \end{cases}$$

Montrer que  $u_n \rightarrow a$  et  $v_n \rightarrow b$ .

### Exercice 2 [02250] [Correction]

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que  $(u_n + v_n)$  et  $(u_n - v_n)$  convergent. Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent.

### Exercice 3 [02251] [Correction]

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes. Étudier

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max(u_n, v_n).$$

### Exercice 4 [02252] [Correction]

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles telles que

$$u_n^2 + u_n v_n + v_n^2 \rightarrow 0.$$

Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers 0.

### Exercice 5 [02253] [Correction]

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites telles que

$$0 \leq u_n \leq 1, 0 \leq v_n \leq 1 \text{ et } u_n v_n \rightarrow 1.$$

Que dire de ces suites ?

### Exercice 6 [03497] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels non nuls vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow 0.$$

Déterminer la limite de  $(u_n)$ .

### Exercice 7 [03184] [Correction]

Soient  $K$  un réel strictement supérieur à 1 et  $(\varepsilon_n)$  une suite de réels positifs convergent vers 0. Soit  $(u_n)$  une suite de réels de  $[0; 1]$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

La suite  $(u_n)$  converge-t-elle vers 0 ?

## Calcul de limites

### Exercice 8 [02254] [Correction]

Déterminer la limite, si celle-ci existe, des suites  $(u_n)$  suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ u_n = \frac{3^n - (-2)^n}{3^n + (-2)^n} & \text{(c)} \ u_n = \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{n + \sqrt{n^2 - 1}} \\ \text{(b)} \ u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n + 1} & \text{(d)} \ u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \end{array}$$

### Exercice 9 [02255] [Correction]

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \ u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \text{(c)} \ u_n = \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} \\ \text{(b)} \ u_n = \sqrt[n]{n^2} & \text{(d)} \ u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \end{array}$$

### Exercice 10 [02256] [Correction]

Déterminer par comparaison, la limite des suites  $(u_n)$  suivantes :

(a)  $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^{n+1}}$   
 (b)  $u_n = \frac{n!}{n^n}$   
 (c)  $u_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

(d)  $u_n = \frac{e^n}{n^n}$   
 (e)  $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

(a) Établir que pour tout  $p > 1$ ,

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{p} \leq \int_{p-1}^p \frac{dx}{x}.$$

En déduire la limite de  $(S_n)$ .

(b) Établir que  $S'_{2n} = S_n$ . En déduire la limite de  $(S'_n)$ .

**Exercice 11** [ 02257 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer les limites des sommes suivantes :

(a)  $S_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{k}$   
 (b)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$   
 (c)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2}$   
 (d)  $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^2}$

(e)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k}$   
 (f)  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$   
 (g)  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k!$

**Exercice 15** [ 02263 ] [\[Correction\]](#)

Déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^{-1}.$$

**Exercice 12** [ 02258 ] [\[Correction\]](#)

Comparer

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m, \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

**Exercice 13** [ 02260 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

- (a) Montrer que si  $\ell < 1$  alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .
- (b) Montrer que si  $\ell > 1$  alors  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ .
- (c) Observer que dans le cas  $\ell = 1$  on ne peut rien conclure.

**Exercice 14** [ 02261 ] [\[Correction\]](#)

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \text{ et } S'_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

**Exercice 16** [ 02264 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  on pose

$$u_n = \binom{n+p}{n}^{-1} \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^n u_k.$$

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.$$

(b) Montrer par récurrence

$$S_n = \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1}).$$

- (c) On pose  $\forall n \in \mathbb{N}^* v_n = (n+p)u_n$ . Montrer que  $(v_n)$  converge vers 0.
- (d) En déduire  $\lim S_n$  en fonction de  $p$ .

**Exercice 17** [ 03039 ] [\[Correction\]](#)

Soit  $z \in \mathbb{C}$  avec  $|z| < 1$ . Existence et calcul de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1 + z^{2^k}).$$

**Exercice 18** [03196] [Correction]

Étudier la convergence de deux suites réelles  $(u_n)$  et  $(v_n)$  vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (e^{u_n} + e^{v_n}) = 2.$$

**Exercice 19** [02262] [Correction]

Soit  $a \in \mathbb{R}$  et pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{a}{2^k}.$$

Montrer que

$$\sin\left(\frac{a}{2^n}\right) P_n = \frac{1}{2^n} \sin(a)$$

et déterminer  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n$ .

**Exercice 20** [00298] [Correction]

Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants :

(a)  $u_n = \sqrt[n]{n}$

(e)  $u_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right)\right)^n$

(b)  $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

(f)  $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{n \ln n}$

(c)  $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+2}$

(g)  $u_n = \left(\frac{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{4}}{3}\right)^n$

(d)  $u_n = n^2 \left(\cos \frac{1}{n} - \cos \frac{1}{n+1}\right)$

(h)  $u_n = \left(\frac{\arctan(n+1)}{\arctan n}\right)^{n^2}$

**Exercice 21** [00302] [Correction]

Nature de la suite de terme général

$$u_n = \cos(\pi n^2 \ln(1 - 1/n)).$$

**Exercice 22** [02781] [Correction]

Étudier la convergence de la suite  $([a^n]^{1/n})$ , où  $a > 0$ .

**Exercice 23** [00304] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite d'entiers naturels deux à deux distincts. Montrer que  $u_n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 24** [00320] [Correction]

Soient  $\alpha > 0$  et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}.$$

- (a) Montrer que si  $\alpha > 1$  alors  $u_n \rightarrow 0$  tandis que si  $\alpha < 1$ ,  $u_n \rightarrow +\infty$ .  
 (b) Montrer que si  $\alpha = 1$ , la suite est monotone et convergente.  
 (c) Toujours dans le cas  $\alpha = 1$  et en exploitant l'encadrement  $\ln(1+x) \leq x \leq -\ln(1-x)$  valable pour tout  $x \in [0; 1[$ , établir  $u_n \rightarrow \ln 2$ .

**Exercice 25** [00321] [Correction]

- (a) Établir que pour tout  $x \geq 0$  on a

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leq \ln(1+x) \leq x.$$

- (b) En déduire la limite de

$$u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n^2}\right).$$

**Exercice 26** [00319] [Correction]

- (a) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où  $p \in \mathbb{N}^*$  est fixé. Montrer que la suite  $(u_n)$  converge. Sa limite sera notée  $\ell$  (on ne demande pas ici de la calculer)

- (b) Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que  $f(0) = 0$ . Soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right).$$

Montrer que  $(v_n)$  converge. Exprimer sa limite en fonction de  $\ell$ .

- (c) Calculer  $\ell$  en utilisant  $f(x) = \ln(1+x)$ .  
 (d) Si  $f$  de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\mathbb{C}$  est continue et vérifie  $f(0) = 0$ , montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite  $(v_n)$ .

**Exercice 27** [05022] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$u_n + \frac{1}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2.$$

Étudier la limite de  $(u_n)$ .

**Limites des suites monotones****Exercice 28** [02265] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite croissante de limite  $\ell$ . On pose

$$v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}.$$

- (a) Montrer que  $(v_n)$  est croissante.  
 (b) Établir que  $v_{2n} \geq \frac{u_n + v_n}{2}$ .  
 (c) En déduire que  $v_n \rightarrow \ell$ .

**Exercice 29** [02266] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle convergente. Étudier la limite de la suite  $v_n = \sup_{p \geq n} u_p$ .

**Exercice 30** [02268] [Correction]

(Somme harmonique) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}.$$

En déduire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$ .

**Exercice 31** [02270] [Correction]

On pose

$$u_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots \times (2n)}.$$

- (a) Exprimer  $u_n$  à l'aide de nombres factoriels.  
 (b) Montrer que la suite  $(u_n)$  converge.  
 (c) On pose

$$v_n = (n+1)u_n^2.$$

Montrer que la suite  $(v_n)$  converge. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$

- (d) Simplifier

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

et comparer ce produit à  $2u_n^2$ .

- (e) En déduire que la limite  $C$  de la suite  $(v_n)$  est strictement positive.

**Exercice 32** [00300] [Correction]

Soient  $a > 0$  et

$$u_n = (1+a)(1+a^2) \dots (1+a^n).$$

- (a) Montrer que si  $a \geq 1$  alors  $u_n \rightarrow +\infty$ .  
 (b) On suppose  $0 < a < 1$ . Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente. On pourra exploiter la majoration  $1+x \leq e^x$  valable pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Suites adjacentes****Exercice 33** [02271] [Correction]

Soient  $\theta \in ]0; \pi/2[$  et

$$u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}, v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes. Quelle est leur limite commune?

**Exercice 34** [00325] [Correction]

On pose

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \text{ et } v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.  
En déduire un équivalent de

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

**Exercice 35** [ 02272 ] [Correction]

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } S'_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

Montrer que les suites  $(S_n)$  et  $(S'_n)$  sont adjacentes.  
On peut montrer que leur limite commune est  $\pi^2/6$ , mais c'est une autre histoire...

**Exercice 36** [ 02275 ] [Correction]

(Moyenne arithmético-géométrique)

(a) Pour  $(a, b) \in \mathbb{R}^{+2}$ , établir :

$$2\sqrt{ab} \leq a + b.$$

(b) On considère les suites de réels positifs  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$u_0 = a, v_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $u_n \leq v_n$ ,  $u_n \leq u_{n+1}$  et  $v_{n+1} \leq v_n$ .

- (c) Établir que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers une même limite.  
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de  $a$  et  $b$  et est notée  $M(a, b)$ .
- (d) Calculer  $M(a, a)$  et  $M(a, 0)$  pour  $a \in \mathbb{R}_+$ .
- (e) Exprimer  $M(\lambda a, \lambda b)$  en fonction de  $M(a, b)$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ .

**Exercice 37** [ 00324 ] [Correction]

(Irrationalité de e) On pose pour  $n \geq 1$ ,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

- (a) Montrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes.
- (b) En exploitant l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à la fonction  $x \mapsto e^x$ , montrer que  $u_n \rightarrow e$ .
- (c) On suppose que  $e = p/q$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$ . En considérant  $q \cdot q! u_q$  et  $q \cdot q! v_q$  obtenir une absurdité.

## Suites extraites

**Exercice 38** [ 02276 ] [Correction]

On suppose que  $(u_n)$  est une suite réelle croissante telle que  $(u_{2n})$  converge.  
Montrer que  $(u_n)$  converge.

**Exercice 39** [ 02278 ] [Correction]

Justifier que la suite de terme général  $\cos(n)$  diverge.

**Exercice 40** [ 00327 ] [Correction]

Montrer que la suite de terme général  $\sin(n)$  diverge.

**Exercice 41** [ 02279 ] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que

$$\forall n, p \in \mathbb{N}^*, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{n+p}{np}.$$

Montrer que  $(u_n)$  tend vers 0.

## Limite de suites de solutions d'une équation

**Exercice 42** [ 02290 ] [Correction]

Soit  $n$  un entier naturel et  $E_n$  l'équation  $x + \tan x = n$  d'inconnue  $x \in ]-\pi/2; \pi/2[$ .

- (a) Montrer que l'équation  $E_n$  possède une solution unique notée  $x_n$ .
- (b) Montrer que la suite  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 43** [ 02288 ] [Correction]

Montrer que l'équation  $xe^x = n$  possède pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une unique solution  $x_n$  dans  $\mathbb{R}_+$ .

Étudier la limite de  $(x_n)$ .

**Exercice 44** [ 02291 ] [Correction]

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $E_n$  l'équation :  $x^n \ln x = 1$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

- (a) Montrer que l'équation  $E_n$  admet une unique solution  $x_n$ , et que  $x_n \geq 1$ .  
 (b) Montrer que la suite  $(x_n)$  est décroissante et converge vers 1.

**Exercice 45** [00314] [Correction]

Montrer que pour tout  $n \geq 1$ , l'équation

$$\frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}$$

possède une unique racine  $x_n$  dans  $]0; +\infty[$ . Déterminer  $\lim x_n$ .

**Exercice 46** [00315] [Correction]

Montrer que la relation  $nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1$  définit une suite positive  $(u_n)$  unique.

Étudier sa convergence et préciser sa limite.

**Expression du terme général d'une suite récurrente****Exercice 47** [02293] [Correction]

Donner l'expression du terme général et la limite de la suite récurrente réelle  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :

- (a)  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 1$   
 (b)  $u_0 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}$ .

**Exercice 48** [02294] [Correction]

Soit  $(x_n)$  et  $(y_n)$  deux suites réelles telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2} \text{ et } y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}.$$

En introduisant la suite complexe de terme général  $z_n = x_n + i.y_n$ , montrer que les suites  $(x_n)$  et  $(y_n)$  convergent et déterminer leurs limites.

**Exercice 49** [02295] [Correction]

Soit  $(z_n)$  une suite complexe telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n).$$

Montrer que  $(z_n)$  converge et exprimer sa limite en fonction de  $z_0$ .

**Exercice 50** [02296] [Correction]

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  les suites déterminées par  $u_0 = 1, v_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n.$$

- (a) Montrer que la suite  $(u_n - v_n)$  est constante.  
 (b) Prouver que  $(u_n)$  est une suite arithmético-géométrique.  
 (c) Exprimer les termes généraux des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 51** [03048] [Correction]

Étudier la suite  $(z_n)_{n \geq 0}$  définie par  $z_0 \in \mathbb{C}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

**Exercice 52** [02056] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)u_n.$$

Donner l'expression du terme général  $u_n$  de cette suite.

**Suites récurrentes linéaires d'ordre 2****Exercice 53** [02298] [Correction]

Donner l'expression du terme général de la suite récurrente complexe  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par :  $u_0 = 0, u_1 = 1 + 4i$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = (3 - 2i)u_{n+1} - (5 - 5i)u_n.$$

**Exercice 54** [02299] [Correction]

Donner l'expression du terme général des suites récurrentes réelles suivantes :

- (a)  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$   
 (b)  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = -1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$   
 (c)  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par  $u_0 = 1, u_1 = 2$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$ .

**Exercice 55** [02300] [Correction]

Soit  $\theta \in ]0; \pi[$ . Déterminer le terme général de la suite réelle  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 2 \cos \theta u_{n+1} + u_n = 0.$$

**Exercice 56** [02683] [Correction]

Déterminer les fonctions  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  vérifiant

$$\forall x > 0, f(f(x)) = 6x - f(x).$$

**Exercice 57** [05016] [Correction]

Déterminer les fonctions  $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  vérifiant

$$f(f(x)) + f(x) = 2x \text{ pour tout } x > 0.$$

## Étude de suites récurrentes

**Exercice 58** [02304] [Correction]

Étudier la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = a \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2.$$

**Exercice 59** [02305] [Correction]

Étudier la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

**Exercice 60** [02303] [Correction]

Étudier la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

**Exercice 61** [02307] [Correction]

Étudier la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

**Exercice 62** [02308] [Correction]

Étudier la suite  $(u_n)$  définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2 + u_n}.$$

**Exercice 63** [02309] [Correction]

Soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par

$$u_0 = a \in [-2; 2] \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}.$$

(a) Justifier que la suite  $(u_n)$  est bien définie et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [-2; 2].$$

(b) Quelles sont les limites finies possibles pour  $(u_n)$  ?

(c) Montrer que  $(|u_n - 1|)$  converge puis que  $\lim |u_n - 1| = 0$ . En déduire  $\lim u_n$ .

**Exercice 64** [02310] [Correction]

Soit  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $0 < |a| < 1$  et  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2 - u_n}.$$

Montrer que  $(u_n)$  est bien définie et  $|u_n| < 1$ . Étudier la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 65** [02312] [Correction]

Soit  $a > 0$  et  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 > 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2} \left( u_n + \frac{a}{u_n} \right).$$

(a) Étudier la convergence de la suite  $(u_n)$ .

(b) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}}.$$

Calculer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ , puis  $v_n$  en fonction de  $v_0$  et  $n$ .

(c) Montrer que, si  $u_0 > \sqrt{a}$ , on a

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq 2u_0.v_0^{2^n}.$$

Ainsi,  $u_n$  réalise une approximation de  $\sqrt{a}$  à la précision  $2u_0.v_0^{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

On peut alors par des calculs élémentaires, déterminer une approximation de  $\sqrt{a}$ .

**Exercice 66** [02313] [Correction]

On considère l'équation  $\ln x + x = 0$  d'inconnue  $x > 0$ .

- Montrer que l'équation possède une unique solution  $\alpha$ .
- Former, par l'algorithme de Newton, une suite récurrente réelle  $(u_n)$  convergeant vers  $\alpha$ .

**Exercice 67** [02311] [Correction]

Déterminer le terme général de la suite  $(u_n)$  définie par :

$$u_0 = a > 0, u_1 = b > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2}u_n = u_{n+1}^2.$$

À quelle condition  $(u_n)$  converge ?

**Exercice 68** [02301] [Correction]

Soit  $a \in \mathbb{R}_+^*$ . On définit une suite  $(u_n)$  par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}.$$

- Déterminer la limite de  $(u_n)$ .
- Déterminer la limite de  $u_{n+1} - u_n$ .

**Exercice 69** [03229] [Correction]

Soit  $(u_n)$  une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1/2; 1].$$

Soit  $(v_n)$  la suite déterminée par

$$v_0 = u_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n}.$$

Montrer que la suite  $(v_n)$  converge et déterminer sa limite.

**Exercice 70** [00328] [Correction]

Étudier la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4}u_n^2.$$

**Exercice 71** [00330] [Correction]

Soient  $a > 0$ ,

$$u_1 = \sqrt{a}, u_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, u_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}},$$

Montrer que  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 72** [00331] [Correction]

Soit

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + 1}{3}$$

et  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Justifier que l'équation  $f(x) = x$  possède trois racines réelles (qu'on n'exprimera pas).
- Étudier le signe de  $f(x) - x$  ainsi que la monotonie de  $f$ .
- Préciser le comportement de  $(u_n)$  en discutant selon la valeur de  $u_0$ .

**Exercice 73** [00332] [Correction]

Soient

$$f: x \mapsto \frac{x^3 + 3ax}{3x^2 + a}$$

(avec  $a > 0$ ) et  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Étudier les variations de  $f$ , le signe de  $f(x) - x$  et en déduire le comportement de  $(u_n)$ .

**Exercice 74** [00333] [Correction]

Soient  $u_0 \in ]0; 1[$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

Montrer que  $(u_n)$  est monotone de limite nulle. Déterminer les limites des suites dont les termes généraux sont les suivants

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 \text{ et } \prod_{k=0}^n (1 - u_k).$$

**Exercice 75** [00329] [Correction]

Soit  $(u_n)$  la suite définie par

$$u_0 \in ]0; 4[ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 4u_n - u_n^2.$$

- (a) Montrer que  $(u_n)$  est bornée. Quelles sont les limites possibles de  $(u_n)$  ?
- (b) Montrer que si  $(u_n)$  converge alors  $(u_n)$  est soit stationnaire égale à 0, soit stationnaire égale à 3.
- (c) En posant  $u_0 = 4 \sin^2 \alpha$ , déterminer les valeurs de  $u_0$  pour lesquelles la suite  $(u_n)$  est stationnaire.

**Exercice 76** [00336] [Correction]

Soient  $\rho \in \mathbb{R}_+$  et  $\theta \in ]-\pi; \pi]$ .

On considère la suite complexe  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$z_0 = \rho e^{i\theta} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}.$$

- (a) Exprimer  $z_n$  à l'aide d'un produit.
- (b) Déterminer la limite de la suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Exercice 77** [00337] [Correction]

Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les suites récurrentes réelles définies par :

$$u_0, v_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}, v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

Montrer que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers une même limite.

**Exercice 78** [00326] [Correction]

Pour  $\alpha \in ]0; \pi/2]$ , on étudie les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies par

$$\begin{cases} u_0 = \cos \alpha \\ v_0 = 1 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = (u_n + v_n)/2 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n}. \end{cases}$$

- (a) Établir que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_n = v_n \cos \frac{\alpha}{2^n} \text{ et } v_n = \prod_{k=1}^n \cos \frac{\alpha}{2^k}.$$

- (b) Étudier  $\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n$  et en déduire les limites de  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

**Exercice 79** [02783] [Correction]

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels positifs. On pose, pour tout  $n > 0$ ,

$$y_n = \sqrt{x_1 + \sqrt{x_2 + \cdots + \sqrt{x_n}}}.$$

- (a) Ici  $x_n = a$  pour tout  $n$ , où  $a > 0$ . Étudier la convergence de  $(y_n)$ .
- (b) Même question dans le cas où  $x_n = ab^{2^n}$  pour tout  $n$ , avec  $b > 0$ .
- (c) Montrer que  $(y_n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(x_n^{2^{-n}})$  est bornée.

**Exercice 80** [03165] [Correction]

Soient  $(a_n)$  une suite réelle positive, bornée et  $(u_n)$  la suite récurrente définie par

$$u_0 > 0 \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{u_n + a_n + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite  $(u_n)$  converge si, et seulement si, la suite  $(a_n)$  converge.

**Exercice 81** [00844] [Correction]

Montrer que la suite réelle  $(x_n)$  définie par  $x_0 \in [a; b]$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2}(f(x_n) + x_n)$$

où  $f$  est 1-lipschitzienne de  $[a; b]$  dans  $[a; b]$ , converge vers un point fixe de  $f$ .

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

On a l'encadrement

$$0 \leq a - u_n \leq (a - u_n) + (b - v_n) = (a + b) - (u_n + v_n) \rightarrow 0$$

donc  $u_n \rightarrow a$  puis

$$v_n = (u_n + v_n) - u_n \rightarrow (a + b) - a = b.$$

### Exercice 2 : [énoncé]

Supposons  $u_n + v_n \rightarrow \ell$  et  $u_n - v_n \rightarrow \ell'$ .

$$u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n) + \frac{1}{2}(u_n - v_n) \rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} \text{ et de même } v_n \rightarrow \frac{\ell - \ell'}{2}.$$

### Exercice 3 : [énoncé]

On a

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}((a + b) + |a - b|)$$

donc

$$\max(u_n, v_n) = \frac{1}{2}((u_n + v_n) + |u_n - v_n|) \rightarrow \max(\lim u_n, \lim v_n).$$

### Exercice 4 : [énoncé]

On a

$$0 \leq (u_n + v_n)^2 = u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 \leq 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \rightarrow 0.$$

Ainsi  $u_n + v_n \rightarrow 0$  puis

$$u_n v_n = (u_n + v_n)^2 - (u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) \rightarrow 0$$

et donc

$$u_n^2 + v_n^2 = 2(u_n^2 + u_n v_n + v_n^2) - (u_n + v_n)^2 \rightarrow 0$$

qui permet de conclure  $u_n \rightarrow 0$  et  $v_n \rightarrow 0$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

On a

$$u_n v_n \leq u_n, v_n \leq 1.$$

Par le théorème d'encadrement on obtient

$$\lim u_n = \lim v_n = 1.$$

### Exercice 6 : [énoncé]

Puisque  $|u_{n+1}/u_n| \rightarrow 0 < 1/2$ , il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  vérifiant

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}/u_n| \leq 1/2$$

c'est-à-dire

$$\forall n \geq N, |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|.$$

On a alors par récurrence

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \frac{1}{2^{n-N}}|u_N|$$

et donc par comparaison  $u_n \rightarrow 0$ .

### Exercice 7 : [énoncé]

Montrons que la suite  $(u_n)$  converge vers 0 par l'épsilon-tique...

Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque la suite  $(\varepsilon_n)$  converge vers 0, il existe un rang  $N \in \mathbb{N}$  pour lequel

$$\forall n \geq N, 0 \leq \varepsilon_n \leq \varepsilon$$

et alors pour tout  $n \geq N$

$$0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon}{K}.$$

On en déduit

$$0 \leq u_{n+2} \leq \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^p \frac{\varepsilon}{K^i}.$$

La suite  $(u_n)$  est majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+p} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K} \frac{1 - (1/K)^p}{1 - 1/K} \leq \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K - 1}.$$

Pour  $p$  assez grand, on a  $1/K^p \leq \varepsilon$  et alors

$$0 \leq u_{n+p} \leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K - 1} = \lambda \varepsilon$$

avec  $\lambda$  une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

**Exercice 8 : [énoncé]**

(a)

$$u_n = \frac{1 - (-2/3)^n}{1 + (-2/3)^n} \rightarrow 1.$$

(b)

$$u_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}} = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}} \rightarrow 1.$$

(c)

$$u_n = \frac{1 - \sqrt{1 + 1/n^2}}{1 + \sqrt{1 - 1/n^2}} \rightarrow 0.$$

(d)

$$u_n = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

**Exercice 9 : [énoncé]**(a)  $u_n = e^{n \ln(1+1/n)}$  or  $n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1/n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \rightarrow 1$  car  $\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ .Par suite  $u_n \rightarrow e$ .(b)  $u_n = e^{\frac{2}{n} \ln n} \rightarrow 1$  car  $\frac{\ln n}{n} \rightarrow 0$ .(c)  $\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} = e^{\frac{1}{n} \ln(\sin \frac{1}{n})}$  or  $\frac{1}{n} \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \rightarrow 0$  donc  $\left(\sin \frac{1}{n}\right)^{1/n} \rightarrow 1$ .(d)  $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{2}{n+1})}$  or  $n \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \sim -2 \rightarrow -2$  donc  $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n \rightarrow e^{-2}$ .**Exercice 10 : [énoncé]**(a)  $|u_n| \leq \frac{1}{n-1} \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .(b)  $0 \leq u_n \leq \frac{1 \cdot 2 \dots n}{n \cdot n \dots n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .(c)  $\frac{n-1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n-1}$  avec  $\frac{n-1}{n+1}, \frac{n+1}{n-1} \rightarrow 1$  donc  $u_n \rightarrow 1$ .(d) Pour  $n \geq 3$ ,  $0 \leq u_n \leq \left(\frac{e}{3}\right)^n \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .(e)  $1 \leq u_n \leq \sqrt[n]{3} = e^{\frac{1}{n} \ln 3} \rightarrow 1$  donc  $u_n \rightarrow 1$ .**Exercice 11 : [énoncé]**(a)  $S_n \geq \sum_{k=1}^n 1 = n \rightarrow +\infty$ (b)  $S_n \geq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$ .(c)  $0 \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .(d)  $0 \leq S_n \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{(n+1)^2} \rightarrow 0$ .(e)  $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+k} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2+1}$  donc  $\frac{n}{n+1} \leq S_n \leq \frac{n}{n^2+1}$  puis  $u_n \rightarrow 1$ .(f)  $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq S_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$  par le théorème des gendarmes :  $S_n \rightarrow 1$ .(g)  $S_n = n! - (n-1)! + (n-2)! + \dots + (-1)^n$ . Par regroupement de termes.Si  $n$  est pair alors  $S_n \geq n! - (n-1)!$  et si  $n$  est impair  $S_n \geq n! - (n-1)! - 1$ .Puisque  $n! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)! \rightarrow +\infty$ , on a  $S_n \rightarrow +\infty$ .**Exercice 12 : [énoncé]** $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 1^m$  et  $\lim_{m \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 1$ . $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m = 0$ . $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln(1 - \frac{1}{n})} \rightarrow e^{-1}$ .**Exercice 13 : [énoncé]**(a) Soit  $\rho = \frac{\ell+1}{2}$  de sorte que  $\ell < \rho < 1$ .Comme  $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow \ell < \rho$ , il existe un rang  $N$  au delà duquel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \rho.$$

On a alors

$$0 \leq u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \dots \frac{u_{N+1}}{u_N} u_N \leq \rho^{n-N} u_N \rightarrow 0$$

donc  $u_n \rightarrow 0$ .On peut aussi raisonner en observant que la suite  $(u_n)$  est décroissante à partir d'un certain rang, donc convergente et que sa seule limite possible est nulle.

(b) Même démarche mais par minoration ou par croissance.

(c)  $u_n = n$ ,  $u_n = 1$  et  $u_n = 1/n$  sont des exemples prouvant qu'on ne peut rien dire.

**Exercice 14 :** [énoncé]

(a) On a

$$\int_p^{p+1} \frac{dx}{x} \leq \int_p^{p+1} \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}$$

car la fonction décroissante  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est majorée par  $\frac{1}{p}$  sur  $[p; p+1]$ .  
Par un argument semblable

$$\int_{p-1}^p \frac{dx}{x} \geq \int_{p-1}^p \frac{dx}{p} = \frac{1}{p}.$$

Pour  $n \geq 1$ ,

$$\int_{n+k}^{n+k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n+k} \leq \int_{n+k-1}^{n+k} \frac{dx}{x}$$

donne en sommant

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} \leq S_n \leq \int_n^{2n} \frac{dx}{x}.$$

Or

$$\int_{n+1}^{2n+1} \frac{dx}{x} = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2$$

et

$$\int_n^{2n} \frac{dx}{x} = \ln 2$$

donc  $S_n \rightarrow \ln 2$ .

(b) On a

$$S'_{2n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \left( \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} \right)$$

donc

$$S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} = S_n.$$

Par suite  $S'_{2n} \rightarrow \ln 2$ . De plus  $S'_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} \rightarrow \ln 2$  donc

$$S'_n \rightarrow \ln 2.$$

**Exercice 15 :** [énoncé]

On a

$$u_n = 1 + \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} + \frac{1}{n} + 1.$$

Or pour  $k \in \{2, \dots, n-2\}$ ,

$$\binom{n}{k} \geq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=2}^{n-2} \binom{n}{k}^{-1} \leq \frac{2(n-3)}{n(n-1)} \rightarrow 0$$

puis  $u_n \rightarrow 2$ .

**Exercice 16 :** [énoncé]

(a)

$$\binom{n+p+2}{n+2} = \frac{n+p+2}{n+2} \binom{n+p+1}{n+1}$$

d'où la relation.

(b) Par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$  :

Pour  $n = 1$  :

$$S_1 = \frac{1}{\binom{p+1}{1}} \text{ et } \frac{1}{p-1} (1 - (p+2) \frac{2}{(p+2)(p+1)}) = \frac{1}{p+1}$$

ok

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 1$ .

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \stackrel{HR}{=} \frac{1}{p-1} (1 - (n+p+1)u_{n+1}) + u_{n+1} = \frac{1}{p-1} (1 - (n+2)u_{n+1}) = \frac{1}{p-1}$$

Récurrence établie.

(c)

$$0 \leq v_n = \frac{n+p}{\binom{n+p}{n}} = \frac{n!p!}{(n+p-1)!} \leq \frac{p!}{n+1} \rightarrow 0.$$

(d) Par opérations

$$S_n \rightarrow \frac{1}{p-1}.$$

**Exercice 17 : [énoncé]**

On a

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z)(1+z)(1+z^2) \dots (1+z^{2^n}).$$

Or  $(1-z)(1+z) = 1-z^2$  donc

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z^2)(1+z^2) \dots (1+z^{2^n}).$$

En répétant la manipulation

$$(1-z) \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = (1-z^{2^{n+1}}).$$

Or  $z^{2^{n+1}} \rightarrow 0$  donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n (1+z^{2^k}) = \frac{1}{1-z}.$$

**Exercice 18 : [énoncé]**

Exploitions

$$S_n = e^{u_n} + e^{v_n} \rightarrow 2 \text{ et } P_n = e^{u_n} \cdot e^{v_n} = e^{u_n+v_n} \rightarrow 1.$$

Les nombres  $e^{u_n}$  et  $e^{v_n}$  sont solutions de l'équation

$$(X - e^{u_n})(X - e^{v_n}) = 0 \text{ i.e. } X^2 - S_n X + P_n = 0.$$

À l'ordre près, on peut exprimer  $e^{u_n}$  et  $e^{v_n}$  à partir du discriminant de cette équation. Or  $S_n \rightarrow 2$  et  $P_n \rightarrow 1$ , le discriminant tend alors vers 0 et les deux suites tendent vers 1. On en déduit  $u_n \rightarrow 0$  puis  $v_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 19 : [énoncé]**En exploitant la formule  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ 

$$\sin \frac{a}{2^n} P_n = \frac{1}{2} \sin \frac{a}{2^{n-1}} \cos \frac{a}{2^{n-1}} \dots \cos \frac{a}{2} = \dots = \frac{1}{2^n} \sin(a).$$

Si  $a = 0$  alors  $P_n = 1 \rightarrow 1$ .Si  $a \neq 0$  alors, pour  $n$  assez grand,  $\sin(a/2^n) \neq 0$  et

$$P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin \frac{a}{2^n}}.$$

Puisque

$$\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \cos(0) = 1$$

on a

$$\frac{\sin a/2^n}{a/2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

puis

$$P_n = \frac{\sin(a)}{2^n \sin \frac{a}{2^n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(a)}{a}$$

car

$$2^n \sin \frac{a}{2^n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n \frac{a}{2^n} = a.$$

**Exercice 20 : [énoncé]**(a)  $u_n = \exp(\ln n/n) \rightarrow 1$ .

(b)

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp(x + o(1)) \rightarrow e^x.$$

(c)

$$u_n = \exp\left((n+2) \ln\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)\right) = \exp(-2 + o(1)) \rightarrow e^{-2}.$$

(d)

$$u_n = -2n^2 \sin\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)/2\right) \sin\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)/2\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0.$$

(e)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{n}\right) = 1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

donc

$$u_n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{2\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(2\alpha + o(1)) \rightarrow e^{2\alpha}.$$

(f)

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n \ln n} + o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)\right)^{n \ln n} \rightarrow e.$$

(g)

$$\sqrt[n]{2} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln 2\right) = 1 + \frac{1}{n} \ln 2 + o(1).$$

$$u_n = \left(1 + \frac{\ln 24}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \rightarrow \sqrt[3]{24}.$$

(h) Par le théorème des accroissements finis

$$\ln(\arctan(n+1)) - \ln(\arctan n) = \frac{1}{1+c^2} \frac{1}{\arctan c}$$

avec  $n \leq c \leq n+1$  donc

$$u_n = \exp\left(n^2 \frac{1}{1+c^2} \frac{1}{\arctan c}\right) \rightarrow e^{2/\pi}.$$

**Exercice 21 : [énoncé]**

En développant  $\ln(1 - 1/n)$

$$u_n = \cos\left(\pi n + \frac{\pi}{2} + o(1)\right) = (-1)^{n+1} \sin(o(1)) \rightarrow 0.$$

**Exercice 22 : [énoncé]**

Si  $a \in ]0; 1[$ , la suite est constante égale à 0.

Si  $a = 1$ , la suite est constante égale à 1.

Si  $a > 1$  alors  $a^n - 1 < [a^n] \leq a^n$  donne  $(a^n - 1)^{1/n} < [a^n]^{1/n} \leq a$  et donc, par encadrement, la suite converge vers  $a$ .

**Exercice 23 : [énoncé]**

$\forall A \in \mathbb{R}_+$ , l'ensemble  $E = \{n \in \mathbb{N} \mid u_n < A\}$  est fini car il contient au plus  $E(A) + 1$  éléments.

Par suite il possède un plus grand élément  $N$  et alors  $\forall n \geq N + 1, u_n \notin E$  donc  $u_n \geq A$ . Ainsi  $u_n \rightarrow +\infty$ .

**Exercice 24 : [énoncé]**

(a) Si  $\alpha > 1$  alors  $0 \leq u_n \leq \frac{n}{n^\alpha+1} \rightarrow 0$  donc  $u_n \rightarrow 0$ .

Si  $\alpha < 1$  alors  $u_n \geq \frac{n}{n^\alpha+n^\alpha} = \frac{1}{2}n^{1-\alpha} \rightarrow +\infty$  donc  $u_n \rightarrow +\infty$ .

(b)  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > 0$  donc  $(u_n)$  est croissante. De plus  $u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$  donc  $(u_n)$  est majorée et par conséquent convergente.

(c)

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \leq -\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{n+k}\right)\right) = -\ln \frac{n}{2n} = \ln 2$$

et

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) = \ln \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow \ln 2$$

donc  $u_n \rightarrow \ln 2$ .

**Exercice 25 : [énoncé]**

(a) Il suffit de dresser le tableau de variation des fonctions  $x \mapsto \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2$  et  $x \mapsto x - \ln(1+x)$ .

(b)

$$\ln u_n \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}$$

et

$$\ln u_n \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{n^4}\right) = \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^3} \rightarrow \frac{1}{2}$$

donc

$$u_n \rightarrow \sqrt{e}.$$

**Exercice 26 : [énoncé]**

(a) La suite  $(u_n)$  est croissante car

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \geq 0$$

et  $u_n \leq \frac{np}{n+1} \leq p$  donc  $(u_n)$  converge vers une limite  $\ell$ .

(b) Commençons par le cas où  $f'(0) = 0$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $x \in [0; \alpha]$  on ait  $|f'(x)| \leq \varepsilon$  et par l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\forall x \in [0; \alpha], |f(x)| \leq \varepsilon|x|.$$

On a alors

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{np} \frac{\varepsilon}{n+k} \leq p\varepsilon$$

et donc  $v_n \rightarrow 0$ .

Pour le cas général, il suffit d'introduire  $g(x) = f(x) - xf'(0)$ . Puisque  $g'(0) = 0$ , on a

$$\sum_{k=1}^{np} g\left(\frac{1}{n+k}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et donc

$$v_n - u_n f'(0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et finalement  $v_n \rightarrow \ell f'(0)$ .

(c) Pour  $f(x) = \ln(1+x)$ ,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \rightarrow \ln(p+1).$$

On conclut  $\ell = \ln(p+1)$ .

(d) Pour  $f(x) = \sqrt{x}$ ,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \geq \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \rightarrow +\infty.$$

**Exercice 27 : [énoncé]**

On exprime  $u_n$  en fonction de  $v_n = u_n + \frac{1}{u_n}$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on vérifie

$$u_n^2 - v_n u_n + 1 = 0$$

ce qui permet d'observer  $u_n$  comme solution d'une équation du second degré. Les racines de celle-ci sont <sup>1</sup>

$$\frac{v_n - \sqrt{v_n^2 - 4}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{v_n + \sqrt{v_n^2 - 4}}{2}.$$

1. On peut affirmer que  $\Delta = v_n^2 - 4$  est positif, soit parce que l'on sait que l'équation du second admet au moins la solution  $(u_n)$ , soit parce que l'inégalité  $x + 1/x \geq 2$  pour  $x > 0$  est classique.

Il existe donc une suite  $(\varepsilon_n)$  de réels égaux à 1 ou  $-1$  telle que

$$u_n = \frac{v_n + \varepsilon_n \sqrt{v_n^2 - 4}}{2} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite  $(v_n)$  convergeant vers 2 et  $(\varepsilon_n)$  étant bornée, on conclut par opérations que la suite  $(u_n)$  tend vers 1.

**Exercice 28 : [énoncé]**

(a)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{nu_{n+1} - (u_1 + \dots + u_n)}{n(n+1)} \geq 0$$

donc  $(v_n)$  est croissante.

(b)

$$v_{2n} = \frac{u_1 + \dots + u_n}{2n} + \frac{u_{n+1} + \dots + u_{2n}}{2n} \geq \frac{v_n}{2} + \frac{u_n}{2}.$$

(c) On a  $v_n \leq \ell$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $(v_n)$  croissante donc  $(v_n)$  converge vers un réel  $\ell' \leq \ell$ .

La relation précédente, passée à la limite, donne  $2\ell' \geq \ell + \ell'$  ce qui permet de conclure  $v_n \rightarrow \ell$ .

**Exercice 29 : [énoncé]**

$(u_n)$  converge donc  $(u_n)$  est bornée. La suite  $(v_n)$  est donc bien définie et elle-même bornée.

On a  $v_{n+1} \leq v_n$  donc  $(v_n)$  est décroissante et donc converge.

Posons  $\ell = \lim u_n$  et  $\ell' = \lim v_n$ .

$v_n \geq u_n$  donc à la limite  $\ell' \geq \ell$ .

Si  $\ell' > \ell$  alors  $\ell' > \frac{\ell + \ell'}{2} > \ell$ .

À partir d'un certain rang  $v_n > \frac{\ell + \ell'}{2}$  et  $u_n < \frac{\ell + \ell'}{2}$ . Impossible. Il reste  $\ell' = \ell$ .

**Exercice 30 : [énoncé]**

On a

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

$(H_n)$  est croissante car  $H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$ .

Si  $(H_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $H_{2n} - H_n \rightarrow \ell - \ell = 0$ . Ceci est impossible puisque  $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$ .

Par suite  $(H_n)$  diverge, et puisque  $(H_n)$  est croissante,  $(H_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

**Exercice 31 : [énoncé]**

(a)

$$u_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(b) On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{4(n+1)^2} = \frac{2n+1}{2n+2} \leq 1$$

donc  $(u_n)$  est décroissante. Or  $(u_n)$  est minorée par 0 donc  $(u_n)$  converge.

(c)

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{n+2}{n+1} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = \frac{n+2}{n+1} \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^2$$

or  $(n+2)(2n+1)^2 - 4(n+1)^3 = -3n - 2 < 0$  donc  $v_{n+1} - v_n \leq 0$ .

$(v_n)$  est décroissante et minorée par 0 donc  $(v_n)$  converge.

Nécessairement  $\lim u_n = 0$  car sinon  $v_n = (n+1)u_n^2 \rightarrow +\infty$ .

(d) Par télescopage des facteurs

$$\prod_{k=2}^{2n} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2n-1}{2n} = \frac{1}{2n}.$$

Parallèlement

$$u_n^2 = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right)^2 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{2k}\right) \left(1 - \frac{1}{2k-1}\right) = \frac{1}{2} \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k}\right).$$

Ainsi,  $2u_n^2$  est supérieur au produit.

(e) On en déduit

$$(n+1)u_n^2 \geq \frac{(n+1)}{4n}$$

et donc  $C \geq 1/4$ .

On peut montrer que  $C = 1/\pi$  en exploitant dès la première question la formule de Stirling (si celle-ci est connue...).

**Exercice 32 : [énoncé]**

(a) Si  $a \geq 1$  alors  $u_n \geq 2^n \rightarrow +\infty$  donc  $u_n \rightarrow +\infty$ .

(b)  $u_n > 0$  et  $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$  donc  $(u_n)$  est croissante. De plus

$$u_n \leq e^a e^{a^2} \dots e^{a^n} = \exp\left(a \frac{1-a^n}{1-a}\right) \leq \exp\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

donc  $(u_n)$  est majorée et par suite convergente.

**Exercice 33 : [énoncé]**

Via  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ , on obtient

$$u_n = 2^{n+1} \sin \frac{\theta}{2^{n+1}} \cos \frac{\theta}{2^{n+1}} \leq u_{n+1}.$$

Via  $\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$ , on obtient

$$v_n = 2^{n+1} \frac{\tan(\theta/2^{n+1})}{1 - \tan^2(\theta/2^{n+1})} \geq v_{n+1}$$

$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  et  $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$  donc  $u_n \rightarrow \theta$  et  $v_n \rightarrow \theta$  d'où  $v_n - u_n \rightarrow 0$ .

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes de limite commune égale à  $\theta$ .

**Exercice 34 : [énoncé]**

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq 0.$$

De même  $v_{n+1} - v_n \geq 0$  et aisément  $v_n - u_n \rightarrow 0$  d'où l'adjacence de ces deux suites.

Notons  $\ell$  leur limite commune, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \ell + o(1) = 2\sqrt{n} + o(\sqrt{n}) \sim 2\sqrt{n}.$$

**Exercice 35 : [énoncé]**

On a

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0.$$

$$S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} \leq 0$$

et

$$S'_n - S_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

**Exercice 36 :** [énoncé]

- (a)  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$  donne l'inégalité demandée.
- (b) Pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq \frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2} = v_n$  en vertu de a.  
 $u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \geq \sqrt{u_n^2} = u_n$  et  $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \leq \frac{2v_n}{2} = v_n$ .
- (c) La suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante et majorée par  $v_1$  donc elle converge vers une limite notée  $\ell$ .  
 La suite  $(v_n)_{n \geq 1}$  est décroissante et minorée par  $u_1$  donc elle converge vers une limite notée  $\ell'$ .  
 En passant la relation  $v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$  à la limite, on obtient  $\ell' = \frac{\ell+\ell'}{2}$  d'où  $\ell = \ell'$ .
- (d) Si  $b = a$  alors les deux suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont constantes égales à  $a$  et donc  $M(a, a) = a$ .  
 Si  $b = 0$  alors la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  est constante égale à 0 et donc  $M(a, 0) = 0$ .
- (e) Notons  $(u'_n)$  et  $(v'_n)$  les suites définies par le procédé précédent à partir de  $u'_0 = \lambda a$  et  $v'_0 = \lambda b$ .  
 Par récurrence,  $u'_n = \lambda u_n$  et  $v'_n = \lambda v_n$  donc  $M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b)$ .

**Exercice 37 :** [énoncé]

- (a) Aisément  $(u_n)$  est croissante  $(v_n)$  décroissante et  $v_n - u_n \rightarrow 0$ .
- (b) Par l'inégalité de Taylor-Lagrange, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{M_{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec  $M_{n+1} = \sup_{x \in [0;1]} |(e^x)^{(n+1)}| = e$ . Pour  $x = 1$ , on obtient

$$|e - u_n| \leq \frac{e}{(n+1)!} \rightarrow 0$$

donc  $u_n \rightarrow e$ .

- (c) Par la stricte monotonie des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  on a  $u_n < e < v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
 $q \cdot q! u_q$  est un entier et  $q \cdot q! v_q$  est l'entier consécutif. Or  $q \cdot q! u_q < q \cdot q! e < q \cdot q! v_q$   
 donc  $q \cdot q! e$  ne peut être entier. Or  $q \cdot q! e = p \cdot q! \in \mathbb{N}$ . Absurde.

**Exercice 38 :** [énoncé]

La suite  $(u_n)$  étant croissante, elle admet une limite (finie ou infinie).  
 La suite  $(u_{2n})$  qui en est extraite a la même limite.  
 Or  $(u_{2n})$  converge, il en est donc de même de  $(u_n)$ .

**Exercice 39 :** [énoncé]

Par l'absurde, supposons  $\cos(n) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ .

$$\cos(p) + \cos(q) = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

donne

$$\cos(n+1) + \cos(n-1) = 2 \cos n \cos(1).$$

À la limite on obtient  $2\ell = 2\ell \cos(1)$  d'où  $\ell = 0$ .

Or  $\cos 2n = 2 \cos^2 n - 1$  donne alors à la limite  $0 = -1$ . Absurde.

**Exercice 40 :** [énoncé]

Par l'absurde, supposons  $\sin(n) \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ .

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

donne

$$\sin(n+1) - \sin(n-1) = 2 \sin(1) \cos(n).$$

À la limite, on obtient  $\cos(n) \rightarrow 0$ .

Or  $\cos(2n) = 2 \cos^2(n) - 1$  donne alors à la limite  $0 = -1$ . Absurde.

**Exercice 41 :** [énoncé]

D'une part

$$0 \leq u_{2n} \leq \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} \rightarrow 0.$$

D'autre part

$$0 \leq u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{n(n+1)} \rightarrow 0.$$

On en déduit  $u_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 42 :** [énoncé]

- (a) Le tableau de variation de  $f: x \mapsto x + \tan x$  permet d'affirmer que cette fonction réalise une bijection croissante de  $]-\pi/2; \pi/2[$  vers  $\mathbb{R}$ . L'équation  $E_n$  possède alors pour solution unique

$$x_n = f^{-1}(n).$$

(b) On a  $x_n + \tan x_n = n$  avec  $x_n \in ]-\pi/2; \pi/2[$  donc

$$x_n = \arctan(n - x_n).$$

Or  $n - x_n \rightarrow +\infty$  car  $(x_n)$  bornée et donc

$$x_n \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

#### Exercice 43 : [énoncé]

Soit  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = xe^x$ .

$f$  est dérivable et  $f'(x) = (x+1)e^x > 0$  donc  $f$  est strictement croissante.

$f(0) = 0$  et  $\lim_{+\infty} f = +\infty$  donc l'équation  $xe^x = n$  possède une unique solution  $x_n$ .

$$x_n = f^{-1}(n) \rightarrow +\infty.$$

#### Exercice 44 : [énoncé]

(a) Le tableau de variation de  $f_n: x \mapsto x^n \ln x$  permet d'affirmer que l'équation  $f_n(x) = 1$  possède une unique solution  $x_n$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que de plus  $x_n \in [1; +\infty[$ .

(b)  $1 = x_{n+1}^{n+1} \ln x_{n+1} = x_{n+1} f_n(x_{n+1})$  donc  $f_n(x_{n+1}) = \frac{1}{x_{n+1}} \leq 1 = f_n(x_n)$  donc  $x_{n+1} \leq x_n$  car  $f$  est strictement croissante sur  $[1; +\infty[$ .

La suite  $(x_n)$  est décroissante et minorée par 1 donc elle converge. Posons  $\ell$  sa limite, on a  $\ell \geq 1$

Si  $\ell > 1$  alors  $x_n^n \ln x_n \geq \ell^n \ln \ell \rightarrow +\infty$  ce qui est absurde car  $x_n^n \ln x_n = 1$ . Il reste  $\ell = 1$ .

#### Exercice 45 : [énoncé]

On pose  $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ . On observe que  $f_n(0) = -1$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$  et  $f'_{n+1} = f_n$ . La propriété est vrai pour  $n = 1$  et si elle est vrai au rang  $n$ , le tableau de signe de  $f_n$  permet d'assurer que  $f_{n+1}$  est décroissante (et donc strictement négative) sur  $[0; x_n]$  puis strictement croissante sur  $[x_n; +\infty[$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut assurer que  $f$  s'annule en un  $x_{n+1} > x_n$  et celui-ci est unique.

La suite  $(x_n)$  est croissante. Si elle est majorée alors elle converge vers un réel  $\ell$  et  $\frac{x_n}{n!} \rightarrow 0$ . Or la suite de terme général est  $\sum_{k=0}^n \frac{x_n^k}{k!}$  est croissante et strictement positive. Elle ne peut donc converger vers 0. Par conséquent la suite  $(x_n)$  n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers  $+\infty$ .

#### Exercice 46 : [énoncé]

L'étude des variations de la fonction  $x \mapsto nx^{n+1} - (n+1)x^n$  assure l'existence et l'unicité de  $u_n > 0$  vérifiant la relation

$$nu_n^{n+1} - (n+1)u_n^n = 1.$$

De plus on peut affirmer  $u_n \geq 1$ .

Puisque

$$u_n^n(n(u_n - 1) - 1) = 1 \text{ et } u_n^n \geq 1$$

on a

$$n(u_n - 1) - 1 \leq 1$$

puis

$$0 \leq u_n - 1 \leq 2/n$$

permet de conclure  $u_n \rightarrow 1$ .

#### Exercice 47 : [énoncé]

(a) Posons  $v_n = u_n + 1$ .  $(v_n)$  est géométrique de raison 2 et  $v_0 = 1$  donc  $u_n = 2^n - 1 \rightarrow +\infty$ .

(b) Posons  $v_n = u_n - 1$ .  $(v_n)$  est géométrique de raison 1/2 et  $v_0 = -1$  donc  $u_n = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1$ .

#### Exercice 48 : [énoncé]

On a

$$z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n$$

donc

$$z_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n z_0.$$

Or  $\left|\frac{1+i}{2}\right| < 1$  donc  $z_n \rightarrow 0$  puis  $x_n, y_n \rightarrow 0$ .

#### Exercice 49 : [énoncé]

Introduisons  $x_n = \operatorname{Re}(z_n)$  et  $y_n = \operatorname{Im}(z_n)$ . On a

$$x_{n+1} = x_n \text{ et } y_{n+1} = -\frac{y_n}{3}$$

$x_n \rightarrow x_0$  et  $y_n \rightarrow 0$  donc  $z_n \rightarrow \operatorname{Re}(z_0)$ .

**Exercice 50 :** [énoncé]

- (a)  $u_{n+1} - v_{n+1} = u_n - v_n$  et  $u_0 - v_0 = -1$  donc  $(u_n - v_n)$  est constante égale à  $-1$ .
- (b)  $v_n = u_n + 1$  donc  $u_{n+1} = 5u_n + 2$ . La suite  $(u_n)$  est arithmético-géométrique.
- (c)  $u_{n+1} - a = 5(u_n - a) + 4a + 2$ . Pour  $a = -1/2$ ,  $(u_n - a)$  est géométrique de raison  $5$  et de premier terme  $3/2$ . Ainsi

$$u_n = \frac{3 \cdot 5^n - 1}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \cdot 5^n + 1}{2}.$$

**Exercice 51 :** [énoncé]

On peut écrire  $z_0 = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho \geq 0$  et  $\theta \in ]-\pi; \pi]$   
 On a alors

$$z_1 = \rho \frac{1 + e^{i\theta}}{2} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}, z_2 = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} e^{i\frac{\theta}{4}}, \dots, z_n = \rho e^{i\frac{\theta}{2^n}} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k}.$$

Si  $\theta = 0$  alors  $z_n = \rho \rightarrow \rho$ .  
 Sinon, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sin \frac{\theta}{2^n} \neq 0$  et

$$\sin \frac{\theta}{2^n} \prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n}$$

par exploitations successives de l'identité  $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ .  
 On en déduit

$$\prod_{k=1}^n \cos \frac{\theta}{2^k} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Finalement

$$z_n \rightarrow \rho \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

**Exercice 52 :** [énoncé]

$u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 3, \dots$   
 Par récurrence, on montre aisément

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n + 1.$$

**Exercice 53 :** [énoncé]

$(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 - (3 - 2i)r + (5 - 5i) = 0$ .  
 On obtient

$$u_n = (2 + i)^n - (1 - 3i)^n.$$

**Exercice 54 :** [énoncé]

Ce sont des suites récurrentes linéaire d'ordre 2 dont le terme général s'obtient à partir de la résolution de l'équation caractéristique associée.

- (a)  $u_n = 2^n(1 - n)$ .
- (b)  $u_n = -3 + 2^{2-n}$ .
- (c)  $u_n = 2 \cos \frac{(n-1)\pi}{3}$ .

**Exercice 55 :** [énoncé]

$(u_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - 2 \cos \theta r + 1 = 0$$

de solutions  $r = e^{i\theta}$  et  $r = e^{-i\theta}$ .  
 Par suite, il existe  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \cos n\theta + \beta \sin n\theta$$

$n = 0$  donne  $\alpha = 1$  et  $n = 1$  donne  $\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta = 1$  donc

$$\beta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{2 \sin^2 \theta / 2}{\sin \theta} = \tan \frac{\theta}{2}.$$

Finalement

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \cos n\theta + \tan \frac{\theta}{2} \sin n\theta = \frac{\cos((2n-1)\theta/2)}{\cos(\theta/2)}.$$

**Exercice 56 :** [énoncé]

Soit  $f$  une fonction solution.  
 Pour  $x > 0$ , on considère la suite  $(u_n)$  déterminée par

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

La suite  $(u_n)$  est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence linéaire

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

Les racines de l'équation caractéristique associée sont 2 et  $-3$  de sorte qu'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda 2^n + \mu(-3)^n.$$

Puisque la suite  $(u_n)$  n'est formée que de réels strictement positifs, il est nécessaire que  $\mu$  soit nul.

Après résolution cela donne  $f(x) = 2x$ .

Inversement, cette fonction est bien solution.

### Exercice 57 : [énoncé]

Soit  $f$  une fonction solution.

*On exprime le terme général des suites récurrentes de fonction itératrice  $f$ .*

Pour  $x > 0$ , on introduit la suite  $(u_n)$  déterminée par

$$u_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

La suite  $(u_n)$  est formée de réels strictement positifs et satisfait la relation de récurrence

$$u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

La suite  $(u_n)$  est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique  $r^2 + r - 2 = 0$  de racines 1 et  $-2$ . Il existe alors deux réels  $\lambda$  et  $\mu$  tels que

$$u_n = \lambda 1^n + \mu(-2)^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Cependant, la suite  $(u_n)$  n'est formée que de nombres strictement positifs, le réel  $\mu$  est donc nécessairement nul. La suite  $(u_n)$  est alors constante égale à  $x$  et, en particulier,  $u_1 = f(x) = x$ .

Finalement, la fonction  $f$  est l'identité de  $\mathbb{R}_+^*$ . La réciproque est immédiate.

### Exercice 58 : [énoncé]

On a  $u_0 = a, u_1 = a^2, u_2 = a^4$ , par récurrence  $u_n = a^{2^n}$ .

Pour  $|a| < 1$  alors  $u_n \rightarrow 0$ , pour  $|a| = 1$ ,  $u_n \rightarrow 1$  et pour  $|a| > 1$ ,  $u_n \rightarrow +\infty$ .

### Exercice 59 : [énoncé]

La suite  $(u_n)$  est bien définie et supérieure à 1 à partir du rang 1 car la fonction itératrice  $f: x \mapsto x^2 + 1$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[1; +\infty[$ .

$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - u_n + 1 \geq 0$  car le discriminant de  $x^2 - x + 1$  est  $\Delta = -3 < 0$ .

La suite  $(u_n)$  est croissante.

Si celle-ci converge vers un réel  $\ell$  alors en passant à la limite la relation d'itération :  $\ell = \ell^2 + 1$ .

Or cette équation ne possède pas de racines réelles. Par suite  $(u_n)$  diverge, or elle est croissante, donc  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

### Exercice 60 : [énoncé]

Pour tout  $n \geq 1$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+u_{n-1}}}.$$

Puisque  $u_1 - u_0 = \sqrt{2} - \sqrt{1} \geq 0$ , la suite  $(u_n)$  est croissante.

Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$  donne à la limite  $\ell = \sqrt{1+\ell}$  donc  $\ell^2 - \ell - 1 = 0$  et  $\ell \geq 0$ .

Par suite

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \alpha.$$

Par récurrence on montre aisément que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \alpha$  et par suite  $(u_n)$  converge vers  $\alpha$ .

### Exercice 61 : [énoncé]

La suite  $(u_n)$  est bien définie car sa fonction itératrice  $f: x \mapsto e^x - 1$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

Pour  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} - u_n = e^{u_n} - e^{u_{n-1}}$  est du signe de  $u_n - u_{n-1}$ .

La suite  $(u_n)$  est monotone et de monotonie déterminée par le signe de

$$u_1 - u_0 = e^{u_0} - u_0 - 1.$$

Étudions la fonction  $g(x) = e^x - x - 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$g$  est dérivable et  $g'(x) = e^x - 1$  du signe de  $x$ .  $g(0) = 0$  donc  $g$  est positive.

Si  $u_0 = 0$  alors  $(u_n)$  est constante égale à 0.

Si  $u_0 > 0$  alors  $(u_n)$  est croissante. Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  alors  $\ell = e^\ell - 1$  donc  $\ell = 0$ .

Or  $(u_n)$  est minorée par  $u_0 > 0$  donc ne peut converger vers 0. Par suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

Si  $u_0 < 0$  alors  $(u_n)$  est croissante et majorée par 0 donc  $(u_n)$  converge vers la seule limite finie possible 0.

**Exercice 62 : [énoncé]**

La suite  $(u_n)$  est bien définie et strictement positive car de fonction itératrice  $f: x \mapsto \frac{1}{2+x}$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Si la suite  $(u_n)$  converge, sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = \frac{1}{2+\ell}$  et  $\ell \geq 0$  donc  $\ell = -1 + \sqrt{2}$ .

$$|u_{n+1} - \ell| = \left| \frac{1}{2+u_n} - \frac{1}{2+\ell} \right| = \frac{|u_n - \ell|}{(2+u_n)(2+\ell)} \leq \frac{1}{4}|u_n - \ell|.$$

Par récurrence, on montre  $|u_n - \ell| = \frac{1}{4^n}|u_0 - \ell|$  et on conclut  $u_n \rightarrow \ell$ .

**Exercice 63 : [énoncé]**

- (a) L'application  $x \mapsto \sqrt{2-x}$  est définie de  $[-2; 2]$  vers  $[0; 2] \subset [-2; 2]$ .
- (b) Supposons  $u_n \rightarrow \ell$ . Puisque  $\forall n \geq 1, u_n \in [0; 2]$ , à la limite  $\ell \in [0; 2]$ .  
La relation  $u_{n+1} = \sqrt{2-u_n}$  donne à la limite  $\ell = \sqrt{2-\ell}$  donc  $\ell^2 + \ell - 2 = 0$   
d'où  $\ell = 1$  ou  $\ell = -2$ .  
Or  $\ell \geq 0$  donc  $\ell = 1$ .

(c)

$$|u_{n+1} - 1| = \frac{|u_n - 1|}{1 + \sqrt{2-u_n}} \leq |u_n - 1|$$

donc  $(|u_n - 1|)$  est décroissante et par suite converge vers  $\alpha \geq 0$ .  
Si  $\alpha > 0$  alors

$$1 + \sqrt{2-u_n} = \frac{|u_n - 1|}{|u_{n+1} - 1|} \rightarrow 1$$

donc  $\sqrt{2-u_n} \rightarrow 0$  puis  $u_n \rightarrow 2$ . C'est impossible.  
Nécessairement  $|u_n - 1| \rightarrow 0$  et donc  $u_n \rightarrow 1$ .

**Exercice 64 : [énoncé]**

Par récurrence montrons  $u_n$  existe et  $|u_n| < 1$ .  
Pour  $n = 0$  : ok  
Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 0$ .  
Par HR,  $u_n$  existe et  $|u_n| < 1$  donc  $2 - u_n \neq 0$  d'où  $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$  existe et

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{|2-u_n|} \leq \frac{|u_n|}{2-|u_n|} < 1.$$

Récurrence établie.

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2-|u_n|} \leq |u_n|$$

donc  $(|u_n|)$  est décroissante d'où  $|u_n| \leq |a|$  puis

$$|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2-|a|}$$

puis

$$|u_n| \leq \left( \frac{1}{2-|a|} \right)^n |a| \rightarrow 0.$$

Par suite  $u_n \rightarrow 0$ .

**Exercice 65 : [énoncé]**

La suite  $(u_n)$  est bien définie et à valeurs dans  $[\sqrt{a}; +\infty[$  à partir du rang 1 car de fonction itératrice

$$f: x \mapsto \frac{1}{2} \left( x + \frac{a}{x} \right)$$

définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  et à valeurs dans  $[\sqrt{a}; +\infty[$ .

Si  $(u_n)$  converge vers un réel  $\ell$  alors  $\ell = \frac{1}{2} \left( \ell + \frac{a}{\ell} \right)$  et  $\ell \geq 0$  donc  $\ell = \sqrt{a}$ .

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2} \left| u_n + \frac{a}{u_n} - \sqrt{a} \right| = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2|u_n|} = \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{2} \frac{|u_n - \sqrt{a}|}{u_n}.$$

Pour  $n \geq 1$ ,

$$\frac{|u_n - \sqrt{a}|}{u_n} = \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n} \leq 1$$

donc

$$|u_{n+1} - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2} |u_n - \sqrt{a}|.$$

Par récurrence :

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |u_1 - \sqrt{a}|$$

donc  $u_n \rightarrow \sqrt{a}$ .

b)

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - \sqrt{a}}{u_{n+1} + \sqrt{a}} = \frac{u_n^2 - 2\sqrt{a}u_n + a}{u_n^2 + 2\sqrt{a}u_n + a} = \left( \frac{u_n - \sqrt{a}}{u_n + \sqrt{a}} \right)^2 = v_n^2$$

donc  $v_n = v_0^{2^n}$ .

c)

$$|u_n - \sqrt{a}| \leq v_n |u_n + \sqrt{a}| \leq 2u_0 v_n = 2u_0 v_0^{2^n}.$$

**Exercice 66 :** [énoncé]

- (a)  $f: x \mapsto \ln x + x$  réalise une bijection strictement croissante de  $\mathbb{R}_+^*$  vers  $\mathbb{R}$ .  
L'équation proposée possède une unique solution  $\alpha = f^{-1}(0)$ .
- (b) L'algorithme de Newton, propose de définir la suite  $(u_n)$  par la relation :

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} = u_n - \frac{\ln u_n + u_n}{1/u_n + 1} = \frac{u_n(1 - \ln u_n)}{u_n + 1}.$$

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x} + 1$  et  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$  ne s'annulent pas.

Pour  $u_0 > 0$  tel que  $f(u_0)f''(u_0) \geq 0$ , la suite converge vers  $\alpha$ .

**Exercice 67 :** [énoncé]

Par récurrence, on montre que  $u_n$  existe et  $u_n > 0$ . La relation de récurrence donne alors

$$\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

La suite  $(u_{n+1}/u_n)$  est constante égale à  $u_1/u_0 = b/a$ . La suite  $(u_n)$  est donc géométrique de raison  $b/a$  et finalement

$$u_n = a \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

La suite  $(u_n)$  converge si, et seulement si,  $b \leq a$ .

**Exercice 68 :** [énoncé]

- (a) Pour  $n \geq 1$  :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k} - \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k} = \frac{u_n}{\sqrt{\sum_{k=0}^n u_k} + \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k}} \geq 0$$

donc  $(u_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

Supposons  $u_n \rightarrow \ell \in \mathbb{R}$ . On a  $\ell \geq u_1 = \sqrt{a} > 0$

En passant la relation précédente à la limite :  $0 = \frac{\ell}{\ell + \ell} = \frac{1}{2}$ . C'est absurde.

Par suite  $u_n \rightarrow +\infty$ .

- (b)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{u_{n+1} + u_n}$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{1}{u_{n+1} + u_n} \rightarrow 0.$$

Par suite  $u_{n+1} \sim u_n$  et

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_{n+1}/u_n + 1} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

**Exercice 69 :** [énoncé]

On vérifie sans difficultés que la suite  $(v_n)$  est définie et que ses termes sont positifs.

De plus, on vérifie par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq 1$$

car

$$(1 - u_{n+1})(1 - v_n) \geq 0 \implies \frac{v_n + u_{n+1}}{1 + u_{n+1}v_n} \leq 1.$$

On a alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1}(1 - v_n^2)}{1 + u_{n+1}v_n} \geq 0$$

et la suite  $(v_n)$  est donc croissante et majorée. Par conséquent celle-ci converge vers une certaine limite  $\ell \in \mathbb{R}$ .

Dans le cas où la suite  $(u_n)$  est constante égale à 1, on observe que  $\ell = 1$ .

Peut-être est-ce encore vrai dans le cas général? Pour le voir, étudions la suite  $(1 - v_n)$ . On a

$$0 \leq 1 - v_{n+1} = \frac{(1 - u_{n+1})(1 - v_n)}{1 + u_{n+1}v_n} \leq \frac{1}{2}(1 - v_n)$$

donc par récurrence

$$0 \leq 1 - v_n \leq \frac{1}{2^n}(1 - v_0)$$

et on en déduit

$$v_n \rightarrow 1.$$

**Exercice 70 :** [énoncé]

Si  $(u_n)$  converge sa limite  $\ell$  vérifie  $\ell = 1 + \ell^2/4$  d'où  $\ell = 2$ .

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}(u_n - 2)^2 \geq 0$$

$(u_n)$  est croissante.

Si  $u_0 > 2$  alors  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

Si  $u_0 \in [0; 2]$  alors on vérifie aisément que  $(u_n)$  est majorée par 2 et on conclut  $u_n \rightarrow 2$ .

**Exercice 71 : [énoncé]**

$u_{n+1} \geq u_n$  donc  $(u_n)$  est croissante. Par récurrence montrons  $u_n \leq a + 1$ . La relation est vraie pour  $n = 1$  et l'hérédité s'obtient par

$$u_{n+1} = \sqrt{a + u_n} \leq \sqrt{2a + 1} \leq a + 1.$$

**Exercice 72 : [énoncé]**

(a) Il suffit de dresser le tableau de variation de  $f$ . On note  $\alpha < \beta < \gamma$  ces trois racines.

(b)  $f$  est croissante et 

|            |          |         |          |
|------------|----------|---------|----------|
| $x$        | $\alpha$ | $\beta$ | $\gamma$ |
| $f(x) - x$ | -        | 0       | +        |

(c)  $u_n \leq u_{n+1} \implies f(u_n) \leq f(u_{n+1})$  donc  $u_0 \leq f(u_0) \implies (u_n)$  croissante.  
De même  $u_n \geq u_{n+1} \implies f(u_n) \geq f(u_{n+1})$  donc  $u_0 \geq f(u_0) \implies (u_n)$  décroissante.

Les seules limites finies possibles pour  $(u_n)$  sont  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Enfin si  $u_0 \leq \alpha$  (resp.  $\beta, \gamma$ ) alors pour tout  $n, u_n \leq \alpha$  (resp.  $\beta, \gamma$ ) et de même pour  $\geq$ .

Au final on peut conclure :

$u_0 \in ]-\infty; \alpha[$  donne  $(u_n)$  décroissant vers  $-\infty$ .

$u_0 = \alpha$  donne  $(u_n)$  constante égale à  $\alpha$ .

$u_0 \in ]\alpha; \gamma[$  donne  $(u_n)$  convergeant vers  $\beta$ .

$u_0 = \gamma$  donne  $(u_n)$  constante égale à  $\gamma$ .

$u_0 \in ]\gamma; +\infty[$  donne  $(u_n)$  croissant vers  $+\infty$ .

**Exercice 73 : [énoncé]**

$f'(x)$  est du signe de  $3(x^2 - a)^2$  donc  $f$  est croissante et par suite  $(u_n)$  est monotone.

Les racines de l'équation  $f(x) = x$  sont  $0, \sqrt{a}$  et  $-\sqrt{a}$ . Ce sont les seules limites possibles pour  $(u_n)$ .

$f(x) - x$  est du signe de  $ax - x^3 = -x(x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$ .

Si  $u_0 \in ]0; \sqrt{a}[$  la suite est croissante est majorée par  $\sqrt{a}$  donc converge vers  $\sqrt{a}$

Si  $u_0 \in [\sqrt{a}; +\infty[$  la suite est décroissante et minorée par  $\sqrt{a}$  donc converge vers  $\sqrt{a}$ .

**Exercice 74 : [énoncé]**

$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$  donc  $(u_n)$  est décroissante. Aisément, on montre que  $u_n \in ]0; 1[$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc on peut conclure que  $(u_n)$  converge. Sa limite  $\ell$  vérifie

$$\ell = \ell - \ell^2$$

d'où  $\ell = 0$ .

$$\sum_{k=0}^n u_k^2 = \sum_{k=0}^n u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1} \rightarrow u_0$$

et

$$\prod_{k=0}^n (1 - u_k) = \prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{n+1}}{u_0} \rightarrow 0.$$

**Exercice 75 : [énoncé]**

(a) On observe que  $x \mapsto 4x - x^2$  est une application de  $[0; 4]$  dans lui-même. Par suite  $u_n \in [0; 4]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Si  $(u_n)$  converge alors, en posant  $\ell$  sa limite, on a  $\ell = 4\ell - \ell^2$  d'où  $\ell = 0$  ou  $\ell = 3$ .

(b) Supposons que  $u_n \rightarrow 0$ . S'il existe un rang  $n$  tel que  $u_n = 0$  alors la suite  $(u_n)$  est stationnaire égale à 0. Sinon on a  $u_n > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et donc  $u_{n+1} - u_n \sim 3u_n > 0$ . Ainsi, à partir d'un certain rang, la suite est strictement croissante. De même si  $u_n \rightarrow 3$  sans être stationnaire égale à 3, on observe que la suite  $|u_n - 3|$  est strictement croissante à partir d'un certain rang.

(c) On obtient aisément  $u_n = 4 \sin^2 2^n \alpha$ . La suite est stationnaire si, et seulement si, il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $u_n = 0$  ou 3 i.e.  $\sin^2(2^n \alpha) = 0, \sqrt{3}/2, -\sqrt{3}/2$  soit encore  $2^n \alpha = k\pi/3$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Ainsi les  $u_0$  pour lesquels la suite est stationnaire sont les  $\sin(k\pi/3 \cdot 2^n)$  avec  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 76 : [énoncé]**

(a)  $z_1 = \frac{\rho e^{i\theta} + \rho}{2} = \rho \cos \frac{\theta}{2} e^{i\frac{\theta}{2}}$ . Par ce principe :

$$z_n = \rho \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} e^{i\frac{\theta}{2^n}}$$

(b)  $e^{i\frac{\theta}{2^n}} \rightarrow 1$  et en employant  $\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$

$$\cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{4} \cdots \cos \frac{\theta}{2^n} = \frac{\sin \theta}{2^n \sin \frac{\theta}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin \theta}{\theta} \text{ (ou 1 si } \theta = 0).$$

Finalement,

$$z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \rho \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

**Exercice 77 :** [énoncé]

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont bien définies et à termes positifs. Sachant

$$\forall a, b \in \mathbb{R}_+, \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

on a

$$\forall n \geq 1, u_n \leq v_n$$

puis

$$u_{n+1} \geq u_n \text{ et } v_{n+1} \leq v_n.$$

Les suites  $(u_n)_{n \geq 1}$  et  $(v_n)_{n \geq 1}$  sont respectivement croissante et décroissante et on a

$$\forall n \geq 1, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

Par convergence monotone,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers des limites  $\ell$  et  $\ell'$ . En passant la relation

$$v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

à la limite on obtient  $\ell = \ell'$ .

**Exercice 78 :** [énoncé]

(a) Exploiter  $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$  et raisonner par récurrence.

(b)

$$\sin \frac{\alpha}{2^n} v_n = \frac{1}{2^n} \sin \alpha$$

via  $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ . Par suite

$$v_n \sim \frac{\sin \alpha}{2^n \sin(\alpha/2^n)} \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}$$

et aussi

$$u_n \rightarrow \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

**Exercice 79 :** [énoncé]

Notons que la suite  $(y_n)$  est croissante, elle est donc convergente si, et seulement si, elle est majorée.

(a) Ici  $y_{n+1} = \sqrt{a + y_n}$ . Soit  $\ell$  la racine positive de l'équation  $\ell^2 - \ell - a = 0$  i.e.

$$\ell = \frac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}.$$

On remarque que  $y_1 = \sqrt{a} \leq \ell$  et on montre par récurrence  $y_n \leq \ell$ . La suite  $(y_n)$  est croissante et majorée donc convergente.

(b) On observe que la nouvelle suite  $(y_n)$  est désormais égale à  $b$  fois la précédente, elle est donc convergente.

(c) Si  $(y_n)$  converge vers  $\ell$  alors  $x_n^{2^{-n}} \leq y_n \leq \ell$  donc  $(x_n^{2^{-n}})$  est bornée.

Si  $(x_n^{2^{-n}})$  est bornée par un certain  $M$  alors  $x_n \leq M^{2^n}$ , la suite  $(y_n)$  définie par  $(x_n)$  est alors inférieure à celle obtenue par  $(M^{2^n})$ , cette dernière étant convergente, la suite  $(y_n)$  converge.

**Exercice 80 :** [énoncé]

Posons

$$M = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n.$$

On vérifie aisément que la suite  $(u_n)$  est bien définie et que pour tout  $n \geq 2$

$$\frac{1}{M+2} \leq u_n \leq 1.$$

Supposons la convergence de la suite  $(u_n)$ . Sa limite est strictement positive. En résolvant l'équation définissant  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$ , on obtient

$$a_n = \frac{1}{u_{n+1}} - u_n - 1.$$

On en déduit que la suite  $(a_n)$  converge.

Inversement, supposons que la suite  $(a_n)$  converge vers une limite  $\ell$ ,  $\ell \geq 0$ .

Considérons la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_0 = 1 \text{ et } v_{n+1} = \frac{1}{v_n + \ell + 1} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

On vérifie que la suite  $(v_n)$  est bien définie et à termes strictement positifs.

L'équation

$$x = \frac{1}{x + \ell + 1}$$

possède une racine  $L > 0$  et on a

$$|v_{n+1} - L| \leq \frac{|v_n - L|}{1 + L}$$

ce qui permet d'établir que la suite  $(v_n)$  converge vers  $L$ . Considérons ensuite la suite  $(\alpha_n)$  définie par

$$\alpha_n = u_n - v_n.$$

On a

$$\alpha_{n+1} = \frac{\alpha_n + (\ell - a_n)}{(u_n + a_n + 1)(v_n + \ell + 1)}$$

et donc

$$|\alpha_{n+1}| \leq k(|\alpha_n| + |a_n - \ell|)$$

avec

$$k = \frac{1}{m+1} \in [0; 1[$$

où  $m > 0$  est un minorant de la suite convergente  $(v_n)$ .

Par récurrence, on obtient

$$|\alpha_n| \leq k^n |\alpha_0| + \sum_{p=0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .

Puisque la suite  $(a_n)$  converge vers  $\ell$ , il existe  $p_0$  tel que

$$\forall p \geq p_0, |a_p - \ell| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\sum_{p=p_0}^{n-1} k^{n-p} |a_p - \ell| \leq \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} k^p = \frac{k\varepsilon}{1-k}.$$

Pour  $n$  assez grand

$$\sum_{p=0}^{p_0-1} k^{n-p} |a_p - \ell| = C^{te} k^n \leq \varepsilon \text{ et } k^n |\alpha_0| \leq \varepsilon$$

et on en déduit

$$|\alpha_n| \leq 2\varepsilon + \frac{k\varepsilon}{1-k}.$$

Ainsi  $\alpha_n \rightarrow 0$  et par conséquent

$$u_n \rightarrow L.$$

### Exercice 81 : [énoncé]

La fonction itératrice de cette suite récurrente est

$$g: x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + x).$$

On vérifie aisément que cette fonction est définie sur  $[a; b]$  et à valeurs dans  $[a; b]$ . On en déduit que la suite  $(x_n)$  est bien définie et que c'est une suite d'éléments de  $[a; b]$ .

On a

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(f(x_n) - f(x_{n-1})) + (x_n - x_{n-1}))}{2}.$$

Puisque  $f$  est 1-lipschitzienne, on a

$$|f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq |x_n - x_{n-1}|$$

et donc  $x_{n+1} - x_n$  est du signe de  $x_n - x_{n-1}$ . Par conséquent, la suite  $(x_n)$  est monotone et sa monotonie découle du signe de  $x_1 - x_0$ . La suite  $(x_n)$  étant de plus bornée, elle converge vers une certaine limite  $\ell$  avec  $\ell \in [a; b]$ .

La relation

$$x_{n+1} = \frac{x_n + f(x_n)}{2}$$

donne à la limite sachant  $f$  continue

$$\ell = \frac{\ell + f(\ell)}{2}$$

donc  $f(\ell) = \ell$ .