# Axe radical de deux cercles

Dans ce problème $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ désignent des cercles. On convient de noter systématiquement $\Omega,\Omega',\Omega''$ leurs centres et $R,R',R''>0$ leurs rayons respectifs.

*Partie I - Puissance d'un point par rapport à un cercle*

On appelle puissance d'un point $M$ du plan pour un cercle $\mathcal{C}$ le réel $p_{\mathcal{C}}(M)=\Omega M^2-R^2$ .

On remarque que le cercle $\mathcal{C}$ est la réunion des points $M$ tels que $p_{\mathcal{C}}(M)=0$ .

1. Une droite $\mathcal{D}$ issue d'un point $M$ du plan coupe un cercle $\mathcal{C}$ en deux points $A$ et $B$ distincts.
   On note $A'$ le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à $A$ .
   Montrer que $\overline{MA}.\overline{MB}=\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=p_{\mathcal{C}}(M)$ .
2. Soit $\mathcal{C}$ un cercle, $M$ un point extérieur à ce cercle.
   On note $T$ et $S$ les points de contacts des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de $M$ .

2.a Comment peut-on construire à la règle et au compas les points $T$ et $S$ ?

2.b Montrer que $MT^2=MS^2=p_{\mathcal{C}}(M)$

3. Soit $A,B,C,D$ quatre points distincts tels que les droites $(AB)$ et $(CD)$ ne soient pas parallèles.
   On note $M$ le point de concours des droites $(AB)$ et $(CD)$ .
   Montrer que les points $A,B,C,D$ sont cocycliques si et seulement si $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MC}.\overline{MD}$ .

*Partie II - Axe radical de deux cercles*

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ désignent deux cercles non concentriques.

1. On note $\Delta$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que $p_{\mathcal{C}'}(M)=p_{\mathcal{C}}(M)$ .

1.a On introduit $I$ point milieu du segment $[\Omega,\Omega']$.

Montrer qu'un point $M$ appartient à $\Delta$ ssi $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{IM}=k$ avec $k$ une constante à préciser.

1.b En déduire que $\Delta$ est une droite orthogonale à la droite $(\Omega\Omega')$ .

Cette droite est appelé axe radical des cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ .

2. *Construction de l'axe radical dans le cas de cercles sécants :*

2.a On suppose les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sécants en deux points $A$ et $B$ distincts.
Déterminer l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ .

2.b On suppose les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents en un point $A$ .
Déterminer l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ .

3. On se donne trois cercles $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ de centres $\Omega,\Omega',\Omega''$ non alignés.
   On note $\Delta$ (resp. $\Delta',\Delta''$ ) les axes radicaux des cercles $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ (resp. $\mathcal{C}''$ et $\mathcal{C}$ , $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ )
   Justifier que $\Delta,\Delta',\Delta''$ concourent en un point $R$ .
   Ce point est appelé centre radical des cercles $\mathcal{C},\mathcal{C}',\mathcal{C}''$ .
4. *Construction de l'axe radical dans le cas de cercles disjoints :*
   On suppose ici que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont disjoints.
   Donner une construction géométrique de l'axe radical de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ basée sur l'introduction d'un troisième cercle sécant à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ .