Hypocycloïde

On considère deux nombres réels strictement positifs R et α avec $\alpha < 1$ auxquels on associe le réel $r = \alpha R$.
Dans toute la suite, on suppose le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ et on considère :

- le point A de coordonnées $(R,0)$,
- le cercle C de centre O et de rayon R,
- le cercle γ centré sur la demi-droite $[O,\vec{i})$, de rayon r et tangent intérieurement à C en A.

De plus, pour tout nombre réel t, on considère :

- le cercle $\gamma(t)$ centré sur la demi-droite d'angle polaire t, rayon r, et tangent intérieurement à C,
- le point $\omega(t)$ centre du cercle $\gamma(t)$,
- le point $C(t)$ en lequel les cercles $\gamma(t)$ et C sont tangents.

Il est recommandé aux candidats de construire une figure claire faisant apparaître ces différents éléments.

On fait rouler sans glisser le cercle γ à l'intérieur du cercle fixe C en supposant qu'il coïncide à l'instant t avec le cercle $\gamma(t)$ et on étudie la trajectoire $H(\alpha)$ du point lié au cercle γ situé en A à l'instant 0. On désigne par $M(t)$ la position de ce point à l'instant t (au moment où γ coïncide avec le cercle $\gamma(t)$).

Dans la partie I, on détermine un paramétrage complexe de $H(\alpha)$.
Dans les parties II et III, on étudie cette trajectoire pour des valeurs particulières de α.

Partie I

1. L'hypothèse de roulement sans glissement se traduit, par définition, par l'égalité à tout instant t des deux longueurs des arc orientés $M(t)C(t)$ et $AC(t)$ des cercles $\gamma(t)$ et C.

1.a Préciser la longueur commune des longueurs de ces deux arcs orientés.

1.b En déduire des mesures des angles orientés $(\overrightarrow{\omega(t)M(t)},\overrightarrow{\omega(t)C(t)})$ et $(\vec{i},\overrightarrow{\omega(t)M(t)})$ en fonction de t.

2. Déterminer les affixes des points $C(t)$ et $\omega(t)$.

3. En écrivant $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{O\omega(t)} + \overrightarrow{\omega(t)M(t)}$, déterminer l'affixe $z(t)$ du point $M(t)$ en fonction de t,R,α.

On vérifiera en particulier l'égalité suivante pour $\alpha = 1/3$:

$$z(t) = \frac{R}{3}(2e^{it} + e^{-2it})$$

Partie II : Cas $\alpha = 1/3$, la deltoïde

On suppose ici $\alpha = 1/3$.

1. Comparer $z(t+2\pi/3)$ et $z(t)$ puis $z(-t)$ et $z(t)$.
   Que peut-on en conclure géométriquement et sur quel intervalle I suffit-il d'étudier $H(1/3)$?
2. Déterminer l'affixe $z'(t)$ du vecteur dérivé, préciser son module et un argument pour t appartenant à I.
   En déduire les valeurs de t appartenant à I pour lesquelles le point $M(t)$ est régulier.
3. Etudier les variations de $x(t) = \mathrm{Re}(z(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(z(t))$ pour t appartenant à I.
4. Préciser les tangentes aux points de paramètre 0 et $\pi/3$.
   Observer que la tangente en $M(\pi/3)$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{OM(\pi/3)}$.
5. Construire la trajectoire $H(1/3)$ de $M(t)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$.

Partie III : Cas $\alpha = 1/4$, l'astroïde

On suppose ici $\alpha = 1/4$.

1. Justifier que $x(t) = \mathrm{Re}(z(t)) = R\cos^3 t$ et $y(t) = \mathrm{Im}(z(t)) = R\sin^3 t$.
2. Comparer $M(t+\pi)$ et $M(t)$ d'une part puis $M(-t)$ et $M(t)$.
   Sur quel intervalle J suffit d'étudier $H(1/4)$?
3. Etudier les variations de $x(t)$ et $y(t)$ pour t appartenant à J.
4. Quelles sont les points singuliers $M(t)$ avec t dans J. Quelles sont les tangentes en ces points ?
5. Construire la trajectoire $H(1/4)$ de $M(t)$ lorsque t varie dans $\mathbb{R}$.
6. Soit $M(t)$ un point régulier de l'arc $H(1/4)$. La tangente en ce point coupe les axes (Ox) et (Oy) en deux points $A(t)$ et $B(t)$. Calculer la distance $A(t)B(t)$.