Interpolation et polynômes factoriels

Notations :

n est un entier naturel fixé, $n \geq 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n .

Partie I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) \text{ et } T(f)(x) = f(x+1) .$$

On admettra (aisément !) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ (donc si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}^*$:

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1} \text{ et } T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1} .$$

1. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P .
Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P .

2. On note Δ_n la restriction de Δ au départ de E_n .

2.a Vérifier que Δ_n réalise un endomorphisme de E_n .

2.b Déterminer $\ker \Delta_n$.
En déduire le rang de Δ_n et déterminer $\mathrm{Im}\,\Delta_n$.

3. Déduire des questions précédentes que l'endomorphisme Δ est surjectif.

Partie II

1. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par :

2. $$\forall x \in \mathbb{R}, N_0(x) = 1 \text{ et } N_k(x) = \frac{x(x-1)...(x-k+1)}{k!} .$$

1.a Pour $k \geq 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction de l'un des polynômes $(N_j)_{j \geq 0}$.

1.b Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$ puis $(\Delta^j(N_k))(0)$.

2.a Montrer que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de E_n .

2.b Soit $P \in E_n$, P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + ... + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Exprimer les a_j en fonction des $(\Delta^j(P))(0)$.

3. Applications :
On pose $P(x) = x^2$. Déterminer les coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ P(x) = aN_0(x) + bN_1(x) + cN_2(x)$$

et en déduire une fonction polynôme Q telle que $\Delta(Q) = P$.

Exploiter celle-ci pour exprimer $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

4. Soit $f \in \mathcal{F}$.

4.a Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, $(T^k(f))(x)$.

4.b Etant donné $n \in \mathbb{N}$, expliciter $\Delta^n(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leq k \leq n$.

(on pourra remarquer que $\Delta = T - \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$).

4.c En déduire que $(\Delta^n(f))(0)$ ne dépend que des valeurs de f aux points $0,1,\dots,n$.

Partie III

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant :

$$(\mathcal{P}) : \begin{cases} \deg P \leq n \\ \forall k \in \{0,1,\dots,n\}, P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose :

$$N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x-j) = x(x-1)\dots(x-n) .$$

1. Soit l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \varphi : E_n &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\mapsto (P(0),\dots,P(n)) \end{aligned}$$

Montrer que φ est un isomorphisme.

1.b En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2.a Pour $j \in \{0,1,\dots,n\}$, comparer $(\Delta^j(f))(0)$ et $(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b En déduire l'expression de P_f en fonction des $(\Delta^j(f))(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note :

$$M_{n+1} = \sup\left\{ \left| f^{(n+1)}(t) \right|, t \in [0,n] \right\} .$$

3.a Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que :

$$\exists \xi \in [0,n], f(x) - P_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} N(x) .$$

On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$ et appliquer judicieusement le théorème de Rolle.

3.b En déduire que $\forall x \in [0,n], \left| f(x) - P_f(x) \right| \leq \dfrac{1}{n+1} M_{n+1}$

On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$.