Correction

Partie I

1.a Soit $D = D(O,r)$.
$\forall A,B \in D$. Soit $M \in [A,B]$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $M = \text{bar}\big((A,\lambda),(B,(1-\lambda)\big)$.
$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1-\lambda)\overrightarrow{OB}$ donc $OM \le \lambda OA + (1-\lambda)OB \le r$ puis $M \in D$ et finalement $[A,B] \subset D$.
Ainsi D est convexe.

1.b Soit F un demi-plan délimité par une droite $\mathcal{D}$.
$\forall A,B \in F$. Si $A = B$ alors $[A,B] \subset F$.
Si $A \ne B$ alors notons $\Delta = (AB)$.
Si $\Delta // \mathcal{D}$ alors $\Delta \subset F$ puis $[A,B] \subset F$.
Sinon Δ coupe la droite $\mathcal{D}$ en un point O et $\Delta \cap F$ est une demi-droite d'origine O.
Les points A et B étant dans F sont sur cette demi-droite et le segment $[A,B]$ étant alors inclus dans la demi-droite est inclus dans F. Finalement F est convexe.
Notons qu'on peut aussi résoudre cette question en visualisant F par l'intermédiaire d'un paramétrage ou sous tout autre forme valable.

1.c Soit $C = conv(A_1, A_2, \dots, A_n)$.
$\forall A,B \in C$. On peut écrire $A = \text{bar}\big((A_i,\alpha_i)\big)_{1\le i\le n}$ et $B = \text{bar}\big((A_i,\beta_i)\big)_{1\le i\le n}$ avec $\alpha_i \ge 0$ et $\beta_i \ge 0$ tels que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$ et $\beta_1 + \cdots + \beta_n = 1$.
Soit $M \in [A,B]$. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $M = \text{bar}\big((A,\lambda),(B,1-\lambda)\big)$.
Par associativité du barycentre :
$M = \text{bar}\big((A_i, \lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i)\big)_{1\le i\le n}$ avec $\lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i \ge 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda\alpha_i + (1-\lambda)\beta_i = 1$.
Donc $M \in C$ puis $[A,B] \subset C$.
Finalement C est convexe.

2.a $\forall A,B \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, on a $[A,B] \subset \mathcal{C}$ et $[A,B] \subset \mathcal{C}'$ car $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ convexes. Donc $[A,B] \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$.
Finalement $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ est convexe.

2.b Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$: Une combinaison convexe d'un point est égal à ce point et la propriété est donc immédiate.
Supposons la propriété établie au rang $n \ge 1$.
Soit $A_1, \dots, A_n, A_{n+1}$ des points de $\mathcal{C}$ et M une combinaison convexe des ces points.
On peut écrire $M = \text{bar}\big((A_i,\alpha_i)\big)_{1\le i\le n+1}$ avec $\alpha_i \ge 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$.
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$ alors $M = A_{n+1} \in \mathcal{C}$.
Sinon $\lambda = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \ne 0$.
Posons $N = \text{bar}\big((A_i,\alpha_i)\big)_{1\le i\le n}$. On a $N = \text{bar}\left((A_i, \frac{\alpha_i}{\lambda})\right)_{1\le i\le n}$ et par HR, $N \in \mathcal{C}$.
Par associativité du barycentre : $M = \text{bar}\big((N, \alpha_1 + \cdots + \alpha_n),(A_{n+1},\alpha_{n+1})\big)$ donc $M \in [N, A_{n+1}] \subset \mathcal{C}$.
Récurrence établie.

3.a F_1, F_2, F_3 sont des convexes contenant les points A_1, A_2, A_3 donc $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ est un convexe qui contient aussi A_1, A_2, A_3. En vertu de I.2.b, toute combinaison convexe de A_1, A_2, A_3 appartient encore à $F_1 \cap F_2 \cap F_3$ et donc $\mathcal{T} \subset F_1 \cap F_2 \cap F_3$.

3.b Dans $\mathcal{R}$ on a : $A_1(0,0), A_2(1,0)$ et $A_3(0,1)$. Par suite $F_1 : x + y \le 1$, $F_2 : x \ge 0$ et $F_3 : y \ge 0$.

3.c Soit $M(x,y)\in F_1\cap F_2\cap F_3$. On a $x,y\geq 0$, $x+y\leq 1$ et $\overrightarrow{A_1M}=x\overrightarrow{A_1A_2}+y\overrightarrow{A_1A_3}$.

Donc $(1-(x+y))\overrightarrow{A_1M}+x\overrightarrow{A_2M}+y\overrightarrow{A_2M}=\vec{o}$ ce qui donne $M=\text{bar}\big((A_1,\alpha_1),(A_2,\alpha_2),(A_3,\alpha_3)\big)$ avec $\alpha_1=1-(x+y)\geq 0,\alpha_2=x$ et $\alpha_3=y\geq 0$.

M est donc une combinaison convexe des points A_1,A_2,A_3 et donc $M\in\mathcal{T}$.

Ainsi $F_1\cap F_2\cap F_3\subset\mathcal{T}$ puis $F_1\cap F_2\cap F_3=\mathcal{T}$.

4.a On a $\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}+\overrightarrow{A_3O}=\vec{o}$.

Si $O\in(A_1A_2)$ alors $A_3\in(A_1A_2)$ car $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{A_1O}+\overrightarrow{A_2O}$.

Ceci est exclu car A_1,A_2,A_3 sont supposés non alignés. Ainsi $O\notin(A_1A_2)$.

De même $O\notin(A_2A_3)$ et $O\notin(A_1A_3)$

4.b Posons $r=\min\big\{d(O,(A_1A_2)),d(O,(A_2A_3)),d(O,(A_1A_3))\big\}>0$.

On a $D(O,r)\subset F_1,F_2,F_3$ donc $D(O,r)\subset F_1\cap F_2\cap F_3=\mathcal{T}$.

Partie II

1.a Si $M=O$ alors $\forall A\in\mathcal{A},(\overrightarrow{OO}\mid\overrightarrow{OA})=0\leq 1$ donc $M=O\in\mathcal{A}^*$.

$\forall M,N\in\mathcal{A}^*$. Soit $P\in[M,N]$. Il existe $\lambda\in[0,1]$ tel que $P=\text{bar}\big((M,\lambda),(N,1-\lambda)\big)$.

$\forall A\in\mathcal{A}$, $(\overrightarrow{OP}\mid\overrightarrow{OA})=(\lambda\overrightarrow{OM}+(1-\lambda)\overrightarrow{ON}\mid\overrightarrow{OA})=\lambda(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})+(1-\lambda)(\overrightarrow{ON}\mid\overrightarrow{OA})\leq\lambda+(1-\lambda)=1$.

Donc $P\in\mathcal{A}^*$ puis $[M,N]\subset\mathcal{A}^*$. Finalement $\mathcal{A}^*$ est un convexe.

1.b Supposons $\mathcal{A}\subset\mathcal{B}$. Soit $M\in\mathcal{B}^*$. $\forall A\in\mathcal{B}$ on a $(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})\leq 1$ donc a fortiori $\forall A\in\mathcal{A}$ on a $(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})\leq 1$ d'où $M\in\mathcal{A}^*$. Finalement $\mathcal{B}^*\subset\mathcal{A}^*$.

1.c Soit $A\in\mathcal{A}$. $\forall M\in\mathcal{A}^*$ on a $(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})\leq 1$ i.e. $(\overrightarrow{OA}\mid\overrightarrow{OM})\leq 1$ donc $A\in\mathcal{A}^{**}$.

2.a $\mathcal{P}^*=\Big\{M\in\mathcal{P}/\forall A\in\mathcal{P},(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})\leq 1\Big\}$.

Soit $M\in\mathcal{P}$.

Si $M\neq O$ alors en prenant A tel que $\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ on a $(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})=2>1$ et donc $M\notin\mathcal{P}^*$.

Si $M=O$ alors $\forall A\in\mathcal{P},(\overrightarrow{OO}\mid\overrightarrow{OA})=0\leq 1$ donc $M=O\in\mathcal{P}^*$.

Finalement $\mathcal{P}^*=\{O\}$.

$\{O\}^*=\mathcal{P}^{**}\supset\mathcal{P}$ donc $\{O\}^*=\mathcal{P}$.

2.b Soit $M\in(D(O,r))^*$.

Si $M=O$ alors $M\in D(O,1/r)$.

Si $M\neq O$ alors considérons A le point déterminé par $\overrightarrow{OA}=\dfrac{r}{OM}\overrightarrow{OM}$.

On a $A\in D(O,r)$ donc $(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})\leq 1$ ce qui donne $r\times OM\leq 1$. Par suite $M\in D(O,1/r)$

Finalement $(D(O,r))^*\subset D(O,1/r)$.

Inversement, pour $M\in D(O,1/r)$, $\forall A\in D(O,r)$ on a $(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OA})\leq OM\cdot OA\leq r\dfrac{1}{r}=1$.

Ainsi $M\in(D(O,r))^*$. Finalement $\big(D(O,r)\big)^*=D(O,1/r)$.

3.a Soit K le point déterminé par $\overrightarrow{OK}=\dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH^2}$. On a $(\overrightarrow{OK}\mid\overrightarrow{OH})=1$ donc $K\in\mathcal{D}$. D'autre part $K\in(OH)$.

Pour $M\in\mathcal{P}$ on a :

$$\begin{aligned}M\in\mathcal{D}&\Leftrightarrow(\overrightarrow{OM}\mid\overrightarrow{OH})=(\overrightarrow{OK}\mid\overrightarrow{OH})\\&\Leftrightarrow(\overrightarrow{KM}\mid\overrightarrow{OH})=0\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{D}$ est la droite passant par K et de vecteur normal $\overrightarrow{OH}$.
Finalement $\mathcal{D}$ est la perpendiculaire à (OH) en K.

3.b Soit $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OK}}{OK}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire directeur de $\mathcal{D}$.

Considérons le repère orthonormé $(K;\vec{i},\vec{j})$.
Soit $M \in \mathcal{P}$.
On peut écrire $\overrightarrow{KM} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j}$.
$(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OH}) = (\overrightarrow{OK} \mid \overrightarrow{OH}) + (\overrightarrow{KM} \mid \overrightarrow{OH}) = OK\cdot OH + x\cdot OH = 1 + x\cdot OH$.
Donc $M \in \{H\}^* \Leftrightarrow 1 + x\cdot OH \le 1 \Leftrightarrow x \le 0$.
Ainsi $\{H\}^*$ est le demi-plan d'équation $x \le 0$, ce qui correspond au demi-plan délimité par $\mathcal{D}$ et contenant le point O.

4. Notons K le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$ et posons H le point déterminé par $\overrightarrow{OH} = \dfrac{1}{OK^2}\overrightarrow{OK}$.

Par l'étude qui précède $\{H\}^*$ est le demi-plan contenant O délimité par la droite orthogonale à (OH) passant par K, i.e. la droite $\mathcal{D}$. Ainsi $\{H\}^* = F$.

Partie III

1.a Si $I = \varnothing$ alors $\forall i \in \{1,\dots,n\}, \delta \subset F_i$ donc $\delta \subset \mathcal{C}$. Or $\mathcal{C}$ est borné. C'est donc impossible !

1.b Si $i \in J$ alors $\delta \subset F_i$ donc $A_{i_0} \in F_i$.

Si $i \in I$ alors $A_{i_0} \in [OA_i] \subset F_i$ car $A_{i_0} \in \delta$ et $OA_{i_0} \le OA_i$.

1.c On a $O \in \mathcal{C}$ et $A_{i_0} \in \bigcap_{1\le i\le n} F_i = \mathcal{C}$ donc $[OA_{i_0}] \subset \mathcal{C}$. De plus $[OA_{i_0}] \subset \delta$ donc $[OA_{i_0}] \subset \delta \cap \mathcal{C}$.

Inversement, $\delta \cap \mathcal{C} \subset (\delta \cap F_{i_0}) = [O, A_{i_0}]$. Finalement $\delta \cap \mathcal{C} = [O, A_{i_0}]$.

2. Si $\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = \varnothing$: ok
Sinon, soit $O \in \mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ et δ_1, δ_2 les deux demi-droites d'origine O, constituant $\mathcal{D}$.
D'après 1.c, $\delta_i \cap C$ est un segment $[O, A_i]$ où A_i est un point d'une arête de $\mathcal{C}$.
$\mathcal{D} \cap \mathcal{C} = (\delta_1 \cap \mathcal{C}) \cup (\delta_2 \cap \mathcal{C}) = [OA_1] \cup [OA_2] = [A_1 A_2]$.

3.a Par intersection de convexes, $\mathcal{C}$ est un convexe.
De plus $P_1,\dots,P_m$ sont des points de $\mathcal{C}$ donc toute combinaison convexe de $P_1,\dots,P_m$ appartient à $\mathcal{C}$.
Par suite $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$.

3.b Soit M un point d'une arête de $\mathcal{C}$.
M appartient à un segment dont les extrémités sont des sommets P_i et P_j de $\mathcal{C}$.
$\mathcal{C}'$ étant convexe, $[P_i, P_j] \subset \mathcal{C}'$, puis on a $M \in \mathcal{C}'$ et le résultat voulu.

3.c Soit O un point intérieur à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ une droite passant par O.
$\mathcal{D} \cap \mathcal{C}$ est un segment, contenant O, dont les extrémités sont sur les arêtes de $\mathcal{C}$.
Par 3.b, les extrémités de ce segment appartiennent à $\mathcal{C}'$ et donc $O \in \mathcal{C}'$.
Finalement $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$ puis $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

4.a $M \notin \mathcal{C} = \bigcap_{1\le i\le n} F_i$ donc il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $M \notin F_i$.

4.b $H \in \{H\}^{**} = F_i^* \subset \mathcal{C}^*$ en vertu des propriétés II.1.b et II.1.c

4.c $M \notin F_i = \{H\}^*$, or $\{H\} \subset \mathcal{C}^*$ donc $\mathcal{C}^{**} \subset \{H\}^*$ puis $M \notin \mathcal{C}^{**}$.

4.d Suite à ce raisonnement : $\mathcal{C}^{**} \subset \mathcal{C}$.
Inversement, on a toujours $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}^{**}$ donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{**}$.

5.a Puisque $A_1, A_2, \dots, A_n$ ne sont pas alignés, il existe trois points A_i, A_j et A_k qui ne sont par alignés.

Considérons $\mathcal{T} = Conv(A_i, A_j, A_k)$. On a $\mathcal{T} \subset \mathcal{C} = Conv(A_1, \dots, A_n)$.

D'après I.4.b, pour O isobarycentre de A_i, A_j, A_k, il existe $r > 0$ tel que $D(O, r) \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{C}$.

5.b $\forall i \in \{1, \dots, n\}, \{A_i\} \subset \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}^* \subset \{A_i\}^*$ puis $\mathcal{C}^* \subset \bigcap_{1 \le i \le n} \{A_i\}^*$.

Inversement, soit $M \in \bigcap_{1 \le i \le n} \{A_i\}^*$.

$\forall A \in \mathcal{C}$, on peut écrire $A = \text{bar}\big((A_i, \alpha_i)\big)_{1 \le i \le n}$ avec $\alpha_i \ge 0$ et $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.

$(\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OA}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (\overrightarrow{OM} \mid \overrightarrow{OA_i}) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ donc $M \in \mathcal{C}^*$.

5.c $\mathcal{C}^*$ est intersection d'un nombre fini de demi-plan, c'est donc un polyèdre convexe.

$D(O, r) \subset \mathcal{C}$ donc $\mathcal{C}^* \subset D(O, 1/r)$ puis $\mathcal{C}^*$ est borné. C'est donc un polygone convexe.

5.d Introduisons $P_1, \dots, P_m$ les sommets du polygones $\mathcal{C}^*$.

On a $\mathcal{C}^* = Conv(P_1, \dots, P_m)$, en vertu de III.3, donc $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{**} = \bigcap_{1 \le i \le n} \{P_i\}^*$ comme ci-dessus.

Par suite $\mathcal{C}$ est un polyèdre convexe.

Pour R suffisamment grand, $A_1, \dots, A_n \in D(O, R)$ et puisque $D(O, R)$ est convexe, $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}(O, R)$.

Ainsi $\mathcal{C}$ est un polygone convexe.