Séries de Engel

On note E l'ensemble formé des suites de nombres entiers $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$p_0>1 \text{ et pour tout } n\geq 0,\ p_n\leq p_{n+1}.$$

1. Etant donnée une suite $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on forme une suite réelle (x_n) en posant pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$x_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{p_0p_1\cdots p_k}=\frac{1}{p_0}+\frac{1}{p_0p_1}+\cdots+\frac{1}{p_0p_1\cdots p_n}$$

1.a Calculer x_n quand la suite (p_n) est constante égale à $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Quelle est alors la limite de la suite (x_n) ?

1.b On revient au cas général.
Montrer que la suite (x_n) converge vers un réel $x\in\left]0,1\right]$.

On pose alors $f(p)=x$ ce qui définit une application $f:E\to\left]0,1\right]$

2. Soit $p=(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $q=(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E.

2.a On suppose $p_0>q_0$. Etablir que $f(p)<f(q)$.

2.b Montrer que f est injective.

3. Soit x un réel de l'intervalle $\left]0,1\right]$. On définit une suite (y_n) comme suit :

$$y_0=x\in\left]0,1\right] \text{ puis pour tout } n\geq 0$$

$$y_{n+1}=p_ny_n-1 \text{ avec } p_n \text{ la partie entière de } 1+y_n^{-1}.$$

3.a Justifier que la suite (y_n) est bien définie et que c'est une suite décroissante d'éléments de $\left]0,1\right]$.

3.b Exprimer x en fonction $p_0,p_1,\ldots,p_n$ et de y_n.

3.c Conclure que la fonction f est surjective.

4. Soit x un réel de l'intervalle $\left]0,1\right]$ et $p=(p_n)$ l'unique suite de E telle que $f(p)=x$.
Montrer que :

$$x\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow\exists N\in\mathbb{N},\forall n\geq N, p_n=p_N$$