

Exercice 1 [02582] [Correction]

(a) Montrer l'existence, pour $\theta \in]0; \pi[$, d'un majorant M_θ de la valeur absolue de

$$S_n = \sum_{k=1}^n \cos(k\theta).$$

(b) Montrer que $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2; +\infty[$.

(c) En remarquant de $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n\theta).$$

(d) En utilisant $|\cos(k\theta)| \geq \cos^2(k\theta)$, étudier la convergence de $\sum |u_n|$.

Exercice 2 [02515] [Correction]

Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln \left(1 + \sin \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

pour $\alpha > 0$.

Exercice 3 [03371] [Correction]

(a) Déterminer la limite de la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1}.$$

(b) Déterminer la limite de la suite définie par

$$v_n = nu_n.$$

(c) Donner la nature de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 4 [03584] [Correction]

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} \text{ pour } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

(a) Déterminer une suite de fonctions (f_n) telle que

$$I_n = \int_0^1 f_n(t) dt.$$

(b) Déterminer deux réels a et b tels que

$$I_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Exercice 5 [02348] [Correction]

(a) Justifier que

$$G(x, y) = \int_0^y \frac{t - [t]}{t(t+x)} dt$$

où $[t]$ représente la partie entière de t , est définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

(b) Montrer que $G(x, y)$ tend vers une limite $G(x)$ quand y tend vers $+\infty$.

(c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \right).$$

(d) On note $H(n) = nG(n)$; montrer que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n}$$

converge et en déduire un équivalent de $G(n)$.

Exercice 6 [02538] [Correction]

Soit f de classe \mathcal{C}^2 sur $[0; +\infty[$ telle que f'' est intégrable sur $[0; +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ soit convergente.

(a) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

(b) Étudier les séries

$$\sum f(n) \text{ et } \sum f'(n).$$

Exercice 7 [02509] [Correction]

(a) Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

en effectuant notamment le changement de variable $x = e^t$.

(b) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Exercice 8 [01770] [Correction]

Soit g définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

où f est continue, de carré intégrable sur \mathbb{R}_+ .

(a) Étudier le prolongement par continuité de g en 0.

(b) Exprimer $g'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $g(x)$ pour $x > 0$.

(c) Pour $0 < a < b$, montrer que

$$\int_a^b g^2(t) dt = 2 \int_a^b f(t)g(t) dt + ag^2(a) - bg^2(b)$$

puis montrer que

$$\sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t) dt}.$$

(d) Étudier la nature de

$$\int_0^{+\infty} g^2(t) dt.$$

Exercice 9 [03705] [Correction]

(a) a désigne un réel strictement supérieur à -1 . En posant $x = \tan t$, montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Donner en fonction de $\alpha > 0$, la nature de la série

$$\sum \int_0^\pi \frac{dt}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

(c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

(d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

Exercice 10 [03385] [Correction]

(a) Étudier l'intégrabilité sur $]1; +\infty[$ de

$$f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}.$$

(b) Montrer

$$\int_2^3 f(x) dx \leq \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 11 [02555] [Correction]

On considère

$$f: t \mapsto \frac{\ln t}{(1+t)^2}.$$

(a) Étudier l'intégrabilité de f sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.

(b) Calculer

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt.$$

Exercice 12 [03375] [Correction]

(a) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1+x.$$

En déduire

$$\forall t \in \mathbb{R}, 1-t^2 \leq e^{-t^2} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir l'existence des intégrales suivantes

$$I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt, I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \text{ et } J_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

puis établir

$$I_n \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq J_n.$$

(c) On pose

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

Établir

$$I_n = W_{2n+1} \text{ et } J_{n+1} = W_{2n}.$$

(d) Trouver une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2} .
En déduire la constance de la suite de terme général

$$u_n = (n+1)W_n W_{n+1}.$$

(e) Donner un équivalent de W_n et en déduire la valeur de I .

Exercice 13 [03785] [Correction]

On introduit l'application sur $[0; +\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

- (a) Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n) .
(b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 14 [02558] [Correction]

Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}.$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+ .

Exercice 15 [02527] [Correction]

Étudier la convergence simple et uniforme sur \mathbb{R} de la suite de fonctions (f_n) donnée par

$$f_n(x) = \sin^n(x) \cos(x).$$

Exercice 16 [02532] [Correction]

- (a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = x(1+n^\alpha e^{-nx})$ définies sur \mathbb{R}_+ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.
(b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.
(c) Calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx}) dx.$$

Exercice 17 [02518] [Correction]

Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-x^2}}.$$

Exercice 18 [03194] [Correction]

Définition, continuité et classe \mathcal{C}^1 de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Exercice 19 [02529] [Correction]

Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

est continue sur \mathbb{R} et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Exercice 20 [00039] [Correction]

On note E l'espace des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_0 = 0$.

(a) Montrer que

$$N_\infty(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \text{ et } N(u) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$$

définissent des normes sur l'espace E .

(b) Montrer que

$$\forall u \in E, N(u) \leq 2N_\infty(u).$$

Déterminer une suite non nulle telle qu'il y ait égalité.

(c) Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 21 [03786] [Correction]

On munit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ de la norme

$$\|M\| = \max_{1 \leq i, j \leq p} |m_{i,j}|.$$

(a) Soient X fixé dans \mathbb{C}^p et P fixé dans $\text{GL}_p(\mathbb{C})$; montrer que

$$\phi(M) = MX \text{ et } \psi(M) = P^{-1}MP$$

définissent des applications continues.

(b) Montrer que

$$f(M, N) = MN$$

définit une application continue.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite $(\|A^n\|)$ soit bornée; montrer que les valeurs propres de A sont de module inférieur à 1.

(d) Soit $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telle que la suite (B^n) tende vers une matrice C . Montrer que $C^2 = C$; que conclure à propos du spectre de C ?

Montrer que les valeurs propres de B sont de module au plus égal à 1

Exercice 22 [02587] [Correction]

Soit u, v, w trois fonctions de classe \mathcal{C}^2 de $[a; b]$ vers \mathbb{R} (avec $a < b$). On suppose

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(a) & v'(a) & w'(a) \end{vmatrix} = 0.$$

Montrer qu'il existe $c \in]a; b[$ vérifiant

$$\begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 23 [04941] [Correction]

(a) Montrer que, pour tout $a \in]0; 1[$, l'intégrale suivante converge :

$$\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx.$$

(b) Justifier que, pour tout $a \in]0; 1[$,

$$\int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}.$$

(c) En déduire la convergence et la valeur de

$$\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx.$$

Exercice 24 [02394] [Correction]

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$.

Pour $x \in]-1; 1[$, on définit

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On suppose que la suite (a_n) est à termes réels positifs et que la fonction S est bornée sur $]0; 1[$.

(a) Montrer que $\sum a_n$ est une série convergente.

(b) Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 25 [03699] [Correction]

(a) Quel est l'ensemble de définition de

$$f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} ?.$$

(b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre avec pour condition initiale $f(0) = 0$.

- (c) Montrer que f est développable en série entière et en donner le rayon de convergence.

Exercice 26 [03307] [Correction]

Soit (f_n) la suite des fonctions donnée par

$$\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = (-1)^n \ln(n)x^n.$$

- (a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum f_n$.
On note S sa somme.
- (b) Montrer que

$$\forall x \in]-1; 1[, S(x) = \frac{1}{1+x} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^{n+1} \right).$$

- (c) En déduire que S admet une limite en 1^- et que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right).$$

- (d) Calculer la limite ci-dessus en utilisant la formule de Wallis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 27 [03694] [Correction]

- (a) Étudier la parité de

$$f: x \mapsto e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt.$$

- (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle à déterminer.
- (c) Justifier que f est développable en série entière et donner ce développement.

Exercice 28 [00038] [Correction]

- (a) Étudier la convergence et préciser la limite éventuelle de (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \ln(1 + a_n) \text{ et } a_0 > 0.$$

- (b) Rayon de convergence de $\sum a_n x^n$

- (c) Étudier la convergence de $\left(\sum a_n x^n \right)$ sur le bord de l'intervalle de convergence
(on pourra étudier la limite de $1/a_{n+1} - 1/a_n$ et utiliser le théorème de Cesaro)

Exercice 29 [03301] [Correction]

Développer $f(x) = \operatorname{ch}(x) \cos(x)$ en série entière en l'exprimant à l'aide de fonctions exponentielles.

Retrouver le résultat en remarquant que f est solution de l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$.

Exercice 30 [02500] [Correction]

Soient $k > 0$ et

$$f(x) = \int_0^1 t^k \sin(xt) dt.$$

- (a) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .
- (b) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, x f'(x) + (k+1)f(x) = \sin x.$$

- (c) Déterminer toutes les fonctions développables en série entière en 0 solutions de $xy' + (k+1)y = \sin x$ en précisant le rayon de convergence.

Exercice 31 [02498] [Correction]

On considère l'équation différentielle

$$(E): ty' + y = 3t^2 \cos(t^{3/2}).$$

- (a) Montrer qu'il existe une unique solution v de (E) développable en série entière sur un voisinage de 0.
- (b) Trouver l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R}_+^* et en déduire une expression plus simple de v .

Exercice 32 [03707] [Correction]

(a) Pour quel réel x , l'intégrale suivante existe-t-elle

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} ?.$$

(b) Donner alors sa valeur.

(c) Montrer que

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t}$$

est développable en série entière et exprimer ce développement.

Exercice 33 [02605] [Correction]

Soit $\alpha \in]-1; 1[$.

(a) Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la convergence de la suite de terme général

$$P_n(x) = \prod_{k=0}^n (1 - \alpha^k x)$$

vers une limite que l'on notera $P(x)$.

(b) Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation fonctionnelle

$$(E): \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 - x)f(\alpha x).$$

Montrer, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(0)P(x).$$

(c) Montrer que la fonction $x \mapsto P(x)$ est développable en série entière sur \mathbb{R} .

Exercice 34 [00078] [Correction]

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\theta \in]0; \pi/2[$.

(a) Calculer la partie imaginaire du complexe

$$\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}}.$$

(b) En déduire le développement en série entière de

$$f(x) = \arctan\left(x - \frac{1}{\tan \theta}\right).$$

Exercice 35 [02512] [Correction]

(a) Quel est le domaine de définition de

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{x + n}$$

pour $a \in]-1; 1[$?

(b) Déterminer la limite et un équivalent de S en $+\infty$.

(c) Développer en série entière

$$S(x) - \frac{1}{x}.$$

Exercice 36 [00075] [Correction]

Calculer

$$S_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

(on pourra calculer $S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n+k}}{(3n+k)!}$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$)

Exercice 37 [02525] [Correction]

Montrer que

$$f(x) = \arctan(1 + x)$$

est développable en série entière au voisinage de 0 et donner son rayon de convergence. Calculer cette série entière.

Exercice 38 [02414] [Correction]

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence R et R' .

(a) Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum c_n x^n$ avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

(b) Déterminer le rayon de convergence et la somme de

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 39 [03298] [Correction]

(a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)x^n \text{ et } \sum \sin(e^{-n})x^n.$$

(b) Une série entière converge-t-elle normalement sur son disque ouvert de convergence ?

Exercice 40 [02506] [Correction]

Soit $a \in]-1; 1[$. On pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x).$$

(a) Montrer que f est définie sur \mathbb{R} .

(b) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^∞ et que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{1-|a|}.$$

(c) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 41 [02565] [Correction]

Trouver le rayon de convergence de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\operatorname{sh} n}{n(n+1)} x^n.$$

Calculer la somme dans le bon intervalle.

Exercice 42 [02551] [Correction]

Calculer

$$a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Calculer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Calculer la somme de cette série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 43 [03383] [Correction]

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ où (a_n) est la suite déterminée par

$$a_0 = \alpha, a_1 = \beta \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 44 [02523] [Correction]

Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence non nul.

(a) Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $|a_n| \leq 1/r^n$ à partir d'un certain rang.

(b) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$?

(c) On note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{S_n}{n!} z^n$?

Exercice 45 [02534] [Correction]

On pose

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = \cos(n\theta).$$

(a) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-1; 1[$.

(b) Montrer que pour tout $\theta \neq k\pi$, la série $\sum \frac{a_n}{n+1}$ converge et exprimer sa somme à l'aide d'une intégrale.

(c) Calculer cette intégrale pour $\theta \in]0; \pi[$.

Exercice 46 [02597] [Correction]

Montrer que $g: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2^{2n} (n!)^2}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

En déduire que $h: t \mapsto g(t)e^{-t}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

Montrer que $\int_0^{+\infty} h(t) dt$ existe et calculer son intégrale.

Exercice 47 [04155] [Correction]

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^p}{e^t - 1} e^{-nt} dt.$$

(a) Montrer l'existence de l'intégrale définissant S_n .

(b) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T(a, b) = \int_0^{+\infty} t^a e^{-bt} dt.$$

Simplifier l'expression de $T(a, b)$.

(c) Montrer que pour tout naturel n

$$S_0 = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

(d) Montrer que la suite (S_n) converge vers 0.

(e) Montrer

$$S_0 = p! \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{p+1}}.$$

Exercice 48 [04944] [Correction]

Soit

$$F: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} \sin t}{t} dt.$$

(a) Justifier que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+^* et calculer $F'(x)$.

(b) En déduire une expression simplifiée de $F(x)$ pour tout $x > 0$.

Exercice 49 [04945] [Correction]

(a) Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^n} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

(b) Montrer que la suite $(I_n)_{n \geq 1}$ converge et trouver sa limite.

(c) Étudier la convergence de $\sum (-1)^{n-1} I_n$ et calculer son éventuelle somme.

Exercice 50 [03781] [Correction]

Prouver l'égalité

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 51 [03311] [Correction]

Soit a, b deux réels strictement positifs.

(a) Justifier l'existence pour tout $x \in \mathbb{R}$ de

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

(b) Justifier que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer $F'(x)$.

(c) Exprimer $F(x)$

Exercice 52 [00933] [Correction]

Établir

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 53 [02537] [Correction]

(a) Donner le domaine de définition de la fonction

$$\Gamma: x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(b) Calculer l'intégrale

$$I_n(x) = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt.$$

(c) Expliquer rapidement pourquoi $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ converge vers e^{-t} et montrer que

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$

Exercice 54 [03800] [Correction]

Étudier la limite éventuelle, quand n tend vers $+\infty$, de la suite

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx.$$

Exercice 55 [03807] [Correction]

Montrer que la fonction f_n donnée par

$$f_n(x) = \frac{\ln(1+x/n)}{x(1+x^2)}$$

est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Montrer que la suite de terme général $u_n = n \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ converge vers une limite à préciser.

Exercice 56 [02392] [Correction]

Soit f une application réelle de classe \mathcal{C}^1 sur $[a; b]$ avec $0 < a < 1 < b$ et $f(1) \neq 0$. Soit (f_n) la suite de fonctions telle que

$$f_n(x) = \frac{f(x)}{1+x^n}.$$

(a) Déterminer la limite simple de (f_n) .

(b) Établir l'égalité suivante :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^1 f(t) dt.$$

(c) Montrer que

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt \sim \frac{\ln 2}{n} f(1).$$

Exercice 57 [01771] [Correction]

Vérifier que la suite de terme général

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{nt+t^2} dt$$

est bien définie et étudier sa convergence.

Exercice 58 [02556] [Correction]

Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+x} dt.$$

(a) Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$.

(b) Calculer $F'(x)$ et en déduire l'expression de

$$G(x) = F(x) + F(1/x).$$

(c) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln t}{t^2+2t \operatorname{ch}(\theta)+1} dt.$$

Exercice 59 [02517] [Correction]

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{x^2}{2n^2}\right)^{2n^4}.$$

Soit g une fonction continue sur \mathbb{R} et nulle en dehors d'un segment $[a; b]$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) g(x) dx = g(0).$$

Exercice 60 [03619] [Correction]

Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)} dt.$$

(a) Montrer que F est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ .

On admet l'identité

$$\frac{x^2-1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

valable pour tout x et t dans \mathbb{R}

(b) Déterminer l'expression de $F(x)$.

Exercice 61 [02583] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Ensemble de définition de

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^x)^n}.$$

(b) Montrer que si $x > 1$, $\sum I_n(x)$ diverge.

(c) Calculer $I_n(2)$ pour $n \geq 1$.

Exercice 62 [02570] [\[Correction\]](#)

Soient p et k 2 entiers naturels, non nul. Soit $f_{p,k}: x \mapsto x^p(\ln x)^k$.

(a) Montrer que $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0; 1]$. Soit

$$K_{p,k} = \int_0^1 x^p(\ln x)^k dx.$$

(b) Exprimer $K_{p,k}$ en fonction de $K_{p,k-1}$.

(c) Exprimer $J_n = \int_0^1 (x \ln x)^n dx$ en fonction de n .

(d) On pose $I = \int_0^1 x^x dx$. Montrer

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 63 [01102] [\[Correction\]](#)

(a) Donner les limites éventuelles en $+\infty$ des suites de termes généraux

$$U_n = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^3)^n} \text{ et } V_n = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^n}.$$

(b) Quelles sont les natures des séries

$$\sum_{n \geq 1} U_n \text{ et } \sum_{n \geq 1} V_n ?.$$

Exercice 64 [02360] [\[Correction\]](#)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit f_n l'application définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{2 \operatorname{sh}(x)}{e^{nx}-1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\\ \alpha & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Pour quelle valeurs de α la fonction f_n est-elle continue? Dans la suite, on prendra cette valeur de α .

(b) Montrer que f_n est bornée.

(c) Montrer que $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ existe pour $n \geq 2$.

(d) Exprimer $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ comme la somme d'une série.

Exercice 65 [02535] [\[Correction\]](#)

Quelles sont les fonctions continues f telles que

$$f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt?$$

Exercice 66 [02419] [\[Correction\]](#)

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + \int_0^x (x-t)f(t) dt = 1 - x.$$

(a) Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 .

(b) Trouver toutes les fonctions f solution de l'équation étudiée.

Exercice 67 [03782] [\[Correction\]](#)

Résoudre sur $]-\pi/2; \pi/2[$

$$y'(x) - \tan(x)y + (\cos x)^2 = 0.$$

Exercice 68 [02573] [\[Correction\]](#)

En indiquant les hypothèses nécessaires, effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'équation différentielle

$$(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$$

tel qu'elle devienne une équation à coefficients constants et la résoudre.

Exercice 69 [02540] [Correction]

On veut résoudre

$$(E): (x+1)y'' - (3x+4)y' + 3y = (3x+2)e^{3x}.$$

Si Δ est l'opérateur de dérivation et $Q(X) = X - 3$, on a $Q(\Delta)(y) = y' - 3y$. Montrer l'existence d'un polynôme P de la forme $a(x)X + b(x)$ tel que (E) devienne

$$(P(\Delta) \circ Q(\Delta))(y) = (3x+2)e^{3x}.$$

Résoudre l'équation à l'aide du changement de variable $z = Q(\Delta)(y)$.

Exercice 70 [02528] [Correction]

(a) Montrer qu'il existe une solution h de l'équation

$$xy'' + y' + y = 0$$

développable en série entière et vérifiant $h(0) = 1$.

(b) Montrer que h s'annule sur $]0; 2[$.

(c) Montrer que h ne s'annule qu'une seule fois sur $]0; 2[$.

Exercice 71 [03215] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{Sp } A = \{-2, 1, 3\}.$$

(a) Exprimer A^n en fonction de A^2 , A et I_3 .

(b) Calculer

$$\text{ch}(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^{2n}}{(2n)!}.$$

Exercice 72 [03799] [Correction]

On pose

$$\vec{\gamma}_1(t) = a(1-t)\vec{i} + bt\vec{j} \text{ avec } 0 \leq t \leq 1.$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = a \cos(s)\vec{i} + b \sin(s)\vec{j} \text{ avec } 0 \leq s \leq \pi/2$$

et le champ de vecteurs

$$\vec{V} = y\vec{i} + 2x\vec{j}.$$

(a) Représenter les courbes paramétrées par $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$.

(b) Le champ de vecteurs \vec{V} dérive-t-il d'un potentiel $U(x, y)$?

(c) Calculer la circulation de \vec{V} selon $\vec{\gamma}_1$ et $\vec{\gamma}_2$. Conclure.

Exercice 73 [02530] [Correction]

(a) Étudier les branches infinies, les variations, la convexité et représenter $f(t) = t - \ln t - \frac{1}{t}$.

(b) Résoudre $f(t) = 0$.

(c) Trouver les extremums globaux et locaux de

$$g(x, y) = x \ln y - y \ln x.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

On a

$$S_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ik\theta} \right) = \operatorname{Re} \left(e^{i\theta} \frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right)$$

donc

$$|S_n| \leq \frac{2}{|e^{i\theta} - 1|} = M_\theta.$$

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1) - x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2} \frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)^2} \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

$u_n = f(n) \cos(n\theta) = f(n)(S_n - S_{n-1})$ donc

$$\sum_{n=2}^N u_n = \sum_{n=2}^N f(n)S_n - \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)S_n = \sum_{n=2}^N (f(n) - f(n+1))S_n + f(N+1)S_N - f(2)S_1.$$

Or $f(N+1)S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$ car $S_N = O(1)$ et $f \xrightarrow{+\infty} 0$.

De plus

$$|(f(n) - f(n+1))S_n| \leq M_\theta (f(n) - f(n+1))$$

avec $\sum f(n) - f(n+1)$ série convergente (car f converge en $+\infty$) donc par comparaison $\sum (f(n) - f(n+1))S_n$ est absolument convergente.

Ainsi par opérations, $\left(\sum_{n=2}^N u_n \right)_{N \geq 2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

On a

$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1} |\cos(n\theta)| \geq \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos^2(n\theta).$$

Or $\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a \geq \frac{1}{2} \cos 2a + 1$ puis

$$|u_n| \geq \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(2n\theta) + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$

En reprenant l'étude qui précède avec 2θ au lieu de θ , on peut affirmer que

$$\sum \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(2n\theta)$$

converge tandis que $\sum \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$ diverge puisque $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Par comparaison, on peut affirmer que $\sum |u_n|$ diverge.

Exercice 2 : [énoncé]

Par développement

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

avec

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

$\sum v_n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ converge si, et seulement si, $2\alpha > 1$ par équivalence de termes généraux de séries de signe constant. Au final, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) La suite étudiée est bien définie et à termes tous positifs. On en déduit

$$0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

et donc par encadrement $u_n \rightarrow 0$.

(b) Pour $n \geq 1$, on peut écrire $v_n = e^{-u_{n-1}}$ et alors $v_n \rightarrow 1$ par composition de limites.

(c) On en déduit

$$u_n \sim 1/n.$$

La série $\sum u_n$ est alors divergente par équivalence de séries à termes positifs. On a aussi

$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1 - u_{n-1} + o(u_{n-1})}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum (-1)^n/n$ converge en vertu du critère spéciale et $\sum O(1/n^2)$ est absolument convergente par argument de comparaison. Par opération sur les séries convergentes, la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

Exercice 4 : [énoncé]

Notons que l'intégrale I_n est bien définie.

(a) On découpe l'intégrale en deux

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

On réalise le changement de variable $x = 1/t$ sur la deuxième intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n} + \int_1^0 -\frac{t^{n-2} dt}{1+t^n}$$

puis on combine les deux intégrales pour obtenir

$$I_n = \int_0^1 \frac{1+t^{n-2}}{1+t^n} dt.$$

(b) On peut écrire

$$I_n = 1 + \int_0^1 \frac{t^{n-2} - t^n}{(1+t^n)} dt.$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \int_0^1 t \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt$$

ce qui donne par intégration par parties

$$\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \ln 2 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln(1+t^n) dt$$

avec

$$0 \leq \int_0^1 \ln(1+t^n) dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

D'une part

$$\int_0^1 \frac{t^{n-2}}{1+t^n} dt = \frac{1}{n} \int_{]0;1]} \frac{1}{t} \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt$$

avec par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{t} \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt = \left[\frac{\ln(1+t^n)}{t} \right]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt.$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on obtient

$$\int_{]0;1]} \frac{1}{t} \frac{nt^{n-1}}{1+t^n} dt = \ln 2 + \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt$$

où, sachant $\ln(1+u) \leq u$,

$$0 \leq \int_{]0;1]} \frac{\ln(1+t^n)}{t^2} dt \leq \int_0^1 t^{n-2} dt = \frac{1}{n-1} \rightarrow 0.$$

On en déduit

$$I_n = 1 + o(1/n).$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Soient $x, y > 0$.

La fonction

$$f: t \mapsto \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)}$$

est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[\supset]0; y]$ et quand $t \rightarrow 0$,

$$f(t) = \frac{t}{t(t+x)} = \frac{1}{t+x} \rightarrow \frac{1}{x}$$

donc f est prolongeable par continuité en 0.

Par suite l'intégrale définissant $G(x, y)$ existe bien.

(b) Quand $t \rightarrow +\infty$,

$$f(t) = \frac{O(1)}{t(t+x)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Par suite $G(x, y)$ converge quand $y \rightarrow +\infty$ vers

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t(t+x)} dt.$$

(c) On remarque que

$$\frac{1}{t(t+n)} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+n} \right)$$

et on en déduit

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} - \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t+n} dt.$$

Par linéarité de l'intégrale et changement de variable, on obtient

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^y \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - \int_n^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt \right).$$

Enfin par la relation de Chasles

$$G(n, y) = \frac{1}{n} \left(\int_0^n \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt - \int_y^{y+n} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t} dt \right).$$

(d) Puisque

$$0 \leq \int_y^{y+n} \frac{t - [t]}{t} dt \leq \frac{1}{y} \int_y^{y+n} t - [t] dt \leq \frac{n}{y}$$

on obtient quand $y \rightarrow +\infty$

$$G(n) = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt$$

et on a alors

$$H(n) = \int_0^n \frac{t - [t]}{t} dt.$$

Par suite

$$H(n) - H(n-1) = \int_{n-1}^n \frac{t - [t]}{t} dt = \int_0^1 \frac{u}{u + (n-1)} du$$

puis

$$H(n) - H(n-1) = 1 - (n-1) \ln \left(1 + \frac{1}{n-1} \right).$$

Par développement limité, on obtient

$$H(n) - H(n-1) = \frac{1}{2(n-1)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général

$$H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Posons

$$S = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(H(n) - H(n-1) - \frac{1}{2n} \right).$$

On a

$$\sum_{k=1}^n \left(H(k) - H(k-1) - \frac{1}{2k} \right) = S + o(1)$$

donc

$$H(n) - H(1) - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} = S + o(1).$$

Sachant

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

on obtient

$$H(n) \sim \frac{1}{2} \ln n$$

puis

$$G(n) \sim \frac{\ln n}{2n}.$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Puisque f est de classe \mathcal{C}^2 , on peut écrire

$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t) dt.$$

Par intégrabilité de f'' , la fonction f' admet une limite finie ℓ quand $x \rightarrow +\infty$.

Si $\ell > 0$ alors, pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$. Notons $A \geq 0$ tel que ce qui précède soit vrai pour $x \geq A$. On a alors

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt \geq f(0) + \int_0^A f'(t) dt + \int_A^x \frac{\ell}{2} dt$$

et donc $f(x) \geq \ell x/2 + C^{te}$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.

Posons

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$F(x+1) = F(x) + f(x) + \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt.$$

Quand $x \rightarrow +\infty$,

$$F(x), F(x+1) \rightarrow \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Aussi $f'(x) \rightarrow 0$ et

$$\left| \int_x^{x+1} (x+1-t)f'(t) dt \right| \leq \max_{t \in [x; x+1]} |f'(t)| \rightarrow 0$$

donc par opération $f(x) \rightarrow 0$.

(b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégrale

$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \int_n^{n+1} ((n+1)-t)f''(t) dt$$

donc

$$f'(n) = f(n+1) - f(n) + \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt.$$

La série de terme général $f(n+1) - f(n)$ est convergente car de même nature que la suite $(f(n))$ qui converge en $+\infty$. La série de terme général $\int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt$ est absolument convergente car

$$\left| \int_n^{n+1} (n+1-t)f''(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f''(t)| dt$$

et le terme majorant est sommable par intégrabilité de f'' .

Par conséquent, la série $\sum f'(n)$ est convergente.

Aussi

$$F(n+1) = F(n) + f(n) + \frac{1}{2}f'(n) + \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{2} f''(t) dt.$$

On peut alors mener le même raisonnement et conclure que $\sum f(n)$ converge.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) L'intégrale de départ est bien définie. En effet, la fonction $f: x \mapsto (1+x^2)/(1+x^4)$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ et on vérifie $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1/x^2$ ce qui donne un argument d'intégrabilité.

Par le changement de variable \mathcal{C}^1 strictement croissant $x = e^t$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2t}+1}{e^{4t}+1} e^t dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} 2t} dt.$$

Or

$$\operatorname{ch} 2t = 2 \operatorname{ch}^2 t - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 t.$$

Par le nouveau changement de variable \mathcal{C}^1 strictement croissant $u = \operatorname{sh} t$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}u) \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

(b) Par le changement de variable \mathcal{C}^1 strictement monotone $x = 1/t$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Soit F une primitive de la fonction continue f . On a

$$g(x) = \frac{1}{x}(F(x) - F(0)) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} F'(0) = f(0).$$

Ainsi on peut prolonger g par continuité en 0 en posant $g(0) = f(0)$.

(b) Soit F une primitive de f (il en existe car f est continue).

On a

$$g(x) = \frac{1}{x}(F(x) - F(0)).$$

On en déduit que g est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}(F(x) - F(0)) + \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - g(x)}{x}.$$

(c) Par intégration par parties

$$\int_a^b g^2(t) dt = \left[t g^2(t) \right]_a^b - 2 \int_a^b t g'(t) g(t) dt$$

donc

$$\int_a^b g^2(t) dt = \left[t g^2(t) \right]_a^b - 2 \int_a^b (f(t) - g(t)) g(t) dt$$

puis la relation proposée.

On en déduit par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_a^b g^2(t) dt \leq 2 \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} + a g^2(a)$$

puis

$$\int_a^b g^2(t) dt - 2 \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} \leq a g^2(a)$$

en ajoutant un même terme de part et d'autre

$$\left(\sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \right)^2 \leq ag^2(a) + \int_a^b f^2(t) dt$$

puis par la croissance de la fonction racine carrée

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \right| &\leq \left| \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} - \sqrt{\int_a^b f^2(t) dt} \right| \\ &\leq \sqrt{ag^2(a) + \int_a^b f^2(t) dt} \end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned} \sqrt{\int_a^b g^2(t) dt} &\leq \sqrt{\int_0^b f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^b f^2(t) dt} \\ &\leq \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt} + \sqrt{ag^2(a) + \int_0^{+\infty} f^2(t) dt}. \end{aligned}$$

(d) En faisant tendre a vers 0, on obtient

$$\sqrt{\int_0^b g^2(t) dt} \leq 2\sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t) dt}$$

et on en déduit que la fonction g^2 est intégrable sur \mathbb{R}_+ car les intégrales de g^2 sur les segments inclus dans \mathbb{R}_+ sont majorées.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) L'intégrale étudiée est bien définie pour $a > -1$ en tant qu'intégrale d'une fonction définie et continue sur le segment $[0; \pi/2]$. Par le changement de variable proposé, qui est \mathcal{C}^1 strictement monotone, on obtient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (1+a)x^2}.$$

En considérant $u = x\sqrt{1+a}$, on détermine une primitive de la fonction intégrée

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + (1+a)x^2} = \left[\frac{1}{\sqrt{1+a}} \arctan(\sqrt{1+ax}) \right]_0^{+\infty}.$$

Finalement

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a \sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Par la symétrie du graphe de fonction sinus en $\pi/2$, on peut directement affirmer

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

Le calcul qui précède donne alors

$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Pour $t \in [n\pi; (n+1)\pi]$, on a

$$1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t) \leq 1 + t^\alpha \sin^2(t) \leq 1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t).$$

Puis en passant à l'inverse et en intégrant, on obtient l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série étudiée équivaut à la convergence de la série précédente. La condition attendue est donc encore $\alpha > 2$.

(d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^{n\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}.$$

La fonction intégrée étant positive et la suite de segments $[0; n\pi]$ étant croissante et de réunion \mathbb{R}_+ , la convergence de l'intégrale proposée entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie et continue par morceaux sur $]1; +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 1^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{(x-1)}}{(x-1)} = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

et quand $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\ln x}}{x^{3/2}} = o\left(\frac{1}{x^{1,0001}}\right)$$

donc f est intégrable sur $]1; +\infty[$.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left(\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2}\right)^{1/2} \left(\int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx\right)^{1/2}.$$

En calculant les intégrales introduites

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{1}{2}((\ln 3)^2 - (\ln 2)^2)\right)^{1/2} \leq \frac{\ln 3}{2}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

- (a) La fonction f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
 Quand $t \rightarrow 0^+$, $\sqrt{t}f(t) \rightarrow 0$ et quand $t \rightarrow +\infty$, $t^{3/2}f(t) \rightarrow 0$ donc f est intégrable sur $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$.
- (b) Par une intégration par parties où l'on choisit judicieusement une primitive s'annulant en 0

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = \left[\ln t \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt = -\ln 2.$$

Par le changement de variable $u = 1/t$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2} dt = -\int_0^1 \frac{\ln u}{(u+1)^2} du = \ln 2.$$

Exercice 12 : [énoncé]

- (a) Il suffit d'étudier la variation de la fonction $x \mapsto e^x - (1+x)$ pour obtenir cette inégalité de convexité classique. On en déduit

$$1 - t^2 \leq e^{-t^2} = \frac{1}{e^{t^2}} \leq \frac{1}{1+t^2}.$$

- (b) La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.
 Puisque $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, cette fonction est intégrable sur $[0; +\infty[$ ce qui assure l'existence de I .
 La fonction $t \mapsto (1-t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur le segment $[0; 1]$, donc l'intégrale définissant I_n existe.
 La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$.
 Puisque $1/(1+t^2)^n \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} 1/t^{2n}$ avec $2n > 1$, cette fonction est intégrable sur $[0; +\infty[$ ce qui assure l'existence de J_n .

On a

$$(1-t^2)^n \leq e^{-nt^2} \leq \frac{1}{(1+t^2)^n}$$

donc

$$I_n \leq \int_0^1 e^{-nt^2} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2} dy \leq \frac{I}{\sqrt{n}}$$

et

$$\frac{I}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq J_n.$$

- (c) Le changement de variable $t = \sin x$ donne $I_n = W_{2n+1}$.
 Le changement de variable $t = \tan x$ donne $J_{n+1} = W_{2n}$.
- (d) Par intégration par parties

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

On en déduit $u_{n+1} = u_n$ donc la suite (u_n) est constante égale à

$$u_1 = \pi/2.$$

- (e) Puisque

$$\forall x \in [0; \pi/2], (\cos x)^{n+1} \leq (\cos x)^n \leq (\cos x)^{n-1}$$

on obtient en intégrant

$$W_{n+1} \leq W_n \leq W_{n-1}.$$

Or

$$W_{n+1} = \frac{n}{n+1} W_{n-1} \sim W_{n-1}$$

donc par encadrement

$$W_{n+1} \sim W_n.$$

On en déduit

$$u_n \sim nW_n^2$$

puis

$$W_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}.$$

Par suite

$$I_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}} \text{ et } J_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}.$$

L'encadrement du b) donne alors

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

- (a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
La fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n!} x^{n-1} (n-x) e^{-x}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x \in [a; +\infty[} |f_n(x)| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n}.$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $]0; +\infty[$.

- (b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et sa somme est égale à 1.

Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a; +\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.

En revanche sur $[0; a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x \in [0; a]} |f_n(x)| = f_n(a).$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur $[0; a]$.

Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.

Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0; +\infty[$.

Exercice 14 : [énoncé]

Pour $x \leq 0$, il y a divergence grossière.

Pour $x > 0$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} = e^{-x\sqrt{n} + 2 \ln n} \rightarrow 0$ donc $\sum e^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi f est définie sur $]0; +\infty[$.

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$, $|e^{-x\sqrt{n}}| \leq e^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a; +\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

Par convergence uniforme sur $[1; +\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x\sqrt{n}} = 1.$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq e^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n e^{-x\sqrt{t}} dt.$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt$$

avec

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}} dt = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \rightarrow 0^+$.

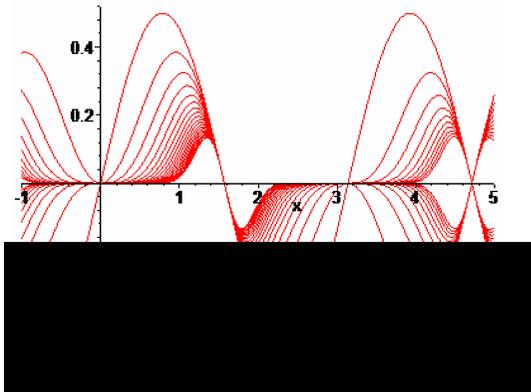


FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite (f_n)

Exercice 15 : [énoncé]

Pour $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \rightarrow 0$.

Pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \rightarrow 0$.

Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0; \pi]$. La fonction f_n est dérivable avec

$$f'_n(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1).$$

On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0; \pi]$ et on obtient

$$\sup_{\mathbb{R}} |f_n| = \left| f_n \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)} \right)^{n/2} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \rightarrow 0.$$

La suite de fonction (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 16 : [énoncé]

- (a) En distinguant le cas $x = 0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par $f(x) = x$.
- (b) Par étude des variations de $f_n(x) - f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.
- (c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

f_n est définie sur \mathbb{R}^* et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.

Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \rightarrow +\infty$.

Pour $x > 0$, $f_n(x) \rightarrow 0$.

Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+^* .

Il ne peut y avoir convergence uniforme sur \mathbb{R}_+^* car alors, par le théorème de la double limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x)$$

donne $0 = +\infty$.

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{nx^2 e^{-nx}}{1 - e^{-a^2}}$$

et par étude fonctionnelle $nx^2 e^{-nx} \leq \frac{4}{n} e^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc

$$\|f_n\|_{\infty, [a; +\infty[} \leq \frac{4e^2}{n(1 - e^{-a^2})} \rightarrow 0$$

qui donne la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$.

Exercice 18 : [énoncé]

Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Puisque les fonctions f_n sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0; +\infty[$.

À partir d'un certain rang N_x , on a $x/n \leq \pi/2$ et alors

$$\sin(x/n) \in [0; 1].$$

La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang N_x et par conséquent cette série converge.

Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R} et donc sa fonction somme, que nous noterons S , est définie sur \mathbb{R} .

Les fonctions f_n sont de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{x}{n}\right)$$

de sorte que

$$\|f'_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur \mathbb{R} et donc la fonction S est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , a fortiori cette fonction est continue.

Exercice 19 : [énoncé]

Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \arctan(nx).$$

Chaque f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente. Par convergence normale, on peut affirmer que f est définie et continue sur \mathbb{R} . Chaque f_n est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'_n(x) = \frac{1}{n(1+(nx)^2)}.$$

Pour $a > 0$, sur $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; -a]$,

$$\|f'_n\|_\infty \leq \frac{1}{n(1+(na)^2)}$$

ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées. Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient f de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* .

Exercice 20 : [énoncé]

- (a) N_∞ est bien connue pour être une norme sur l'ensemble des fonctions bornées, il en est de même sur l'ensemble des suites bornées dont le premier terme est nul. L'application $N: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bien définie. On vérifie aisément $N(u+v) \leq N(u) + N(v)$ et $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$. Si $N(u) = 0$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$ et puisque $u_0 = 0$, on obtient $u = 0$. Ainsi N est une norme sur E .
- (b) Pour $u \in E$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2N_\infty(u).$$

On en déduit

$$N(u) \leq 2N_\infty(u).$$

La suite u définie par $u_0 = 0$ et $u_n = (-1)^n$ pour $n \geq 1$ est une suite non nulle pour laquelle il y a égalité.

- (c) Considérons la suite $u^{(p)}$ définie par

$$u^{(p)}(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq p \\ p & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$u^{(p)} \in E, N_\infty(u^{(p)}) = p \text{ et } N(u^{(p)}) = 1.$$

On en déduit que les normes N et N_∞ ne sont pas équivalentes car

$$\frac{N_\infty(u^{(p)})}{N(u^{(p)})} \rightarrow +\infty.$$

Exercice 21 : [énoncé]

- (a) Les applications ϕ et ψ sont linéaires au départ d'un espace de dimension finie donc continues.
- (b) L'application f est bilinéaire au départ d'un produit d'espaces de dimensions finies donc continue.
- (c) Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé

$$AX = \lambda X \text{ avec } X \neq 0.$$

On a alors

$$A^n X = \lambda^n X$$

donc

$$|\lambda^n| \|X\|_\infty = \|A^n X\| \leq p \|A^n\| \|X\|_\infty$$

avec $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq p} |x_j| \neq 0$.

On en déduit que la suite (λ^n) est bornée et donc $|\lambda| \leq 1$.

- (d) $B^n \rightarrow C$ donc par extraction $B^{2n} \rightarrow C$. Or $B^{2n} = B^n \times B^n \rightarrow C^2$ donc par unicité de la limite $C = C^2$. On en déduit que $\text{Sp}C \subset \{0, 1\}$ car les valeurs propres figurent parmi les racines du polynôme annulateur $X^2 - X$. Puisque la suite (B^n) converge, elle est bornée et donc les valeurs propres de B sont de modules inférieurs à 1.

Exercice 22 : [énoncé]

On introduit la fonction $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{pmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{pmatrix}.$$

Cette fonction est continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$ avec

$$f'(x) = \begin{pmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u'(x) & v'(x) & w'(x) \end{pmatrix}.$$

De plus, $f(a) = f(b) = 0$ et donc, par le théorème de Rolle, il existe $d \in]a; b[$ tel que $f'(d) = 0$. Au surplus, $f'(a) = 0$ et une nouvelle application du théorème de Rolle – à la fonction f' cette fois – donne l'existence de $c \in]a; d[\subset]a; b[$ telle

$$f''(c) = \begin{vmatrix} u(a) & v(a) & w(a) \\ u(b) & v(b) & w(b) \\ u''(c) & v''(c) & w''(c) \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 23 : [énoncé]

- (a) La fonction intégrée est définie et continue par morceaux sur $]0; a[$ et se prolonge par continuité en 0 avec la valeur $-1/2$.
 (b) Par développement en série entière, on a pour tout $x \in]-1; 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

et donc, pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\frac{x + \ln(1-x)}{x^2} = -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{n}.$$

Après prolongement par continuité en 0, la fonction intégrée se confond avec la somme d'une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$. Celle-ci converge normalement sur $[0; a[$ ce qui permet d'intégrer terme à terme

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx &= -\sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^a \frac{x^{n-2}}{n} dx \\ &= -\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{n(n-1)} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n(n+1)}. \end{aligned}$$

- (c) Posons $u_n(a) = \frac{a^n}{n(n+1)}$ pour $a \in [0; 1]$.

Les fonctions u_n sont continues et la série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement car

$$|u_n(a)| \leq \frac{1}{n(n+1)} \quad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{n(n+1)} \text{ convergente.}$$

Par convergence uniforme, la somme de la série de fonctions est définie et continue en 1 et donc

$$\lim_{a \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

On en déduit

$$\int_0^1 \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = \lim_{a \rightarrow 1^-} \int_0^a \frac{x + \ln(1-x)}{x^2} dx = -1$$

avec convergence de la série introduite.

Exercice 24 : [énoncé]

- (a) Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) \leq M$ pour tout $x \in [0; 1[$.
 Soit $N \in \mathbb{N}$. Par sommation de termes positifs,

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n \leq S(x) \leq M.$$

En passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=0}^N a_n \leq M.$$

La série à termes positifs $\sum a_n$ ayant ses sommes partielles bornées, elle converge.

- (b) La fonction S est croissante sur $[0; 1[$ et est bornée. On peut donc affirmer qu'elle converge en 1^- et introduire

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right).$$

De plus, cette valeur majore S sur $[0; 1[$, de sorte qu'en reprenant l'étude ci-dessus avec cette valeur pour M , on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \leq \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right).$$

Inversement, pour tout $x \in [0; 1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

et donc à la limite quand $x \rightarrow 1^-$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

puis finalement l'égalité demandée.

Exercice 25 : [énoncé]

- (a) La fonction f est définie sur $] -1; 1[$.
- (b) On vérifie $(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ et $f(0) = 0$.
- (c) $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est développable en série entière sur $] -1; 1[$ et par suite la primitive $x \mapsto \arcsin x$ l'est aussi.
Par produit de fonctions développable en série entière sur $] -1; 1[$, f l'est aussi.
Puisque f est impaire, le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}.$$

On a $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n}$ puis

$$(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)a_n x^{2n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+2}$$

donc

$$(1 - x^2)f'(x) - xf(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{+\infty} ((2n+3)a_{n+1} - (2n+2)a_n)x^{2n+2} = 1.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} a_n$$

d'où

$$a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque pour $x \neq 0$

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{2n+3}}{a_n x^{2n+1}} \right| = \frac{4(n+1)^2 x^2}{(2n+3)(2n+2)} \rightarrow x^2$$

on obtient $R = 1$.

Exercice 26 : [énoncé]

- (a) $R = 1$.

- (b) Pour $x \in] -1; 1[$, on a

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n)x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \ln(n)x^{n+1}.$$

Après décalage d'indice et réunion des deux sommes

$$(1+x)S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} (\ln(n+1) - \ln(n))x^{n+1}$$

ce qui conduit à la relation demandée.

- (c) Posons

$$g_n(x) = (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)x^{n+1}$$

ce qui définit $g_n: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

À l'aide du critère spécial des séries alternées, on montre que la série de fonctions $\sum g_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$ ce qui assure que sa somme est continue. On en déduit par opérations sur les limites

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right).$$

- (d) En regroupant les termes d'indices impairs et pairs consécutifs

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2k-1}\right) - \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right)$$

et donc

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln\left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1} \frac{2k}{2k+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{2n+1} \left(\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1}\right)^2\right).$$

Enfin par la formule du Wallis, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

- (a) La fonction f est impaire car produit d'une fonction paire par la primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire.

(b) f est solution de l'équation différentielle

$$y' = xy + 1.$$

(c) La fonction $t \mapsto e^{-t^2/2}$ est développable en série entière sur \mathbb{R} , ces primitives le sont donc aussi et, par produit de fonctions développable en série entière, on peut affirmer que f est développable en série entière sur \mathbb{R} . Par imparité, on peut écrire ce développement

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n+1}$$

et l'équation différentielle donne

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, (2n+1)a_n = a_{n-1} \text{ et } a_0 = 1.$$

On en déduit

$$a_n = \frac{2^n n!}{(2n+1)!}.$$

Exercice 28 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est définie sur \mathbb{R}_+^* et à valeurs dans \mathbb{R}_+^* . Puisque $a_0 > 0$, la suite récurrente (a_n) est bien définie et à termes dans \mathbb{R}_+^* . Sachant $\ln(1+x) \leq x$, on peut affirmer que la suite (a_n) est décroissante. Or elle est minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. En passant la relation $a_{n+1} = \ln(1+a_n)$ à la limite, on obtient $\ell = \ln(1+\ell)$ ce qui entraîne $\ell = 0$ (car $\ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$). Finalement $a_n \rightarrow 0^+$.

(b) On a alors

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \sim \frac{a_n}{a_n} \rightarrow 1$$

et donc le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ vaut 1.

(c) Pour $x = -1$, la série numérique

$$\sum a_n (-1)^n$$

converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0. Pour $x = 1$, déterminons la nature de la série numérique $\sum a_n$

On a

$$\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - \ln(1+a_n)}{a_n a_{n+1}} = \frac{\frac{1}{2}a_n^2 + o(a_n^2)}{a_n(a_n + o(a_n))} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Césaro

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_k} \right) \rightarrow \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{n} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} \right) \rightarrow \frac{1}{2}.$$

On en déduit

$$a_n \sim \frac{2}{n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, $\sum a_n$ diverge.

Exercice 29 : [énoncé]

On a

$$f(x) = \frac{1}{4} (e^x + e^{-x})(e^{ix} + e^{-ix}) = \frac{1}{4} (e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x} + e^{(-1+i)x} + e^{(-1-i)x})$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n}{4n!} x^n.$$

On a $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ etc, donc

$$\begin{aligned} (1+i)^n + (1-i)^n + (-1+i)^n + (-1-i)^n &= 2\sqrt{2}^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \cos \frac{3n\pi}{4} \right) \\ &= 4\sqrt{2}^n \cos \left(\frac{n\pi}{4} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

Finalement

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p \cos(\frac{p\pi}{2})}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q 2^{2q}}{(4q)!} x^{4q}.$$

Retrouvons ce résultat, en exploitant l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$. La fonction f est développable en série entière sur \mathbb{R} par produit de telles fonctions. De plus, la fonction f est paire donc le développement en série entière de f est de la forme

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Par l'équation différentielle $y^{(4)} + 4y = 0$, on obtient

$$(n + 4)(n + 3)(n + 2)(n + 1)a_{n+4} + 4a_n = 0.$$

Puisque $a_0 = 1$, $a_1 = a_3 = 0$ (par imparité) et $a_2 = 0$ (par calculs), on obtient

$$a_{4q} = \frac{(-1)^q 4^q}{(4q)!} \text{ et } a_{4q+1} = a_{4q+2} = a_{4q+3} = 0$$

ce qui conduit au développement précédent.

Exercice 30 : [énoncé]

- (a) $(x, t) \mapsto t^k \sin(xt)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$ donc, par intégration sur un segment, f est continue.
- (b) $(x, t) \mapsto \frac{d}{dx}(t^k \sin(xt))$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0; 1]$ donc par intégration sur un segment, f est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$f'(x) = \int_0^1 x t^k \cos(xt) dt.$$

On en déduit

$$x f'(x) + (k + 1)f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(t^k \sin(xt)) dt = \sin x.$$

- (c) Par analyse synthèse, on obtient une seule fonction solution :

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!(2n + 2 + k)} x^{2n+2}$$

de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 31 : [énoncé]

- (a) Soit v la somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. La fonction v est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -R; R[$ et

$$t v'(t) + v(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n + 1) a_n t^n.$$

Parallèlement, sur \mathbb{R}

$$3t^2 \cos(t^3/2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} 3t^{3n+2}.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, v est solution de (E) sur $] -R; R[$ si, et seulement si,

$$a_{3n} = a_{3n+1} = 0 \text{ et } a_{3n+2} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{n + 1}.$$

Ainsi la fonction v est déterminée de manière unique et de plus celle-ci existe puisque le rayon de convergence de la série entière définie par les a_n ci-dessus est $R = +\infty$.

- (b) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0; +\infty[$.

La solution générale homogène est $y(t) = \lambda/t$.

Par la méthode de la variation de la constante, on peut proposer la solution particulière

$$y(t) = \frac{2 \cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2} \sin(t^{3/2})}{t}$$

et finalement la solution générale

$$y(t) = \frac{2 \cos(t^{3/2}) + 2t^{3/2} \sin(t^{3/2})}{t} + \frac{\lambda}{t}.$$

Parmi les solutions, la seule pouvant être prolongée par continuité en 0, et donc correspondre à v , est celle obtenue pour $\lambda = -2$.

Exercice 32 : [énoncé]

- (a) Si $x > -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + e^t)$ est définie et continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ et intégrable car

$$t^2/(x + e^t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

Si $x = -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + e^t)$ n'est pas définie en 0 et

$$\frac{1}{e^t - 1} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{t}.$$

La fonction n'est donc pas intégrable et, puisque elle est positive, son intégrale diverge.

Si $x < -1$, la fonction $t \mapsto 1/(x + e^t)$ n'est pas définie en $t_0 = \ln(-x) \in]0; +\infty[$. Par dérivabilité en t_0 , on obtient

$$\frac{1}{e^t + x} = \frac{1}{e^t - e^{t_0}} \underset{t \rightarrow t_0}{\sim} \frac{1}{(t - t_0)e^{t_0}}$$

et encore une fois l'intégrale diverge.

(b) Pour $x = 0$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1.$$

Pour $x \neq 0$, posons le changement de variable $u = e^t$ qui définit une bijection de classe \mathcal{C}^1

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u(x + u)}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \int_1^{+\infty} \frac{1/x}{u} - \frac{1/x}{x + u} du$$

et finalement

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{x + e^t} = \frac{\ln(1 + x)}{x}.$$

(c) Pour $x \in]-1; 1[$, on a

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

On en déduit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n.$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Sachant $1 - \alpha^k x \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 1$, on peut affirmer que pour N assez grand

$$\forall k \geq N, 1 - \alpha^k x > 0.$$

Considérons alors la suite définie par la portion de produit au-delà du rang N

$$\left(\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}.$$

On a

$$\ln \left(\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right) = \sum_{k=N}^n \ln(1 - \alpha^k x)$$

avec $\ln(1 - \alpha^k x) = O(\alpha^k)$. La série de terme général α^k est absolument convergente et donc, par comparaison, la série $\sum \ln(1 - \alpha^k x)$ est aussi absolument convergente. On en déduit la convergence de la suite

$$\left(\sum_{k=N}^n \ln(1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}$$

puis, en composant avec la fonction exponentielle, la convergence de la suite

$$\left(\prod_{k=N}^n (1 - \alpha^k x) \right)_{n \geq N}.$$

Enfin, en tenant compte de la portion initiale du produit définissant $P_n(x)$, on obtient la convergence de la suite $(P_n(x))$

(b) Si f est solution de (E) alors

$$f(x) = (1 - \alpha x)f(\alpha x) = (1 - \alpha x)(1 - \alpha^2 x)f(\alpha^2 x) = \dots$$

Par récurrence, on obtient

$$f(x) = \prod_{k=0}^n (1 - \alpha^k x)f(\alpha^{n+1}x) = P_n(x)f(\alpha^{n+1}x).$$

Quand $n \rightarrow \infty$, $f(\alpha^{n+1}x) \rightarrow f(0)$ car f est continue et donc

$$f(x) = f(0) \prod_{k=0}^{+\infty} (1 - \alpha^k x) = f(0)P(x).$$

(c) Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.

La somme de cette série entière est solution de (E) si, et seulement si,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \alpha^n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1} \alpha^{n-1} x^n.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, ceci équivaut à

$$\forall n \geq 1, a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Inversement, considérons alors la série entière $\sum a_n x^n$ avec

$$a_n = \prod_{k=1}^n \left(\frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1} \right)$$

de sorte que

$$a_n = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} a_{n-1}.$$

Cette série entière est de rayon de convergence $R = +\infty$ car

$$\left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = \frac{\alpha^{n-1}}{\alpha^n - 1} \rightarrow 0$$

et l'étude qui précède assure que sa somme $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) prenant la valeur 1 en 0.

En vertu de la question précédente, on peut affirmer

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^n \frac{\alpha^{k-1}}{\alpha^k - 1} \right) x^n = P(x).$$

Exercice 34 : [énoncé]

- (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, on peut affirmer $x \sin \theta e^{i\theta} \neq 1$ et par multiplication par la quantité conjuguée

$$\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}} = \frac{\sin \theta e^{i\theta} (1 - x \sin \theta e^{-i\theta})}{|1 - x \sin \theta e^{i\theta}|^2}.$$

On en déduit

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}} \right) = \frac{\sin^2 \theta}{1 - 2x \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta}.$$

- (b) La fonction f est définie et de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et, après calculs

$$f'(x) = \frac{\sin^2 \theta}{1 - 2x \sin \theta \cos \theta + x^2 \sin^2 \theta}.$$

Pour $|x \sin \theta| < 1$, on a

$$\frac{\sin \theta e^{i\theta}}{1 - x \sin \theta e^{i\theta}} = \sin \theta e^{i\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} (x \sin \theta e^{i\theta})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin \theta)^{n+1} e^{i(n+1)\theta} x^n.$$

On en déduit

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\sin \theta)^{n+1} \sin((n+1)\theta) x^n$$

puis, par intégration de développement en série entière,

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\sin \theta)^n \sin(n\theta)}{n} x^n$$

avec

$$f(0) = -\arctan\left(\frac{1}{\tan \theta}\right) = \arctan(\tan(\theta - \pi/2)) = \theta - \pi/2$$

car $\theta - \pi/2 \in]-\pi/2; \pi/2[$.

Exercice 35 : [énoncé]

- (a) S est définie sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$.
 (b) Par convergence normale sur $[1; +\infty[$, on peut intervertir limites et sommes infinies pour justifier,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 = 0$$

et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

de sorte que

$$S(x) \sim \frac{1}{(1-a)x}.$$

- (c) Pour $|x| < 1$;

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{x+n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m.$$

Or $\sum \left| (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m \right|$ converge et $\sum \sum_{m=0}^{+\infty} \left| (-1)^m \frac{a^n}{n^{m+1}} x^m \right|$ converge. Par le théorème de Fubini, on peut permuter les sommes infinies et affirmer

$$S(x) - \frac{1}{x} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^n}{n^{m+1}} \right) x^m.$$

Exercice 36 : [énoncé]

Les séries entières définissant S_0, S_1 et S_2 sont de rayons de convergence $R = +\infty$.

Pour $x \in \mathbb{C}$, on a

$$S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

On a aussi

$$S_0(x) + jS_1(x) + j^2S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(jx)^n}{n!} = \exp(jx)$$

et

$$S_0(x) + j^2S_1(x) + jS_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(j^2x)^n}{n!} = \exp(j^2x).$$

En sommant ces trois relations, on obtient

$$S_0(x) = \frac{1}{3}(\exp(x) + \exp(jx) + \exp(j^2x)).$$

Exercice 37 : [énoncé]

La fonction f est dérivable et

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1+x)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

est une fraction rationnelle dont 0 n'est pas pôle. La fonction f' puis f sont développables en série entière et les rayons de convergence des séries entières correspondantes sont égaux.

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \frac{1/2i}{x + 1 - i} - \frac{1/2i}{x + 1 + i} = \operatorname{Re}\left(\frac{-i}{x + 1 - i}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{x + 1 - i}\right)$$

avec

$$\frac{1}{x + 1 - i} = \frac{1}{1 - i} \frac{1}{1 + \frac{x}{1-i}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1 - i)^{n+1}} x^n$$

avec un rayon de convergence $R = \sqrt{2}$.

Comme $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ on a

$$\frac{1}{x^2 + 2x + 2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{4}\right)}{2^{(n+1)/2}} x^n$$

puis

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{4}\right)}{(n+1)2^{(n+1)/2}} x^{n+1}$$

avec $R = \sqrt{2}$.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, pour $|x| < \min(R, R')$, $\sum c_n x^n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right).$$

Ainsi le rayon de convergence R'' de $\sum c_n x^n$ vérifie $R'' \geq \min(R, R')$.

En revanche, on ne peut facilement rien dire de plus de façon générale. Par exemple $1 - x$ et $\frac{1}{1-x}$ se développent en série entière de rayons de convergence $+\infty$ et 1 et leur produit de Cauchy est de rayon de convergence $+\infty \dots$

(b) Puisque $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \sim \ln n$, on obtient facilement $R = 1$.

Si l'on pose $a_k = \frac{1}{k}$ pour $k \geq 1$ et $b_k = 1$ pour $k \geq 0$ alors

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Par suite, pour $|x| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) On a

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

donc le rayon de convergence de la première série entière vaut 1.

Aussi

$$\sin(e^{-n}) \sim e^{-n}$$

donc le rayon de convergence de la deuxième série entière vaut e.

- (b) On sait qu'une série entière converge normalement sur tout compact inclus dans son disque ouvert de convergence, mais en revanche elle ne converge pas normalement sur ce disque. La série entière $\sum z^n$ est un contre-exemple car

$$R = 1 \text{ et } \|z \mapsto z^n\|_{\infty, D(0,1)} = 1.$$

Exercice 40 : [énoncé]

- (a) $|\sin(a^n x)| \leq |x| |a^n|$, il y a donc convergence absolue de la série définissant $f(x)$.
- (b) $f_n : x \mapsto \sin(a^n x)$ est \mathcal{C}^∞ et $\|f_n^{(k)}\|_\infty \leq |a|^{nk}$ terme général d'une série absolument convergente donc f est de classe \mathcal{C}^∞ et

$$\|f^{(k)}\|_\infty \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a|^{nk} = \frac{1}{1 - |a|^k} \leq \frac{1}{1 - |a|}.$$

- (c) Par la formule de Taylor-Laplace,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

avec

$$\left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt \right| \leq \frac{1}{1 - |a|} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0.$$

Ainsi la série de Taylor de f converge sur \mathbb{R} vers f et donc f est développable en série entière.

Exercice 41 : [énoncé]

Par la règle de d'Alembert, $R = 1/e$.

Sur $[-1/e; 1/e]$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\text{sh } n}{n(n+1)} x^n = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(ex)^n}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x/e)^n}{n(n+1)} \right).$$

Or sur $] -1; 1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y^n}{n+1} = -\ln(1-y) + \frac{1}{y}(\ln(1-y) + y).$$

Cette identité pouvant être prolongée en -1 et en 1 par continuité. Cela permet alors d'expliciter la somme cherchée.

Exercice 42 : [énoncé]

Par intégration par parties successives

$$a_n = \int_0^1 t^n (1-t)^n dt = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Puisque $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow \frac{1}{4}$ on a $R = 4$.

Pour $|x| < 4$, par convergence normale

$$f(x) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t(1-t)x} = \int_0^1 \frac{dt}{xt^2 - xt + 1}.$$

Si $x \in]0; 4[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(4-x)}} \arctan \sqrt{\frac{x}{4-x}}.$$

Si $x \in]-2; 0[$,

$$f(x) = \frac{4}{\sqrt{x(x-4)}} \operatorname{argth} \sqrt{\frac{x}{x-4}}.$$

Si $x = 0$, $f(x) = 1$.

Exercice 43 : [énoncé]

La suite (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son terme général est donné par

$$a_n = \alpha + n(\beta - \alpha).$$

Si $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ alors $R = 1$.

Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ alors $R = +\infty$.

Exercice 44 : [énoncé]

- (a) Pour $r \in]0; R[$, la série numérique $\sum a_n r^n$ converge donc $a_n r^n \rightarrow 0$ et à partir d'un certain rang N , on a

$$|a_n| r^n \leq 1.$$

- (b) On a alors

$$\frac{a_n z^n}{n!} = O\left(\frac{z^n}{r^n n!}\right).$$

Posons

$$u_n(z) = \frac{z^n}{r^n n!}.$$

Pour $z \neq 0$, on a

$$\left| \frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par la règle de d'Alembert, la série numérique $\sum u_n(z)$ converge absolument.

Par comparaison, la série numérique $\sum a_n z^n / n!$ converge aussi absolument.

On peut donc la série entière $\sum a_n z^n / n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

(c) On a

$$|S_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^N |a_k| + \frac{n-N}{r^n}$$

et donc $S_n = O(n/r^n)$ puis

$$\frac{S_n z^n}{n!} = O\left(\frac{z^n}{r^n (n-1)!}\right).$$

Comme ci-dessus, la série entière $\sum S_n z^n / n!$ est de rayon de convergence $+\infty$.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Comme la suite (a_n) est bornée, on peut écrire $a_n x^n = O(x^n)$. Or la série $\sum x^n$ converge absolument pour $|x| < 1$ et donc, par comparaison, la série $\sum a_n x^n$ est absolument convergente.

Puisque $\cos(n\theta) = \operatorname{Re}(e^{in\theta})$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} (x e^{i\theta})^n\right).$$

Par sommation géométrique (possible puisque $|x e^{i\theta}| < 1$)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{1 - x e^{i\theta}}\right) = \frac{1 - x \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}.$$

(b) La convergence de la série étudiée n'est pas immédiate. Exprimons ses sommes partielles

$$\sum_{n=0}^N \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \sum_{n=0}^N \cos(n\theta) x^n dx.$$

Par le calcul au dessus, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^N \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1} dx - \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n dx.$$

Puisque $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$, on peut écrire

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n \right| \leq \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} e^{in\theta} x^n \right|$$

ce qui donne par un calcul analogue au précédent

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n \right| \leq \frac{x^{N+1}}{|1 - x e^{i\theta}|} \leq \frac{x^{N+1}}{|\operatorname{Im}(x e^{i\theta})|} = \frac{x^N}{|\sin \theta|}.$$

Par conséquent

$$\left| \int_0^1 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \cos(n\theta) x^n dx \right| \leq \int_0^1 \frac{x^N}{|\sin \theta|} dx \leq \frac{1}{(N+1) |\sin \theta|} \rightarrow 0.$$

On en déduit que la série $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{x - 2x \cos \theta + 1} dx.$$

(c) On décompose l'intégrale étudiée en deux intégrales directement calculables

$$\int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} dx = \sin^2 \theta \int_0^1 \frac{dx}{(x - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} - \frac{\cos \theta}{2} \int_0^1 \frac{2x - 2 \cos \theta}{x^2 - 2x \cos \theta + 1}$$

et l'on obtient

$$\int_0^1 \frac{1 - x \cos \theta}{1 - 2x \cos \theta + x^2} dx = \sin \theta \left[\arctan \frac{x - \cos \theta}{\sin \theta} \right]_0^1 - \frac{\cos \theta}{2} \left[\ln(x^2 - 2x \cos \theta + 1) \right]_0^1.$$

On simplifie en exploitant

$$\arctan\left(-\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right) = \arctan(\tan(\theta - \pi/2)) = \theta - \pi/2.$$

$$\arctan\left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta}\right) = \arctan \frac{2 \sin^2 \theta/2}{2 \sin \theta/2 \cos \theta/2} = \frac{\theta}{2}$$

et

$$\ln(2 - 2 \cos \theta) = \ln(4 \sin^2 \theta/2).$$

On obtient au final

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n+1} = \frac{\pi - \theta}{2} \sin \theta - \cos \theta \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Exercice 46 : [énoncé]

g est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$, c'est donc une fonction de classe \mathcal{C}^∞ et h l'est aussi par produit.

$h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ avec

$$f_n(t) = \frac{(-1)^n t^n e^{-t}}{2^{2n}(n!)}$$

pour tout $t \in]0; +\infty[$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

Puisque

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt = n!$$

on obtient

$$\int_0^{+\infty} |f_n| = \frac{1}{2^{2n}n!}$$

et donc la série $\sum \int_{]0; +\infty[} |f_n|$ converge.

Puisque $\sum f_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ vers h continue par morceaux, on peut par théorème affirmer que h est intégrable sur \mathbb{R}_+ et

$$\int_0^{+\infty} h(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}n!} = e^{-1/4}.$$

Exercice 47 : [énoncé]

- (a) La fonction définissant l'intégrale est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$, se prolonge par continuité en 0 et est négligeable devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$: elle est intégrable.

- (b) Par intégration par parties généralisée justifiée par la convergence du crochet

$$T(a, b) = \left[\frac{t^a e^{-bt}}{-b} \right]_0^{+\infty} + \frac{a}{b} \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-bt} dt = \frac{a}{b} T(a-1, b).$$

On en déduit

$$T(a, b) = \frac{a!}{b^{a+1}}.$$

- (c) On peut simplifier $S_{n-1} - S_n$

$$S_{n-1} - S_n = \int_0^{+\infty} t^p e^{-nt} dt = \frac{p!}{n^{p+1}}.$$

Par télescopage

$$S_0 = \sum_{k=1}^n (S_{k-1} - S_k) + S_n = p! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{p+1}} + S_n.$$

- (d) Par convergence dominée sachant

$$\left| \frac{t^p}{e^t - 1} e^{-nt} \right| \leq \frac{t^p}{e^t - 1} = \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable}$$

on obtient que la suite (S_n) converge vers 0.

- (e) Il suffit de passer à la limite quand n tend vers l'infini.

Exercice 48 : [énoncé]

- (a) Posons

$$f(x, t) = \frac{e^{-xt} \sin t}{t}$$

définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et intégrable car

$$f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 1 \quad \text{et} \quad t^2 f(x, t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -e^{-xt} \sin(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t .

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. On a

$$\forall (x, t) \in [a; b] \times]0; +\infty[, \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} = \varphi(t).$$

La fonction φ est intégrable sur $]0; +\infty[$. Par domination sur tout segment, on obtient F de classe \mathcal{C}^1 sur $]0; +\infty[$ et

$$F'(x) = - \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt.$$

En exploitant

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin(t) dt = \text{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^{it} dt \right)$$

on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.$$

(b) On en déduit

$$F(x) = -\arctan x + C^{te} \text{ sur }]0; +\infty[.$$

Montrons $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$. On a $|\sin t| \leq t$ pour tout $t > 0$ et donc

$$|F(x)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

On conclut

$$F(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x.$$

(c)

Exercice 49 : [\[énoncé\]](#)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons $u_n :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{(1+x^3)^n}.$$

La fonction u_n est continue par morceaux et intégrable car

$$u_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3n}} \text{ avec } 3n > 1.$$

(b) La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers

$$u_\infty : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Les fonctions u_n et u_∞ sont continues par morceaux et, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\left| \frac{1}{(1+x^3)^n} \right| \leq \frac{1}{1+x^3} = \varphi(x).$$

La fonction φ est intégrable et par convergence dominée

$$I_n = \int_0^{+\infty} u_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} u_\infty(t) dt = 0.$$

(c) On remarque $0 \leq u_{n+1}(x) \leq u_n(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et, par intégration en bon ordre, $0 \leq I_{n+1} \leq I_n$. On en déduit que la série $\sum (-1)^{n-1} I_n$ est alternée et que son terme général décroît en valeur absolue vers 0 : la série converge par application du critère spécial.

Pour tout $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} I_n &= \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{(1+x^3)^n} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3} \left(\frac{1 - \frac{(-1)^N}{(1+x^3)^N}}{1 + \frac{1}{1+x^3}} \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} \left(1 + \frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N} \right) dx. \end{aligned}$$

Or

$$\left| \int_0^{+\infty} \frac{1}{2+x^3} \cdot \frac{(-1)^{N+1}}{(1+x^3)^N} dx \right| \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^3)^{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

car $2+x^3 \geq 1+x^3$ On en déduit

$$\sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} I_n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{2+x^3}.$$

Pour calculer, cette dernière intégrale, on réalise le changement de variable $x = 2^{1/3}t$ puis la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1/3}{t+1} + \frac{-\frac{1}{3}t + \frac{2}{3}}{t^2-t+1}.$$

Au terme des calculs

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} I_n = \frac{2^{1/3}\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 50 : [\[énoncé\]](#)

Pour $x \in]0; 1[$, on peut écrire

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

et pour $x \in]0; 1[$, on a

$$\frac{(\ln x)^2}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2.$$

Considérons alors la série des fonctions

$$u_n(x) = (-1)^n x^{2n} (\ln x)^2.$$

Par convergence des séries précédentes, la série des fonctions u_n converge simplement vers la fonction $x \mapsto (\ln x)^2 / (1 + x^2)$. Les fonctions u_n et la fonction somme sont continues par morceaux.

Chaque fonction u_n est intégrable et

$$\int_0^1 |u_n(x)| dx = \int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx.$$

Par intégration par parties, on montre

$$\int_0^1 x^{2n} (\ln x)^2 dx = \frac{2}{(2n+1)^3}.$$

On peut alors appliquer le théorème d'intégration terme à terme et affirmer

$$\int_0^1 \frac{(\ln x)^2}{1+x^2} dx = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Exercice 51 : [énoncé]

On définit $f: \mathbb{R} \times]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x, t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt).$$

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Quand $t \rightarrow +\infty$, $t^2 f(x, t) \rightarrow 0$ et quand $t \rightarrow 0^+$, $f(x, t) \rightarrow b - a$ donc $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est dérivable et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt).$$

La fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R} \times]0; +\infty[$ et

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} + e^{-bt} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable.

On en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} (e^{-bt} - e^{-at}) \sin(xt) dt.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} e^{-ct} \sin(xt) dt = \operatorname{Im} \left(\int_0^{+\infty} e^{(-c+ix)t} dt \right) = \frac{x}{c^2 + x^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{x}{x^2 + b^2} - \frac{x}{x^2 + a^2}.$$

(c) On en déduit

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right) + C^{te}.$$

Pour déterminer la constante, on étudie la limite de F en $+\infty$. Posons

$$\psi(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}$$

ce qui définit une fonction de classe \mathcal{C}^1 intégrable ainsi que sa dérivée sur $]0; +\infty[$.

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) dt = \frac{1}{x} \left[\psi(t) \sin(xt) \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \psi'(t) \sin(xt) dt$$

et donc

$$\left| \int_0^{+\infty} \psi(t) \cos(xt) dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} |\psi'(t)| dt \rightarrow 0.$$

On peut conclure

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{x^2 + b^2}{x^2 + a^2} \right).$$

Exercice 52 : [énoncé]

Pour $x > 0$,

$$x^x = e^{x \ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$$

donc

$$\int_0^1 x^x dx = \int_{]0;1]} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

avec

$$f_n(x) = \frac{(x \ln x)^n}{n!}.$$

Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0; 1]$.

Les fonctions f_n sont intégrables et

$$\int_{]0;1]} |f_n| = \int_{]0;1[} \frac{(-1)^n x^n (\ln x)^n}{n!} dx.$$

Or

$$\int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^n \right]_{\varepsilon}^1 - \frac{n}{n+1} \int_{\varepsilon}^1 x^n (\ln x)^{n-1} dx$$

donc quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n dx = -\frac{n}{n+1} \int_{]0;1]} x^n (\ln x)^{n-1} dx.$$

Ainsi

$$\int_{]0;1]} x^n (\ln x)^n dx = (-1)^n \frac{n}{n+1} \frac{n-1}{n+1} \dots \frac{1}{n+1} \int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Par suite

$$\int_0^1 |f_n| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

et il y a convergence de la série $\sum \int_0^1 |f_n|$

Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1]} x^x dx$ est définie et

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$

puis le résultat voulu.

Exercice 53 : [énoncé]

(a) La fonction Γ est définie sur \mathbb{R}_+^* .

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $f: t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Puisque $t^2 f(t) = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$, la fonction f est assurément intégrable sur $[1; +\infty[$.

De plus, $f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$ est intégrable sur $]0; 1]$ si, et seulement si, $x - 1 > -1$ i.e. $x > 0$.

Ainsi f est intégrable sur $]0; +\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.

Enfin, la fonction f étant positive, l'intégrabilité équivaut à l'existence de l'intégrale.

(b) Par intégration par parties

$$I_n(x) = \left[\frac{t^x}{x} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right]_0^n + \int_0^n \frac{t^x}{x} \frac{n}{n} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} dt.$$

En répétant l'opération

$$I_n(x) = \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n-1)n^n} \int_0^n t^{x+n-1} dx$$

et finalement

$$I_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

(c) Quand $n \rightarrow +\infty$

$$\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right)\right) = \exp\left(n\left(-\frac{t}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \rightarrow e^{-t}.$$

Considérons la suite des fonctions

$$f_n: t \mapsto \begin{cases} t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n & \text{si } t \in]0; n[\\ 0 & \text{si } t \in [n; +\infty[. \end{cases}$$

Soit $t > 0$ fixé. Pour n assez grand $t \in]0; n[$ et

$$f_n(t) = t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \rightarrow t^{x-1} e^{-t}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers la fonction f introduite dans la première question.

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux.

Enfin, pour $t \in]0; n[$, on a

$$|f_n(t)| = t^{x-1} \exp(n \ln(1 - t/n)) \leq t^{x-1} e^{-t} = f(t)$$

car il est connu $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$. On a aussi $|f_n(t)| \leq f(t)$ pour $t \in [n; +\infty[$ et donc

$$\forall t \in]0; n[, |f_n(t)| \leq f(t).$$

La fonction f étant intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt.$$

Puisque

$$\int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$$

on peut conclure

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

Exercice 54 : [énoncé]

En découpant l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx + \int_1^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}} dx.$$

En appliquant le théorème de convergence dominée aux deux intégrales, on obtient

$$I_n \rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1.$$

Exercice 55 : [énoncé]

f_n est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \rightarrow \frac{1}{n}$, on peut donc la prolonger par continuité.

Quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Par suite f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$.

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} dx.$$

Posons

$$g_n(x) = \frac{n \ln(1+x/n)}{x(1+x^2)} = n f_n(x).$$

Pour $x > 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, $g_n(x) \rightarrow \frac{1}{1+x^2}$.

De plus, sachant $\ln(1+u) \leq u$, on a $|g_n(x)| \leq \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$ avec φ intégrable.

Par convergence dominée,

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 56 : [énoncé]

(a) (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a; 1[\\ f(1)/2 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1; b]. \end{cases}$$

(b) Sachant $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ avec f intégrable sur $[a; b]$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient directement le résultat proposé.

(c) Par une intégration par parties

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 - \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt.$$

D'une part

$$\left[\frac{1}{n} \ln(1+t^n) f(t) \right]_a^1 = \frac{\ln 2}{n} f(1) + \frac{\ln(1+a^n)}{n} f(a) = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

car $\ln(1+a^n) \rightarrow 0$.

D'autre part

$$\left| \frac{1}{n} \int_a^1 \ln(1+t^n) f'(t) dt \right| \leq \frac{1}{n} \|f'\|_\infty \int_0^1 t^n dt = O\left(\frac{1}{n^2}\right) = o\left(\frac{1}{n}\right)$$

sachant $\ln(1+u) \leq u$.

Au final, on obtient

$$\int_a^1 t^{n-1} f_n(t) dt = \frac{\ln 2}{n} f(1) + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 57 : [énoncé]

Posons

$$f_n : t \mapsto \frac{\sin(nt)}{nt+t^2}.$$

La fonction f_n est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Quand $t \rightarrow 0^+$, $f_n(t) \sim \frac{nt}{nt+t^2} \rightarrow 1$.

Quand $t \rightarrow +\infty$; $f_n(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

On peut donc affirmer que f_n est intégrable sur $]0; +\infty[$.

Pour $t \in]0; +\infty[$.

Quand $n \rightarrow +\infty$, $f_n(t) = O\left(\frac{1}{n}\right)$ donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

De plus, pour $t \leq \pi/2$, on a, sachant $|\sin u| \leq |u|$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{nt}{nt + t^2} \leq 1$$

et pour $t \geq \pi/2$,

$$|f_n(t)| \leq \frac{1}{nt + t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$

Ainsi $|f_n| \leq \varphi$ avec

$$\varphi: t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0; \pi/2] \\ 1/t^2 & \text{si } t \in]\pi/2; +\infty[. \end{cases}$$

La fonction φ étant intégrable sur $]0; +\infty[$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et affirmer

$$u_n \rightarrow \int_0^{+\infty} 0 dt = 0.$$

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Posons $f(x, t) = \frac{\ln t}{t+x}$.

f est définie et continue sur $]0; +\infty[\times]0; 1]$.

Pour $x > 0$, $f(x, t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x} \ln t$ donc $\sqrt{t}f(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$ puis $t \mapsto f(x, t)$ est

intégrable sur $]0; 1]$.

Ainsi F est définie sur $]0; +\infty[$.

f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -\frac{\ln t}{(t+x)^2}$.

Soit $[a; b] \subset]0; +\infty[$. Pour $x \in [a; b]$,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{|\ln t|}{a^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0; 1]$.

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que F est de classe \mathcal{C}^1 et

$$F'(x) = \int_0^1 -\frac{\ln t}{(t+x)^2} dt.$$

(b) Par intégration par parties,

$$F'(x) = \left[\ln t \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{t} \left(\frac{1}{t+x} - \frac{1}{x} \right) dt$$

où la primitive de $t \mapsto \frac{1}{t+x}$ est choisie de sorte de s'annuler en 0 pour que l'intégration par parties présente deux convergences.

Ainsi

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{dt}{x(t+x)} = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x}.$$

Par opérations

$$G'(x) = \frac{\ln(x+1) - \ln x}{x} - \frac{\ln(1+1/x) + \ln x}{x} = -\frac{1}{x} \ln x$$

puis

$$G(x) = G(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2.$$

Or $G(1) = 2F(1)$ avec

$$F(1) = \int_0^1 \frac{\ln t}{t+1} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k \ln(t) dt.$$

Or $\int_0^1 t^k \ln(t) dt = \frac{-1}{(k+1)^2}$ donc par convergence de la série des intégrales des

valeurs absolues, $F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Sachant $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, on obtient

$F(1) = -\frac{\pi^2}{12}$ puis

$$G(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Par décomposition en éléments simples

$$\frac{t-1}{(t+1)(t^2+2t \operatorname{ch} \theta + 1)} = \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} \theta - 1}}{t+1} - \frac{\frac{1}{\operatorname{ch} \theta - 1}(t + \operatorname{ch} \theta)}{t^2 + 2t \operatorname{ch} \theta + 1}.$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t-1}{t+1} \frac{\ln t}{t^2 + 2t \operatorname{ch}(\theta) + 1} dt = \frac{1}{\operatorname{ch} \theta - 1} (F(1) - \frac{1}{2}G(e^\theta)) = \frac{\theta^2}{4(\operatorname{ch}(\theta) - 1)}.$$

Exercice 59 : [énoncé]

L'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dx = \int_a^b f_n(x)g(x) dx$$

est bien définie.

Par le changement de variable $x = u/n$ bijectif de classe \mathcal{C}^1

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)g(x) dx = \int_{na}^{nb} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n) du = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(u) du$$

avec

$$h_n(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{u^2}{2n^4}\right)^{2n^4} g(u/n)\chi_{[na;nb]}$$

h_n est continue par morceaux, (h_n) converge simplement vers h continue par morceaux avec

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} g(0).$$

Pour n assez grand de sorte que $|a/n|, |b/n| \leq 1$ on a pour tout $u \in [na; nb]$, $|u^2/2n^4| \leq 1/2 < 1$,

$$|h_n(u)| = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{2n^4 \ln(1-u^2/2n^4)} \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2} = \varphi(u)$$

et cette inégalité vaut aussi pour $u \notin [na; nb]$.

La fonction φ étant continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R} , on peut appliquer le théorème de convergence dominée et conclure sachant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x, t) = \frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

est définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$,

$t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et égale à un $O(1/t^3)$ en $+\infty$. Ainsi F est définie sur \mathbb{R}_+

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

est définie sur $]0; +\infty[\times]0; +\infty[$,

$t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$ et $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur $]0; +\infty[$.

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux et intégrable sur $]0; +\infty[$, donc F est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_+ avec

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

(b) Pour $x \neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{1}{x^2-1} \left(\frac{x^2}{1+x^2t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right)$$

d'où

$$F'(x) = \frac{x-1}{x^2-1} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

ce qui est encore valable en 1 par continuité.

Par suite

$$F(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1) + C$$

avec $C = 0$ puisque $F(0) = 0$.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(1+t^x)^n}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

Cas $x < 0$:

$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1$ donc la fonction n'est pas intégrable.

Cas $x = 0$:

$\frac{1}{(1+t^x)^n} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$. Même conclusion.

Cas $x > 0$:

Quand $t \rightarrow 0^+$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \rightarrow 1$ et quand $t \rightarrow +\infty$, $\frac{1}{(1+t^x)^n} \sim \frac{1}{t^{nx}}$ donc la fonction est intégrable sur $]0; +\infty[$ si, et seulement si, $nx > 1$.

(b) Pour $t > 0$, on remarque que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^x)^n} = \frac{1}{t^x}.$$

Par l'absurde, si $\sum I_n(x)$ converge, on peut appliquer un théorème d'intervention somme et intégrale assurant que $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$. C'est absurde.

On conclut que $\sum I_n(x)$ diverge.

Par intégration par parties avec deux convergences

$$I_n(2) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2nt^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt = 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt.$$

Or

$$I_n(2) - I_{n+1}(2) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

donc

$$I_{n+1}(2) = \frac{2n-1}{2n} I_n(2).$$

On en déduit

$$I_{n+1}(2) = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

car $I_1(2) = \pi/2$.

Notons que par le changement de variable $t = \tan u$, on pouvait aussi transformer $I_n(2)$ en une intégrale de Wallis.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) $f_{p,k}$ est définie et continue par morceaux sur $]0; 1]$.

Quand $x \mapsto 0^+$, $\sqrt{x} f_{p,k}(x) = x^{p+1/2} (\ln x)^k \rightarrow 0$ donc $f_{p,k}(x) = o(1/\sqrt{x})$.

Par suite $f_{p,k}$ est intégrable sur $]0; 1]$.

(b) Par intégration par parties

$$K_{p,k} = -\frac{k}{p+1} K_{p,k-1}.$$

(c)

$$K_{p,k} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^k} K_{p,0} = \frac{(-1)^k k!}{(p+1)^{k+1}}$$

et donc

$$J_n = K_{n,n} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

(d) $x^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x \ln x)^n}{n!}$ pour tout $x \in]0; 1]$.

Posons $f_n : x \mapsto \frac{1}{n!} (x \ln x)^n$.

Les fonctions f_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0; 1]$.

La série $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ et sa somme, qui est $x \mapsto x^x$, est continue par morceaux sur $]0; 1]$.

Enfin

$$\int_0^1 |f_n(x)| dx = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

est terme général d'une série convergente.

Par théorème d'intégration terme à terme, $x \mapsto x^x$ est intégrable sur $]0; 1]$ et

$$I = \int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^3)^n$ définie sur $]0; +\infty[$.

Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la suite (u_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $]0; +\infty[$, elle-même continue par morceaux. De plus

$$\forall n \geq 1, \forall t \in]0; +\infty[, |u_n(t)| \leq \varphi(t)$$

avec $\varphi : t \mapsto 1/(1+t^3)$ intégrable sur $]0; +\infty[$ et donc aussi sur $]0; +\infty[$.

Par application du théorème de convergence dominée sur $]0; 1]$ et sur $[1; +\infty[$, on obtient

$$U_n \rightarrow 0 \text{ et } V_n \rightarrow 0.$$

(b) Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; 1]$ vers la fonction U continue par morceaux donnée par

$$U(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n} = \frac{1}{1+t^3} \frac{1}{1-\frac{1}{1+t^3}} = \frac{1}{t^3}.$$

Si, par l'absurde, la série $\sum U_n$ converge, on est dans la situation où la série de terme général $\int_{]0;1]} |u_n(t)| dt$ converge et l'on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme affirmant :

$$U \text{ est intégrable sur }]0; 1] \text{ et } \int_{]0;1]} U(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 u_n(t) dt.$$

Or ceci est absurde car la fonction U n'est pas intégrable sur $]0; 1]$!

On en déduit que la série $\sum U_n$ diverge.

En revanche, la série $\sum V_n$ est à termes positifs et

$$\sum_{k=1}^n V_k \leq \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(1+t^3)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum V_n$ étant majorées, on peut affirmer que la série $\sum V_n$ converge.

Exercice 64 : [énoncé]

(a) Quand $x \rightarrow 0^+$, $f_n(x) \sim \frac{2x}{nx} \rightarrow \frac{2}{n}$ donc $\alpha = \frac{2}{n}$ est l'unique valeur pour laquelle f est continue en 0.

(b) f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $f_n(x) \sim \frac{e^x}{e^{nx}} \rightarrow 0$ donc f_n est bornée sur \mathbb{R}_+ .

On peut envisager une argumentation plus détaillée :

- puisque f converge en $+\infty$, il existe $A \geq 0$ tel que f est bornée sur $[A; +\infty[$;

- puisque f est continue, f est bornée sur $[0; A]$;

- et finalement f est bornée sur la réunion de ces deux intervalles par la plus grande des deux bornes.

(c) f_n est définie et continue sur $[0; +\infty[$ et quand $x \rightarrow +\infty$, $x^2 f_n(x) \sim x^2 e^{-(n-1)x} \rightarrow 0$ donc $f_n(x) = o(1/x^2)$ et donc f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

(d) Pour $x > 0$,

$$\frac{2 \operatorname{sh} x}{e^{nx} - 1} = 2 \operatorname{sh} x \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-nkx} = \sum_{k=1}^{+\infty} (e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}).$$

$$\int_0^{+\infty} |e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}| dx = \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1} = \frac{2}{n^2 k^2 - 1} = O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut sommer terme à terme et affirmer

$$\int_0^{+\infty} \frac{2 \operatorname{sh} x}{e^{nx} - 1} dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-(nk-1)x} - e^{-(nk+1)x}) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{nk-1} - \frac{1}{nk+1}.$$

Pour $n = 2$, la somme est facile à calculer.

Exercice 65 : [énoncé]

Supposons f solution.

$$f(x) = -1 - 2x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt.$$

On a $f(0) = -1$ et f dérivable avec

$$f'(x) = -2 \int_0^x f(t) dt - 2xf(x) + xf(x).$$

Par suite $y: x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est solution de l'équation différentielle

$$y'' + xy' + 2y = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = -1$. Ceci détermine y et donc f de manière unique.

En recherchant les solutions développables en séries entières, on obtient $y(x) = -xe^{-x^2/2}$ puis

$$f(x) = (x^2 - 1)e^{-x^2/2}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) On peut écrire

$$f(x) = 1 - x - x \int_0^x f(t) dt + \int_0^x t f(t) dt.$$

Par opération sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1 , f est de classe \mathcal{C}^1 .

(b) Soit f solution. f est de classe \mathcal{C}^1 et

$$f'(x) = -1 - \int_0^x f(t) dt.$$

On en déduit que f est de classe \mathcal{C}^2 et

$$f''(x) + f(x) = 0.$$

Ainsi la fonction f est de la forme

$$f(x) = \lambda \cos x + \mu \sin x.$$

De plus, on observe $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ ce qui détermine λ et μ :

$$\lambda = 1 \text{ et } \mu = -1.$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que la fonction $x \mapsto \cos x - \sin x$ est solution, soit en remontant les calculs (ce qui est possible) soit en refaisant ceux-ci.

Exercice 67 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire de solution générale homogène

$$y(x) = \frac{\lambda}{\cos x}.$$

L'application de la méthode de la variation de la constante amène à déterminer

$$\int \cos^3 x \, dx = \int \cos x \, dx - \int \cos x \sin^2 x \, dx = \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x.$$

Au final, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{\frac{1}{3} \sin^3 x - \sin x + \lambda}{\cos x}.$$

Exercice 68 : [énoncé]

Soient $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable et $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ un \mathcal{C}^2 difféomorphisme.

Posons $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie de sorte que $y(u) = x(t)$ i.e. $y(u) = x(\varphi^{-1}(u))$.

La fonction y est deux fois dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x(t) = y(\varphi(t))$.

On a alors $x'(t) = \varphi'(t)y'(\varphi(t))$ et $x''(t) = (\varphi'(t))^2 y''(\varphi(t)) + \varphi''(t)y'(\varphi(t))$.

Par suite

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = (1+t^2)\varphi'(t)^2 y''(\varphi(t)) + ((1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t))y'(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t)).$$

Pour $\varphi(t) = \operatorname{argsh} t$, $\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et $(1+t^2)\varphi''(t) + t\varphi'(t) = 0$ de sorte que

$$(1+t^2)x''(t) + tx'(t) + a^2x(t) = 0 \iff y''(\varphi(t)) + a^2y(\varphi(t)) = 0.$$

Cela nous amène à résoudre l'équation

$$y''(u) + a^2y(u) = 0.$$

Si $a \neq 0$, la solution générale de $y''(u) + a^2y(u) = 0$ est

$y(u) = \lambda \cos(au) + \mu \sin(au)$ et la solution générale de $(1+t^2)x'' + tx' + a^2x = 0$ est

$$x(t) = \lambda \cos(a \operatorname{argsh} t) + \mu \sin(a \operatorname{argsh} t) \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Si $a = 0$, on parvient à

$$x(t) = \lambda + \mu \operatorname{argsh} t \text{ avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Exercice 69 : [énoncé]

$P = (x+1)X - 1$ convient.

$$(E) \iff (x+1)z' - z = (3x+2)e^{3x}.$$

Après résolution avec recollement la solution générale de cette dernière équation est $z(x) = \lambda(x+1) + e^{3x}$.

$$(E) \iff y' - 3y = \lambda(x+1) + e^{3x}.$$

La solution générale est

$$y(x) = \lambda'(3x+4) + \mu e^{3x} + x e^{3x}.$$

Exercice 70 : [énoncé]

(a) Par analyse synthèse, on obtient

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} x^n$$

de rayon de convergence $R = +\infty$.

(b) $h(0) = 1$ et h est continue sur $[0; 2]$. Il suffit d'établir $h(2) < 0$ pour pouvoir conclure.

On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n$$

(on commence au rang 1 pour avoir la décroissance). On obtient alors

$$-2 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} 2^n < -1$$

car la somme peut être encadrée par des sommes partielles consécutives. On en déduit $h(2) < 0$.

(c) La fonction h est dérivable et

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n-1)!} x^{n-1}.$$

On peut à nouveau appliquer le critère spécial des séries alternées à cette série pour tout $x \in]0; 2[$ et on en déduit $h'(x) < 0$.

Exercice 71 : [énoncé]

- (a) Puisque de taille 3 avec 3 valeurs propres distinctes, la matrice A est diagonalisable et son polynôme minimal est

$$\Pi_A = (X + 2)(X - 1)(X - 3).$$

La division euclidienne de X^n par Π_A s'écrit

$$X^n = \Pi_A Q + R \text{ avec } \deg R < 3.$$

Le polynôme R peut s'écrire

$$R(X) = a(X - 1)(X - 3) + b(X - 3) + c$$

et l'évaluation de la relation division euclidienne en $-2, 1$ et 3 donne

$$\begin{cases} 15a - 5b + c = (-2)^n \\ 2b + c = 1 \\ c = 3^n \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} \\ b = \frac{3^n - 1}{2} \\ c = 3^n \end{cases}$$

et enfin

$$R(X) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} X^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} X + \frac{3^n - (-2)^n - 5}{5}.$$

En évaluant la relation de division euclidienne en A , on obtient

$$A^n = R(A) = \frac{3^{n+1} - (-2)^{n+1} - 5}{30} A^2 + \frac{3^{n+1} + (-2)^{n+3} + 5}{30} A + \frac{-3^n + (-2)^n + 5}{5} I_3.$$

- (b) En vertu de ce qui précède

$$\operatorname{ch} A = \alpha A^2 + \beta A + \gamma I_3$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{30} \left(3 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n}}{(2n)!} - 5 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} \right)$$

et donc

$$\alpha = \frac{3 \operatorname{ch} 3 + 2 \operatorname{ch} 2 - 5 \operatorname{ch} 1}{30}.$$

De même, on obtient

$$\beta = \frac{3 \operatorname{ch} 3 - 8 \operatorname{ch} 2 + 5 \operatorname{ch} 1}{30} \text{ et } \gamma = \frac{5 \operatorname{ch} 1 + \operatorname{ch} 2 - \operatorname{ch} 3}{5}.$$

Exercice 72 : [énoncé]

- (a) $\tilde{\gamma}_2$ paramètre le quart d'une ellipse partant du sommet $A(a, 0)$ jusqu'au sommet $B(0, b)$.

$\tilde{\gamma}_1$ paramètre le segment $[A; B]$ de A vers B .

- (b) Le champ de vecteurs \vec{V} dérive du potentiel U si, et seulement si,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = y \text{ et } \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = 2x.$$

Un tel potentiel est alors de classe \mathcal{C}^2 et l'égalité de Schwarz

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}$$

n'étant pas vérifiée, on peut conclure à l'inexistence de U .

- (c) La circulation de \vec{V} le long de $\tilde{\gamma}_1$ est

$$\int_0^1 -abt + 2ab(1 - t) dt = \frac{ab}{2}$$

et celle le long de $\tilde{\gamma}_2$ est

$$\int_0^{\pi/2} -ab \sin^2(s) + 2ab \cos^2(s) ds = \frac{ab\pi}{4}.$$

Par la différence des deux valeurs obtenues, on retrouve que \vec{V} ne dérive pas d'un potentiel.

Exercice 73 : [énoncé]

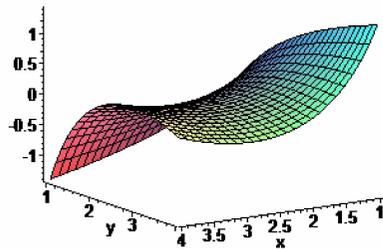
- (a) f est définie sur $]0; +\infty[$, strictement croissante, concave sur $]0; 2]$ et convexe sur $[2; +\infty[$. Asymptote verticale en 0 et branche parabolique de direction $y = x$ en $+\infty$.

- (b) $t = 1$ est solution et c 'est la seule car f est strictement croissante.

- (c) g est de classe \mathcal{C}^1 . Recherchons, ses points critiques :

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln y - \frac{y}{x} = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \\ \frac{x}{y} - \ln x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = e. \end{cases}$$

On conclut que (e, e) est le seul point critique.

FIGURE 2 – Une représentation de la fonction g

On étudie alors le signe de

$$d(x, y) = g(x, y) - g(e, e) = x \ln y - y \ln x.$$

On procède à une translation

$$\begin{cases} x = e + u \\ y = e + v \end{cases}$$

et à développement limité à l'ordre 2

$$d(x, y) = (e + u) \left(1 + \frac{v}{e} - \frac{v^2}{2e} + v^2 \varepsilon(v) \right) - (e + v) \left(1 + \frac{u}{e} - \frac{u^2}{2e} + u^2 \varepsilon(u) \right)$$

avec $\varepsilon \xrightarrow[0]{} 0$. Après simplification

$$d(x, y) = \frac{u^2 - v^2}{2} + (u^2 + v^2) \tilde{\varepsilon}(u, v)$$

avec $\tilde{\varepsilon} \xrightarrow[(0,0)]{} 0$.

En considérant $u = 1/n$ et $v = 0$ ou, à l'inverse $u = 0$ et $v = 1/n$, on obtient que d prend des signes différents au voisinage de (e, e) qui n'est donc pas extremum de f .