Exercice 1 [04131] [Correction]
On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } u_n = \ln\bigl(e^{s_n} - 1\bigr).$$

(a) Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.

(b) Prouver que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ convergent.

(c) Étudier la nature de $\sum u_n$.

Exercice 2 [04171] [Correction]

(a) Soit (u_n) une suite telle que $u_n = O(1/n^2)$. Que dire de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$?

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec γ une constante réelle qu'on ne cherchera pas à calculer.

On pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor.$$

(c) Convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} u_n$.

Exercice 3 [01056] [Correction]

(a) Donner un développement asymptotique à deux termes de

$$u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}.$$

On pourra introduire la fonction $f\colon t \mapsto (\ln t)/t$.

(b) À l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 4 [02430] [Correction]
On note $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer la limite de u_n.

(b) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.

(c) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

(d) Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n/n^α.

Exercice 5 [01325] [Correction]
Soit $j \in \mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geq j.$$

(a) Justifier la définition de Φ_j.

(b) Démontrer que $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.

(c) Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} e$.

Exercice 6 [02433] [Correction]
Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

(a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.

(b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.

(c) Equivalent de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ.

Exercice 7 [02423] [Correction]
On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}.$$

(a) Déterminer la nature de la série de terme général u_n selon α.

(b) Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon α.

Exercice 8 [02434] [Correction]
Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}.$$

(a) Nature la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n).$$

(b) Nature de la série de terme général $f(n)$.
On pourra montrer que $\sin\bigl(n^{1/3}\bigr)$ *n'admet pas de limite quand* $n \to +\infty$.

(c) Nature de la série de terme général

$$\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}.$$

Exercice 9 [02432] [Correction]

(a) Étudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$.

(b) Étudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$.

Exercice 10 [02418] [Correction]
Former un développement asymptotique à trois termes de la suite (u_n) définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}.$$

Exercice 11 [03917] [Correction]
Soit $e = (e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à termes strictement positifs telle que la série $\sum e_n$ converge.
On pose

$$s = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n \text{ et } r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e_k \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

On introduit

$$G = \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \;\middle|\; (d_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}} \right\}.$$

On dit que la suite e est une base discrète lorsque G est un intervalle.

(a) Montrer que G est bien défini. Déterminer son maximum et son minimum.

(b) On suppose dans cette question que (e_n) est une base discrète. Montrer que $e_n \le r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On suppose que $e_n \le r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $t \in [-s\,;s]$. On définit la suite (t_n) par

$$t_0 = 0 \text{ et } t_{n+1} = \begin{cases} t_n + e_n & \text{si } t_n \le t \\ t_n - e_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que

$$|t - t_n| \le e_n + r_n$$

et conclure.

(d) Dans cette question, on suppose $e_n = 1/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer G. Quelles suites (d_n) permettent d'obtenir respectivement $0, 1, 1/2, 2$ et $1/3$?
Pour $x \in G$, y a-t-il une unique suite $(d_n) \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n\,?.$$

Exercice 12 [04172] [Correction]
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f\colon I \to \mathbb{R}$. On pose :

$$I^* = \left\{ \lambda \in \mathbb{R} \;\middle|\; \sup_{x\in I}\bigl(\lambda x - f(x)\bigr) < +\infty \right\}$$

et, pour $\lambda \in I^*$,

$$f^*(\lambda) = \sup_{x\in I}\bigl(\lambda x - f(x)\bigr).$$

(a) Montrer que I^* est un intervalle et que f^* y est convexe.

(b) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que f' est strictement croissante. Montrer

$$\forall x \in I,\; f^*\bigl(f'(x)\bigr) = xf'(x) - f(x).$$

Exercice 13 [00563] [Correction]
Soit (u_n) une suite de réels de $[0\,;1]$ de limite 1.
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}([0\,;1],\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(u_n x + 1 - x)}{2^n}.$$

Exercice 14 [03181] [Correction]
Déterminer un équivalent de

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\ln(1-x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 15 [02446] [Correction]

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b],\mathbb{R})$. Déterminer les limites des suites

$$\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(b) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

(on procédera par récurrence)

(c) En déduire

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(d) Étudier la limite puis un équivalent de

$$\left(\int_0^{\pi/2} \ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Exercice 16 [03334] [Correction]
La fonction $x \mapsto \int_0^x \sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ admet-elle une limite en $+\infty$?

Exercice 17 [00572] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^2([0\,;+\infty[,\mathbb{R})$. On suppose que f et f'' sont intégrables.

(a) Montrer que $f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

(b) Montrer que $f.f'$ est intégrable.

Exercice 18 [00525] [Correction]
Justifier l'existence et calculer

$$I = \int_0^{+\infty} t\lfloor 1/t\rfloor\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 19 [02424] [Correction]
Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 20 [04174] [Correction]
Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{avec} \quad s \in \mathbb{C}.$$

(a) Montrer la définition de $\zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Montrer qu'alors

$$\zeta(s)\big(1-2^{1-s}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

(c) En déduire un prolongement continu de ζ sur

$$\Omega = \big\{z \in \mathbb{C} \,\big|\, \mathrm{Re}(z) > 0\big\} \setminus \{1\}.$$

Exercice 21 [04104] [Correction]
On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E)\colon\ f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

(a) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?

(b) Soit $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h, la fonction f est-elle solution de (E) ?

(c) On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $h_0\colon x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Pour $x \in [0\,;1]$, soit $T_x\colon y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$ et que $T_x\big([0\,;1]\big) \subset [0\,;1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

(d) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0\,;1]$.

(e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 22 [04186] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

(a) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge si $x > 0$.
Montrer que $f \colon x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln x \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \,\mathrm{d}t = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 23 [04173] [Correction]
On définit la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

(a) Écrire avec **Python** une fonction `S(N,x)` renvoyant $S_N(x)$.

(b) Écrire une fonction prenant trois paramètres `N`, `a` et `b` et traçant le graphe de S_N sur le segment $[a\,;b]$.

(c) Montrer que la suite (S_N) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.

(d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(e) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

(f) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x).$$

(g) Montrer que la fonction $f \colon x \mapsto \pi \cot(\pi x) - S(x)$ vérifie la même relation.

(h) Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.

Exercice 24 [04161] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\|\cdot\|$ la norme uniforme sur $[-1\,;1]$.

(a) Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n de degré n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(b) Soit P unitaire de degré n. Montrer

$$\|P\| \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

On pourra s'intéresser aux valeurs de P et T_n en les $\cos(k\pi/n)$, pour $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Cas d'égalité. Montrer

$$\|P\| = \frac{1}{2^{n-1}} \iff P = \frac{1}{2^{n-1}} T_n.$$

Exercice 25 [02411] [Correction]
Soit

$$E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0\,;\pi], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}.$$

(a) Montrer que

$$N \colon f \mapsto \|f + f''\|_\infty$$

est une norme sur E.

(b) Montrer que N est équivalente à

$$\nu \colon f \mapsto \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty.$$

Exercice 26 [00465] [Correction]
Soient $E = C^1([0\,;1], \mathbb{R})$ et $N \colon E \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t) \,\mathrm{d}t}.$$

(a) Montrer que N définit une norme sur E.

(b) Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 27 [02409] [Correction]

(a) Quelles sont les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ pour lesquelles l'application

$$(x, y) \mapsto N_a(x, y) = \sqrt{x^2 + 2axy + y^2}$$

définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(b) Si N_a et N_b sont des normes, calculer

$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)} \text{ et } \sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x, y)}{N_b(x, y)}.$$

Exercice 28 [00477] [Correction]

Soit E un espace vectoriel réel normé. On pose

$$f(x) = \frac{1}{\max(1, \|x\|)} x.$$

Montrer que f est 2-lipschitzienne.
Montrer que si la norme sur E est hilbertienne alors f est 1-lipschitzienne.

Exercice 29 [04170] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to 0$ et $u_n \to +\infty$. Soit (v_p) une suite réelle telle que $v_p \to +\infty$.

(a) On fixe deux réels a et b tels que $a < b$. Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $(w_n) = (u_{n+p} - v_q)$. Montrer que l'on peut choisir p et q de telle sorte que l'on ait $w_0 \leq a$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $|w_{n+1} - w_n| \leq (b - a)/2$.

(b) Montrer que $\{u_n - v_p \mid (n, p) \in \mathbb{N}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

(c) Déterminer l'adhérence de $\{\sin(u_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(d) Déterminer l'adhérence de $\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(e) Quel est l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n - \lfloor u_n \rfloor)$?

Exercice 30 [00750] [Correction]

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\widetilde{A}$ la transposée de la comatrice de A.

(a) Calculer $\det \widetilde{A}$.

(b) Étudier le rang de $\widetilde{A}$.

(c) Montrer que si A et B sont semblables alors $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ le sont aussi.

(d) Calculer $\widetilde{\widetilde{A}}$.

Exercice 31 [01108] [Correction]

On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles bornées de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|.$$

Déterminer si les sous-ensembles suivants sont fermés ou non :
$A = \{\text{suites croissantes}\}$, $B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}$,
$C = \{\text{suites convergentes}\}$,
$D = \{\text{suites admettant } 0 \text{ pour valeur d'adhérence}\}$ et $E = \{\text{suites périodiques}\}$.

Exercice 32 [02415] [Correction]

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel il existe un et un seul $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 33 [03285] [Correction]

Soient E un espace normé de dimension quelconque et u un endomorphisme de E vérifiant

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} u^k.$$

(a) Simplifier $v_n \circ (u - \mathrm{Id})$.

(b) Montrer que

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \{0\}.$$

(c) On suppose E de dimension finie, établir

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E.$$

(d) On suppose de nouveau E de dimension quelconque.
Montrer que si

$$\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = E$$

alors la suite (v_n) converge simplement et l'espace $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est une partie fermée de E.

(e) Étudier la réciproque.

Exercice 34 [04103] [Correction]
E désigne un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E.

(a) Soit $x \in E$ et $r > 0$. Justifier que la boule $B_f(x, r)$ est compacte. Que dire de $f(B_f(x, r))$?

(b) Soit $x \in E$ et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note $K = B_f(x, r)$ et on suppose $f(K) \subset K$.
On fixe $a \in K$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a).$$

Justifier que $(y_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'éléments de K et que $f(y_n) - y_n$ tend vers 0_E. En déduire qu'il existe un vecteur $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

(c) On reprend les notations précédentes et on suppose toujours $f(K) \subset K$. Montrer que $1 \in \operatorname{Sp} f$ et $\operatorname{Sp} f \subset [-1\,;1]$.

(d) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.

(e) Dans cette dernière question, on choisit $\dim E = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée de E et

$$K = \left\{ x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \text{ avec } a, b, c > 0.$$

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f.

Exercice 35 [04165] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs.
Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ choisis dans $\mathbb{R}^n$, on écrit $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout indice i.

(a) Écrire un programme **Python** qui renvoie la valeur propre de module maximal d'une matrice passée en argument.

(b) Tester ce programme pour dix matrices carrées à coefficients pris aléatoirement dans $[1\,;2[$.

Soit

$$S = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leq x \text{ et } \lambda x \leq Ax \right\}.$$

(c) Soit $\lambda \in S$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$0 \leq x, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda x \leq Ax.$$

(d) Soit λ une valeur propre complexe. Montrer que $|\lambda| \in S$.

(e) Montrer que la partie S est majorée et expliciter un majorant.

(f) Montrer que S est une partie compacte.

(g) Soit $\alpha = \max S$. Montrer que α est une valeur propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Exercice 36 [04106] [Correction]
On considère une série entière complexe $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
On note f sa somme définie pour $|z| < R$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

(a) Rappeler la définition du rayon de convergence d'une série entière et montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge normalement sur le disque $D(0, r) = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq r \right\}$ si $0 < r < R$.

(b) Soit r un réel tel que $0 < r < R$, montrer que la fonction

$$z \mapsto \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Im}(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \,\mathrm{d}\theta$$

est développable en série entière et exprimer la somme de cette série entière en fonction de $f(z)$ et de $f(0)$.

(c) Déterminer les fonctions f, développables en série entière sur $D(0, R)$, et qui ne prennent que des valeurs réelles sur un ensemble de la forme $\left\{ z \in \mathbb{C}, |z| = r \right\}$ pour $0 < r < R$.

Exercice 37 [04175] [Correction]
On note A l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A_n = \left\{ P \in A \;\middle|\; P(2) = n \right\}.$$

(a) Montrer que A_n est fini pour tout $n \in \mathbb{N}$. On note u_n son cardinal. Calculer u_0, u_1 et u_2.

(b) Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n.$$

(c) Montrer
$$\forall n\in\mathbb{N}, u_{2n}=\sum_{k=0}^{n}u_k.$$

(d) Écrire un programme **Python** qui renvoie la liste des 100 premiers termes de la suite (u_n).

(e) Quelle conjecture peut-on faire sur le rayon de convergence de $\sum u_n z^n$? La démontrer !

Exercice 38 [04176] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. On posera $B_0=1$.

(a) Montrer
$$\forall n\in\mathbb{N},\ B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k.$$

(b) Écrire une fonction `Bell(n)` donnant la liste $(B_k)_{0\le k\le n}$

(c) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière de terme général $\frac{B_n}{n!}x^n$ est strictement positif.

(d) Soit
$$f\colon x\in\left]-R\,;R\right[\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_n}{n!}x^n.$$
Déterminer une équation différentielle dont f est solution. Exprimer f et donner une expression de B_n.

Exercice 39 [03303] [Correction]
Soit $f\colon\left]-R\,;R\right[\to\mathbb{R}$ (avec $R>0$) de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant
$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in\left[0\,;R\right[, f^{(n)}(x)\ge 0.$$
Montrer la convergence de la série
$$\sum\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$$
pour tout $x\in\left]-R\,;R\right[$.

Exercice 40 [02451] [Correction]
On note $N(n,p)$ le nombre de permutations de $[\![1\,;n]\!]$ qui ont exactement p points fixes. On pose en particulier $D(n)=N(n,0)$, puis
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{D(n)}{n!}x^n.$$

(a) relier $N(n,p)$ et $D(n-p)$.

(b) Justifier la définition de f sur $\left]-1\,;1\right[$ puis calculer f.

(c) Calculer $N(n,p)$.

(d) Étudier la limite de $\left(\frac{1}{n!}N(n,p)\right)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 41 [03244] [Correction]
Soit f la fonction somme dans le domaine réel d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R=1$.
On suppose l'existence d'un réel
$$\ell=\lim_{x\to1^-}f(x).$$

(a) Peut-on affirmer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que sa somme vaut ℓ ?

(b) Que dire si l'on sait de plus $a_n=\mathrm{o}(1/n)$? [Théorème de Tauber]

Exercice 42 [02452] [Correction]
Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels telle que $n=\mathrm{o}(p_n)$.
On pose
$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{p_n}.$$

(a) Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum x^{p_n}$ et étudier la limite de $(1-x)f(x)$ quand x tend vers 1 par valeurs inférieures.

(b) Ici $p_n=n^q$ avec $q\in\mathbb{N}$ et $q\ge 2$. Donner un équivalent simple de f en 1.

Exercice 43 [02483] [Correction]
Soit $\alpha>-1$.

(a) Donner le rayon de convergence R de

$$f_\alpha(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n.$$

On désire trouver un équivalent de f_α lorsque $x\to R^-$.

(b) On suppose que α est un entier p.
Calculer f_0, f_1. Donner avec un logiciel de calcul formel l'expression de $f_2,\dots,f_5$.
Trouver les équivalents recherchés.
Montrer qu'il existe $Q_p\in\mathbb{R}[X]$ tel que

$$f_p(x)=\frac{Q_p(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

(on calculera f_p'). En déduire l'équivalent recherché.

(c) On suppose $\alpha>-1$ quelconque.
Donner le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-x)^{1+\alpha}}.$$

On notera b_n ses coefficients.
Montrer qu'il existe $A(\alpha)>0$ tel que $n^\alpha\sim A(\alpha)b_n$. On étudiera la nature de la série de terme général

$$\ln\frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}}-\ln\frac{n^\alpha}{b_n}.$$

En déduire que $f_\alpha(x)$ est équivalente à

$$\frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$$

quand x tend vers R^-.

Exercice 44 [03302] [Correction]
Établir que la fonction

$$x\mapsto\frac{1}{1-\operatorname{sh}x}$$

est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

Exercice 45 [00995] [Correction]
Réaliser le développement en série entière en 0 de $x\mapsto\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}$ et reconnaître cette fonction.

Exercice 46 [02448] [Correction]
Pour $n>0$, on pose

$$a_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n t\,\mathrm{d}t.$$

(a) Trouver la limite de (a_n).

(b) Trouver une relation simple entre a_{n+2} et a_n.

(c) On pose

$$u_n(x)=\frac{a_n}{n^\alpha}x^n.$$

Donner la nature de la série de terme général $u_n(x)$ en fonction de x et de α.

(d) On pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_nx^n.$$

Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 47 [02449] [Correction]
Soit (a_n) la suite définie par

$$a_0=1\text{ et }a_n=\frac{1}{n!}\int_0^1\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)\,\mathrm{d}t\text{ pour }n\in\mathbb{N}^*.$$

(a) Rayon de convergence de $\sum a_nx^n$.

(b) Somme de $\sum a_nx^n$.

Exercice 48 [03989] [Correction]
On pose

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(\ln n)x^n\text{ et }g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)x^n.$$

(a) Déterminer les rayons de convergence de f et de g.

(b) Montrer que g est définie et continue sur $[-1\,;1[$.

(c) Trouver une relation entre $(1-x)f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1\,;1[$.

(d) Montrer que f peut être prolongée en une fonction continue sur $[-1\,;1[$.

(e) Trouver des équivalents de f et g en 1.

Exercice 49 [03201] [Correction]
Soit
$$f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n.$$

(a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f.

(b) Étudier la convergence en $-R$ et en R.

(c) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$.

(d) Montrer que quand $x \to 1^-$
$$(1-x)f(x) \to 0.$$

Exercice 50 [03074] [Correction]
Soit une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

(a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière
$$\sum \frac{a_n}{n!} z^n.$$
On pose donc, pour t dans $\mathbb{R}$,
$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n.$$

(b) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x > r$, $t \mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ soit intégrable sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer cette intégrale sous forme de série entière en $1/x$.

Exercice 51 [03890] [Correction]

(a) Donner l'intervalle de définition I de la fonction s qui au réel x associe
$$s(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

(b) Quel est le signe de s' sur $I \cap \mathbb{R}_+$?
Quelle est la limite de s en l'extrémité droite de $I \cap \mathbb{R}_+$?

(c) Écrire $(1-x)s'(x)$ sous forme d'une série et en déduire le signe de s' sur I.

(d) Étudier la convexité de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}\right)x.$$
En déduire que la fonction s est convexe.

Exercice 52 [02520] [Correction]
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$P_n(z) = \prod_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{z}{2^k}\right).$$

(a) Montrer que $\left|P_n(z)\right| \leq P_n(-|z|)$.
En déduire que la suite $\left(P_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Indice : on pourra penser à introduire $\ln P_n(-|z|)$.

(b) En étudiant la convergence de la série $\sum\left(P_{n+1}(z) - P_n(z)\right)$, établir la convergence de la suite $\left(P_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On introduit la fonction
$$f\colon z \mapsto \lim_{n\to+\infty} P_n(z).$$

(c) Montrer que f est continue en 0.

(d) Montrer que f est l'unique fonction continue en 0 vérifiant
$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = (1-z)f(z/2) \text{ et } f(0) = 1.$$

(e) Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 53 [03483] [Correction]
Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière
$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}.$$

(a) Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.

(b) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.
Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.

(c) Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que, pour tout entier $n \geq 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}.$$

(d) Démontrer que $R_\alpha = 0$.

(e) Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.
Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 54 [04158] [Correction]

(a) Rappeler une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction dérivable sur un intervalle soit strictement croissante.

(b) Soit $f\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue dont l'ensemble des zéros est d'intérieur vide et $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il existe une unique subdivision $(x_0, \dots, x_n)$ de $[a\,;b]$ vérifiant :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Soit $g\colon [a\,;b] \to \mathbb{R}_+$ continue. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i).$$

Exercice 55 [04159] [Correction]
Soit a et b strictement positifs. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

(a) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite, notée $M(a, b)$.

(b) On pose

$$T(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}}.$$

Montrer

$$T\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = T(a, b).$$

On pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{1}{2}\left(t - \frac{ab}{t}\right)$.

(c) Montrer

$$T(a, b) = \frac{\pi}{M(a, b)}.$$

Exercice 56 [04177] [Correction]

(a) Déterminer le domaine de définition réel de

$$F(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(x\tan\theta)}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

(b) Calculer $F(x)$.

(c) En déduire les valeurs de

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

et de

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 57 [00926] [Correction]
Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 58 [00939] [Correction]
Soient $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^\alpha (\cos t)^n \,\mathrm{d}t.$$

(a) Nature de la série de terme général $u_n(1)$.

(b) Plus généralement, nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$.

(c) Calculer $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(\alpha)$ pour $\alpha = 2, 3$.

Exercice 59 [00554] [Correction]
Existence et calcul de

$$g(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(xt) \,\mathrm{d}t$$

sachant $g(0) = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 60 [02439] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - a} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 61 [02438] [Correction]

(a) Démontrer la convergence de la série de terme général

$$a_n = \frac{n!}{n^n}.$$

(b) Comparer

$$a_n \text{ et } n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt} \,\mathrm{d}t.$$

(c) En déduire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{(1 - t\mathrm{e}^{-t})^2} \,\mathrm{d}t.$$

Exercice 62 [02445] [Correction]
On pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} \,\mathrm{d}t$$

pour tout entier $n > 0$.

(a) Trouver la limite ℓ de (I_n).

(b) Donner un équivalent de $(\ell - I_n)$.

(c) Justifier

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y} \,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

(d) Donner un développement asymptotique à trois termes de (I_n).

Exercice 63 [03211] [Correction]
On considère

$$\varphi\colon x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer la définie et la continuité de φ sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et montrer que

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = \mathrm{i}\int_0^{+\infty} \frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2} \,\mathrm{d}u$$

et déterminer un équivalent de $\varphi'(x)$ quand $x \to 0^+$.

(d) La fonction φ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 64 [03736] [Correction]
On pose

$$f(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}.$$

(a) Étudier l'ensemble de définition de f.

(b) Donner un équivalent de f en 0.

(c) Montrer que le graphe de f admet une symétrie d'axe $x = 1/2$.

(d) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

(e) Calculer la borne inférieure de f.
Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 65 [04178] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E_1)\colon x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

(a) Soit u_1 et u_2 deux solutions de (E_1) telles que $u_1u_2 = 1$. On pose $z_i = u_i'/u_i$.
Montrer que les z_i sont deux solutions opposées d'une équation différentielle non linéaire (E_2).

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que (E_1) admette deux solutions u_1 et u_2 telles que $u_1u_2 = 1$.

(c) Résoudre sur $I = \left]-\pi/4\,;\pi/4\right[$ l'équation

$$\bigl(1+\cos(4t)\bigr)x'' - 2\sin(4t)x' - 8x = 0.$$

Exercice 66 [03387] [Correction]
On considère l'équation différentielle

$$(E)\colon y'' + \cos^2(t)y = 0.$$

(a) Justifier l'existence d'une solution u de (E) telle que $u(0) = 1$ et $u'(0) = 0$.

(b) Démontrer l'existence de deux réels α, β vérifiant

$$\alpha < 0 < \beta, u'(\alpha) > 0 \text{ et } u'(\beta) < 0.$$

En déduire que u possède au moins un zéro dans $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Justifier l'existence de réels

$$\gamma = \max\bigl\{t < 0 \bigm| u(t) = 0\bigr\} \text{ et } \delta = \min\bigl\{t > 0 \bigm| u(t) = 0\bigr\}.$$

(d) Soit v une solution de (E) linéairement indépendante de u.
En étudiant les variations de

$$W = uv' - u'v$$

montrer que v possède au moins un zéro dans$]\gamma\,;\delta[$.

(e) Soit w une solution non nulle de (E). Démontrer que w admet une infinité de zéros. On pourra introduire pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$w_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto w(t - n\pi)$$

[Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA]

Exercice 67 [03920] [Correction]
Soient $q \in \mathcal{C}^0\Bigl(\left[a\,;+\infty\right[, \mathbb{R}_+\Bigr)$ et (E) l'équation différentielle $y'' = q(x)y$.

(a) Soit f une solution de (E) telle que $f(a) > 0$ et $f'(a) > 0$.
Montrer que f et f' sont strictement positives et que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

(b) Soient u et v les solutions de (E) telles que

$$\begin{cases} u(a) = 1 \\ u'(a) = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(a) = 1. \end{cases}$$

Calculer $u'v - uv'$. Montrer que, sur $\left]a\,;+\infty\right[$, u/v et u'/v' sont monotones de monotonies contraires. Montrer que u/v et u'/v' tendent en $+\infty$ vers la même limite réelle.

(c) Montrer qu'il existe une unique solution g de (E), strictement positive, telle que $g(a) = 1$ et telle que g décroisse sur $\left[a\,;+\infty\right[$.

(d) Déterminer g lorsque $q(x) = 1/x^4$ sur $\left[1\,;+\infty\right[$.
On pourra poser $y(x) = xz(1/x)$.

Exercice 68 [02455] [Correction]

(a) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \cos(nt).$$

(b) Soit $\sum a_n$ une série absolument convergente.
Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nt).$$

Exercice 69 [00105] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et g une solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$xy' - y = f(x).$$

(a) Démontrer que g se prolonge par continuité en 0. Déterminer une condition nécessaire sur $f'(0)$ pour que la fonction ainsi prolongée soit dérivable en 0. Démontrer que cette condition n'est pas suffisante.

(b) f est supposée de classe $\mathcal{C}^2$ et la condition précédente est vérifiée. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 70 [00506] [Correction]
Soit (E) l'équation différentielle

$$(\ln x)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

(a) Résoudre (E) sur $]0\,;1[$ et sur $]1\,;+\infty[$.

(b) Soit g la fonction définie sur $]-1\,;+\infty[\setminus\{0\}$ par

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Montrer que g se prolonge sur $]-1\,;+\infty[$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Démontrer que (E) admet une solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 71 [04179] [Correction]
On se donne $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ continue et telle que :

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2,\ \varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t).$$

(a) On suppose dans cette question φ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$

En déduire qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(t) = \exp(tA)$ pour tout t réel.

(b) Soit $\theta \in \mathcal{C}^1\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+\right)$ intégrable et d'intégrale égale à 1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\theta(x) = 0$ pour tout $|x| > \alpha$. On pose, pour x réel,

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\psi(x) = \varphi(x)B$ pour tout réel x.

(c) Déterminer φ.

Exercice 72 [02416] [Correction]
Soient A et B dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n = \exp(A+B).$$

Exercice 73 [03921] [Correction]

(a) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente d'indice p. Montrer que $(I_n, N, N^2, \dots, N^{p-1})$ est une famille libre.
Exprimer

$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n + N)}.$$

(b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant pour unique valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que $N = A - \lambda I_n$ est nilpotente.
Montrer que les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont toutes bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, λ est imaginaire pur et $A = \lambda I_n$.

(c) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de polynôme caractéristique

$$(X-\lambda_1)^{n_1}\dots(X-\lambda_m)^{n_m}$$

les λ_k étant deux à deux distincts. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A. Montrer que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \mathrm{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}.$$

En déduire l'existence d'une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de f est diagonale par blocs.

(d) Avec les notations de c). Montrer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et que A est diagonalisable.

(e) Montrer qu'une matrice antisymétrique réelle est diagonalisable.

Exercice 74 [02466] [Correction]
On considère

$$f\colon (x,y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+y^{2n}}.$$

(a) Déterminer le domaine de définition D de f.

(b) Étudier l'existence de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sur D.

Exercice 75 [02460] [Correction]
On pose
$$\varphi(x,y)=\frac{\cos x-\cos y}{x-y}\text{ pour }x\neq y.$$
(a) Montrer que φ admet un prolongement par continuité à $\mathbb{R}^2$ noté encore φ.
(b) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ puis $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 76 [01327] [Correction]
Déterminer les fonctions $f\colon\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que
$$F\colon\begin{cases}\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\\(x_1,\dots x_n)\mapsto f\bigl(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\bigr)\end{cases}$$
vérifie
$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2F}{\partial x_i^2}=0.$$

Exercice 77 [02463] [Correction]
Déterminer les extremums de $x^{\ln x}+y^{\ln y}$ sur $]0\,;+\infty[^2$.

Exercice 78 [02465] [Correction]
Soit un triangle ABC et M parcourant l'intérieur de ce triangle. On veut déterminer en quelle position le produit des 3 distances de M à chacun des côtés du triangle est maximal.
Indications : ne pas oublier de justifier l'existence de ce maximum, la réponse est le centre de gravité du triangle.

Exercice 79 [00070] [Correction]
Soit $a>0$. Montrer que
$$f\colon(x,y)\mapsto x+y+\frac{a}{xy}$$
admet un minimum strict sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$

Exercice 80 [02461] [Correction]
Montrer que $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ est homogène de degré p si, et seulement si,
$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)=pf(x_1,\dots,x_n).$$

Exercice 81 [03502] [Correction]
Soient $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, E^* le dual de E et
$$\mathcal{D}=\bigl\{d\in E^*\bigm|\forall(f,g)\in E^2,d(fg)=f(0)d(g)+g(0)d(f)\bigr\}.$$
(a) Montrer que $\mathcal{D}$ est un sous-espace vectoriel de E^*.
(b) Montrer que $\mathcal{D}$ est non réduit à $\{0\}$.
(c) Soit $d\in\mathcal{D}$ et h une fonction constante. Que vaut $d(h)$?
(d) Soit $f\in E$. Montrer
$$\forall x\in\mathbb{R}^n,f(x)=f(0)+\sum_{i=1}^n x_i\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t.$$
Vérifier que l'application $x\mapsto\int_0^1\frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ est dans E.
(e) Soit $d\in\mathcal{D}$. Établir l'existence de $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que
$$\forall f\in E,d(f)=\sum_{i=1}^n a_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$
(f) Déterminer la dimension de $\mathcal{D}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) Si (v_n) est une suite alternée dont la valeur absolue décroît vers 0 alors la série $\sum v_n$ converge.
Ce résultat s'obtient en constatant l'adjacence des suites extraites de rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles.

(b) La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en vertu du critère spécial énoncé ci-dessus. En fait, il est « connu » que $(s_n)_{n\geq 1}$ tend vers $\ln 2$ et donc $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

(c) On peut écrire
$$s_n = \ln 2 - r_n$$
avec
$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
On a
$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1} \text{ et } r_n + r_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
car par, application du critère spécial à la série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$, on peut majorer le reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. On en déduit
$$r_n = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On sait
$$\ln(x) \underset{x\to 1}{=} x - 1 + \mathrm{O}\left((x-1)^2\right)$$
et donc
$$u_n = \mathrm{e}^{s_n} - 2 + \mathrm{O}\left((\mathrm{e}^{s_n} - 2)^2\right)$$
avec
$$\mathrm{e}^{s_n} - 2 = 2\left(\mathrm{e}^{-r_n} - 1\right) = -2r_n + \mathrm{O}\left(r_n^2\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi,
$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum u_n$ converge car c'est la somme d'une série vérifiant le critère spécial et d'une autre absolument convergente.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Par sommation de relations de comparaison (on compare au terme général d'une série à termes positifs convergente), on peut écrire avec existence
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$
Par comparaison avec une intégrale, on poursuit
$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Pour $k \geq 1$, on peut écrire
$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k\to+\infty}{=} \frac{1}{k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$
En sommant pour k allant de 2 jusqu'à $n-1$, il vient
$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
avec
$$\sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=-\gamma} - \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=\mathrm{O}(1/n)}.$$
En ajoutant un terme $1/n$ et en réorganisant les membres, on obtient l'identité voulue.

(c) Posons S_n la somme partielle de rang n. On a
$$\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor = k \iff 2^k \leq n < 2^{k+1}.$$
On en déduit
$$S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} k = k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n}.$$
En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs
$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p} - \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p+1}.$$

On adjoint les termes pairs intermédiaires à la deuxième somme

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{(-1)^n}{n}=\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}-\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}S_{2^{N+1}-1}&=\sum_{k=1}^{N}\left(S_{2^{k+1}-1}-S_{2^k-1}\right)+S_1\\&=\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}\right)-\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1}\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Après glissement d'indice dans la deuxième somme puis simplification

$$\begin{aligned}S_{2^{N+1}-1}&=\sum_{k=1}^{N}\left(k\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}\right)-\sum_{k=2}^{N+1}\left((k-1)\sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{n}\right)\\&=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1}\frac{1}{p}\right)-N\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{n}\\&=\sum_{n=1}^{2^N-1}\frac{1}{n}-N\sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1}\frac{1}{n}\\&=\ln\left(2^N-1\right)+\gamma+\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^N}\right)-N\ln 2-N\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^N}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}\gamma.\end{aligned}$$

Cette étude ne suffit pas pour conclure, il faut encore étudier la limite de (S_n). Pour $n\geq 1$, introduisons k tel que $2^k\leq n<2^{k+1}$. On a

$$S_n-S_{2^k-1}=k\sum_{p=2^k}^{n}\frac{(-1)^p}{p}.$$

Par application du critère spécial, cette somme est encadrée par deux sommes partielles consécutives, par exemple, celles de rangs 2^k-1 (qui vaut 0) et 2^k (qui vaut $1/2^k$). On en déduit :

$$\left|S_n-S_{2^k-1}\right|\leq\frac{k}{2^k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

On peut alors conclure que la série étudiée converge et sa somme vaut γ.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) f est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$. Pour $p\geq 4$,

$$\int_p^{p+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq\frac{\ln p}{p}\leq\int_{p-1}^{p}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $u_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+v_n$ avec

$$\int_4^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq v_n\leq\int_3^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $v_n\sim\frac{1}{2}(\ln n)^2$.

Étudions $w_n=u_n-\frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n-w_{n-1}=\frac{\ln n}{n}-\int_{n-1}^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq 0$ donc (w_n) est décroissante.

D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n=\frac{1}{2}(\ln n)^2+C+\mathrm{o}(1).$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{n}-\sum_{n=1}^{2N}\frac{\ln(n)}{n}=\ln 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+u_N-u_{2N}.$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\ln 2.\ln n+\ln(2)\gamma+\frac{1}{2}(\ln n)^2+C-\frac{1}{2}(\ln 2n)^2-C+\mathrm{o}(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}(1)\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$$

donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2).$$
N'est-ce pas magnifique ?

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t\mapsto 1$, on obtient $u_n\to 0$.

(b)
$$u_n+u_{n+2}=\int_0^{\pi/4}(\tan t)'(\tan t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}.$$

(c) On vérifie aisément $u_n\to 0^+$ et $u_{n+1}\le u_n$. Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum(-1)^n u_n$ converge.

(d) Par monotonie
$$u_n+u_{n+2}\le 2u_n\le u_n+u_{n-2}.$$
On en déduit $u_n\sim\frac{1}{2n}$ puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha>0$.

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Puisque
$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\xrightarrow[p\to+\infty]{}+\infty$$
on peut affirmer que l'ensemble
$$\left\{p\in\mathbb{N},\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\ge j\right\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.

(b) Par définition de Φ_j, on a
$$j\le\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}.$$
Or, par comparaison avec une intégrale
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}\le 1+\int_1^{\Phi_j}\frac{\mathrm{d}t}{t}=1+\ln\Phi_j.$$
On en déduit $\Phi_j\ge\mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j\xrightarrow[j\to+\infty]{}+\infty$.

(c) Par définition de Φ_j, on a
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1}\frac{1}{n}\le j\le\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}.$$
Or, sachant que $\Phi_j\to+\infty$, on a
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}=\ln\Phi_j+\gamma+\mathrm{o}(1)\text{ et }\sum_{n=1}^{\Phi_j-1}\frac{1}{n}=\ln(\Phi_j-1)+\gamma+\mathrm{o}(1).$$
Par suite
$$\ln(\Phi_j-1)+\gamma+\mathrm{o}(1)\le j\le\ln\Phi_j+\gamma+\mathrm{o}(1).$$
Or
$$\ln(\Phi_j-1)=\ln\Phi_j+\mathrm{o}(1)$$
donc
$$j=\ln\Phi_j+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
puis
$$\Phi_j=\mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)}.$$
On en déduit
$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j}=\frac{\mathrm{e}^{j+1-\gamma+\mathrm{o}(1)}}{\mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)}}=\mathrm{e}^{1+\mathrm{o}(1)}\to\mathrm{e}.$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante.
Si $\alpha>1$, on a
$$u_{n+1}\le u_n+\frac{1}{n^\alpha u_1}$$
puis par récurrence
$$u_n\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha u_1}.$$
Ainsi (u_n) converge.
Si (u_n) converge. Posons $\ell=\lim u_n$, on observe $\ell>0$. On a
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$$
or la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente donc $\alpha>1$.

(b) On suppose $\alpha \leq 1$. On a

$$u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{2}{n^\alpha} + \frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2} \sim \frac{2}{n^\alpha}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes

$$u_n^2 \sim 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

or par comparaison série-intégrale,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \text{ quand } \alpha < 1$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n \text{ quand } \alpha = 1.$$

On conclut alors

$$u_n \sim \sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} \text{ si } \alpha < 1 \text{ et } u_n \sim \sqrt{2\ln n} \text{ si } \alpha = 1.$$

(c) On suppose $\alpha > 1$. Posons $v_n = u_n - \ell$. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n^\alpha u_n} \sim \frac{1}{n^\alpha \ell}$$

donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_{k+1} - v_k = -v_n \sim \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{\ell n^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$

puis

$$v_n = \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 7 : [énoncé]

(a) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 1$.
Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(b) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, v_n étant le reste de la série $\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0$.
De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right).$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+2)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec $c_n \in \left]p+n+1\,;p+n+2\right[$.
La suite (c_n) est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final, $(|v_n|)$ est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que $\sum v_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée, f n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n)\,\mathrm{d}x.$$

Or par le théorème des accroissements fini,

$$f(x) - f(n) = f'(c_x)(x-n)$$

avec $c_x \in \left]n\,;x\right[$.
Après calcul de $f'(x)$, on en déduit

$$\left|f(x) - f(n)\right| \leq \frac{1}{3n^{4/3}} + \frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$.

(b) La série de terme général $\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t = 3\sin(n^{1/3})$ diverge. En effet si $\sin\left(n^{1/3}\right)$ convergeait vers ℓ alors par extraction $\sin(n)$ aussi et il est classique d'établir la divergence de $(\sin(n))$. On en déduit que $\sum \frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$ diverge.

(c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n)$ conclusion.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) L'intégrale définissant u_n est bien définie car elle porte sur une fonction sur le segment $[0\,;1]$. On peut aussi la comprendre comme une intégrale généralisée convergente sur $[0\,;1[$

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n}$$

et par sommation géométrique

$$\int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}.$$

Sur $[0\,;1[$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f\colon x \mapsto 1-x$.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$\left|\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\right| \le \frac{1-x}{1-x} = 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par convergence dominée

$$u_n \to \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(b) On amorce les calculs comme au dessus pour écrire

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\cdots+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n+1}\ln(1-x^{n+1})(1-x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\,\mathrm{d}x.$$

Le terme entre crochet est nul (il suffit d'écrire $x = 1-h$ avec $h \to 0$, pour étudier la limite en 1)
Il reste

$$v_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\,\mathrm{d}x.$$

Par développement en série entière de la fonction $u \mapsto -\ln(1-u)$

$$v_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^{(n+1)k}\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$g_k(x) = \frac{1}{k}x^{(n+1)k}.$$

La série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $[0\,;1[$ en vertu de la décomposition en série entière précédente.
Les fonctions g_k et la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k\colon x \mapsto -\ln(1-x^{n+1})$ sont continues par morceaux.
Enfin, les fonctions g_k sont intégrables sur $[0\,;1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left|\frac{1}{k}x^{(n+1)k}\right|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty.$$

On peut donc intégrer terme à terme pour écrire
donc

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\int_0^1 x^{(n+1)k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \le \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

puis finalement

$$v_n \le \frac{C}{(n+1)^2}.$$

La série à termes positifs $\sum v_n$ est donc convergente.

Exercice 10 : [énoncé]
On observe que $u_{n+1}^n - u_n^{n-1} = n$.
Puisque $\sum n$ une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer

$$u_{n+1}^n \sim \sum_{k=1}^n k \sim \frac{1}{2}n^2.$$

En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient

$$n\ln u_{n+1} \sim 2\ln n$$

puis

$$\ln u_{n+1} \sim 2\frac{\ln n}{n}.$$

Par suite $u_{n+1} \to 1$ puis

$$u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Posons

$$v_n = u_{n+1} - 1 - 2\frac{\ln n}{n}.$$

L'égalité

$$u_{n+1}^n = \exp\left(n\ln\left(1 + 2\frac{\ln n}{n} + v_n\right)\right)$$

donne

$$u_{n+1}^n = \exp\bigl(2\ln n + nv_n + \mathrm{O}\bigl((\ln n)^2/n\bigr)\bigr).$$

Or $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2} \to 1$ donc

$$\exp\bigl(\ln(2) + nv_n + \mathrm{O}\bigl((\ln n)^2/n\bigr)\bigr) \to 1$$

puis $nv_n \to -\ln(2)$. Ainsi

$$u_{n+1} = 1 + 2\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Puisque $|d_n e_n| \leq e_n$ avec convergence de $\sum e_n$, on peut affirmer que les éléments de G sont des sommes de séries absolument convergentes. Les éléments de G sont donc bien définis et puisque

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e_n = s$$

on a $G \subset [-s\,;s]$. Enfin $s \in G$ avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $-s \in G$ avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Si e est une base discrète alors $G = [-s\,;s]$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $e_N > r_N$.
Introduisons

$$x = \sum_{k=0}^{N-1} e_k \in [-s\,;s]$$

(comprendre $x = 0$ si $N = 0$).
Soit

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \text{ avec } d_n \in \{-1, 1\}.$$

S'il existe $k \leq N$ tel que $d_k = -1$ alors

$$y \leq \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n - 2e_k = s - 2e_k.$$

Or

$$e_k \geq e_N$$

donc

$$y < s - 2e_N = x + r_N - e_N < x.$$

Si $d_k = 1$ pour tout $k \leq N$ alors

$$y = \sum_{n=0}^{N} e_k + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_k e_k \geq x + e_N - r_N > x.$$

Dans tous les cas, $y \neq x$ et donc $x \notin G$. C'est absurde.

(c) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Cas $n = 0$: on a bien

$$|t - t_0| = |t| \leq s = e_0 + r_0.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang $n \geq 0$.

Si $t_n \leq t$ alors

$$t - t_{n+1} = t - t_n - e_n \leq r_n$$

et

$$t - t_{n+1} \geq -e_n \geq -r_n.$$

Ainsi

$$|t - t_{n+1}| \leq r_n = e_{n+1} + r_{n+1}.$$

Si $t_n > t$ alors

$$t_{n+1} - t = t_n - t - e_n$$

et l'étude est analogue.
Récurrence établie.
On en déduit que $t_n \to t$ puis que $t \in G$.
En conclusion

$$e \text{ est une base discrète si, et seulement si, } \forall n \in \mathbb{N}, e_n \leq r_n.$$

(d) La condition précédente est vérifiée et, puisque $s = 2$, on obtient $G = [-2\,;2]$.
On peut écrire

$$0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\frac{1}{2^n}, 1 = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$$

et

$$2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.$$

En remarquant

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

on peut proposer

$$\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}.$$

Il peut y avoir unicité de la suite (d_n) (c'est le cas pour $x = s$) ou non (c'est le cas pour $x = 0$ où lorsque (d_n) convient, $(-d_n)$ convient aussi).

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Soit λ et μ deux éléments de I^* et $\theta \in [0\,;1]$. Étudions $\xi = (1-\theta)\lambda + \theta\mu$.
Pour tout $x \in I$,

$$\lambda x - f(x) \leq f^*(\lambda) \quad \text{et} \quad \mu x - f(x) \leq f^*(\mu).$$

En multipliant ces deux équations respectivement par les réels positifs $1-\theta$ et θ puis en sommant, on obtient

$$\xi x - f(x) \leq (1-\theta)f^*(\lambda) + \theta f^*(\mu).$$

Ainsi, $\xi \in I^*$ et $f(\xi) \leq (1-\theta)f^*(\lambda) + \theta f^*(\mu)$. On en déduit que I^* est un intervalle et f^* est convexe.

(b) La fonction f est convexe et son graphe est donc au-dessus de chacune de ses tangentes. Pour $a \in I$, on a donc

$$\forall x \in I, f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

soit

$$\forall x \in I, f'(a)x - f(x) \leq af'(a) - f(a). \tag{1}$$

On en déduit que $f'(a)$ est élément de I^* et

$$f^*\big(f'(a)\big) = \sup_{x\in I}\big(f'(a)x - f(x)\big) \leq af'(a) - f(a).$$

De plus, l'inégalité (**??**) est une égalité pour $x = a$ et donc

$$f^*\big(f'(a)\big) = \max_{x\in I}\big(f'(a)x - f(x)\big) = af'(a) - f(a).$$

Exercice 13 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. Puisque celle-ci est continue sur un segment, elle y admet un minimum en un certain $x_0 \in [0\,;1]$.
On a alors

$$f(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(u_n x_0 + 1 - x_0)}{2^n} \geq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{f(x_0)}{2^n} = f(x_0).$$

On en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n x_0 + 1 - x_0) = f(x_0).$$

En passant à la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(1) = f(x_0).$$

Ainsi $f(1)$ est la valeur minimale de f sur $[0\,;1]$
Un raisonnement symétrique assure aussi que $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $[0\,;1]$.
On en déduit que f est constante.
La réciproque est immédiate.

Exercice 14 : [énoncé]
Posons $f\colon]0\,;1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = -\frac{\ln(1-x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

prolongée par continuité en 0.
Notons que cette fonction est positive et croissante.
Introduisons $a, b \in]0\,;1[$ dont les valeurs seront déterminées ultérieurement. On peut écrire

$$-(n+1)I_n = A_n + B_n + C_n$$

avec

$$A_n = \int_0^a (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x, B_n = \int_a^b (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x \text{ et } C_n = \int_b^1 (n+1)\frac{x^n}{f(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Par monotonie de f,

$$0 \le A_n \le \int_0^a \frac{(n+1)x^n}{f(0)} = a^{n+1}.$$

Pour $a = 1 - \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = \frac{\ln n}{n} \to 0$, on a

$$\ln(n)a^{n+1} = \mathrm{e}^{\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n)} \to 0$$

car

$$\ln(\ln n) + (n+1)\ln(1-\varepsilon_n) \sim -\ln n \to -\infty.$$

On en déduit

$$A_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Par la croissance de f

$$0 \le C_n \le \int_b^1 \frac{(n+1)x^n}{f(b)}\,\mathrm{d}x = \frac{1-b^{n+1}}{f(b)}.$$

Pour $b = 1 - \eta_n$ avec $\eta_n = \frac{1}{n(\ln n)} \to 0$, on a

$$b^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim \ln n$$

de sorte que

$$C_n \sim \mathrm{o}\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Enfin, toujours par la croissance de f,

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(b)} \le B_n \le \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{f(a)}$$

et puisque

$$b^{n+1} - a^{n+1} \to 1 \text{ et } f(b) \sim f(a) \sim \ln n$$

on parvient à

$$-(n+1)I_n \sim \frac{1}{\ln n}$$

et finalement

$$I_n \sim -\frac{1}{n\ln n}.$$

Remarque :
Par le changement de variable $t = -\ln(1-x)$, $x = 1 - \mathrm{e}^{-t}$

$$I_n = -\int_0^{+\infty} \frac{(1-\mathrm{e}^{-t})^{n+1}}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

En développant par la formule du binôme

$$I_n = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \frac{-\mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On ne peut pas linéariser car les intégrales divergent en 0. On exploite

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} = 0$$

pour introduire un 0 faisant converger les intégrales et permettant de linéariser

$$I_n = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On peut alors montrer par découpage d'intégrale et un changement de variable affine que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(k+1)t}}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(k+1).$$

Ce qui précède permet alors d'établir

$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \binom{n+1}{k} \ln(k+1) \sim -\frac{1}{n\ln n}.$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) 0, cf. lemme de Lebesgue.

(b) Posons
$$I_n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t.$$
Cette intégrale existe car un prolongement par continuité est possible en 0.
On observe
$$\sin(2(n+1)t)-\sin(2nt)=2\sin t\cos(2n+1)t$$
et donc
$$I_{n+1}-I_n=\int_0^{\pi/2}2\cos((2n+1)t)\cos t\,\mathrm{d}t=0.$$
La suite (I_n) est constante égale à
$$I_1=\int_0^{\pi/2}2\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

(c) On a
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)\cos t}{\sin t}\,\mathrm{d}t-\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sin(2nt)f(t)\,\mathrm{d}t$$
avec
$$f(t)=\cot t-\frac{1}{t}$$
qui se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Ainsi
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t\to\frac{\pi}{2}.$$
Or
$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nt)}{t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{n\pi}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u$$
donc la convergence de l'intégrale de Dirichlet étant supposée connue, on obtient
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$$

(d) On a
$$\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi/2}\ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

Par intégration par parties,
$$\int_0^{\pi/2}\ln(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{\ln(\pi/2)\sin(n\pi/2)}{n}-\frac{1}{n}\int_0^{n\pi/2}\frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u.$$
La fonction $t\mapsto\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;\pi/2]$.
Par intégration par parties,
$$\int_0^{\pi/2}\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\cos(nt)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)\sin(n\pi/2)-\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin($$
La fonction $t\mapsto\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;\pi/2]$, on a
$$\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\left(\ln\left(\frac{\sin(t/2)}{t/2}\right)\right)'\sin(nt)\,\mathrm{d}t=\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
et donc
$$\int_0^{\pi/2}\ln(2\sin(t/2))\cos(nt)\,\mathrm{d}t\sim\frac{(\ln 2)\sin(n\pi/2)-\pi}{2n}.$$

Exercice 16 : [énoncé]
Par intégration par parties
$$\int_0^x\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\mathrm{e}^t\sin(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\Big[-\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^x-\int_0^x\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
D'une part
$$\cos(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{-x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$
et d'autre part $t\mapsto\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty]$ car
$$t^2\cos(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{-t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$
donc l'intégrale $\int_0^{+\infty}\sin(\mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 17 : [énoncé]

(a) On a
$$f'(x) = f'(0) + \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t$$
donc $f'(x)$ admet une limite finie ℓ quand $x \to +\infty$.
Si $\ell > 0$ alors pour x assez grand $f'(x) \geq \ell/2$ puis $f(x) \geq \ell x/2 + m$ ce qui empêche la convergence de $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si $\ell < 0$ on obtient aussi une absurdité. Il reste donc $\ell = 0$.

(b) Puisque la fonction f' est continue et converge en $+\infty$, cette fonction est bornée et donc $t \mapsto f(t)f'(t)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 18 : [énoncé]
La fonction $f\colon t \mapsto t\lfloor 1/t\rfloor$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $t > 1$, $\lfloor 1/t\rfloor = 0$ et donc $f(t) = 0$. Ainsi f est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.
Pour $t > 0$, $1/t - 1 \leq \lfloor 1/t\rfloor \leq 1/t$ et donc $f(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 1$. Ainsi f est intégrable sur $]0\,;1]$.
On a
$$I = \lim_{n\to+\infty} \int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} t\lfloor 1/t\rfloor\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{1/(k+1)}^{1/k} kt\,\mathrm{d}t$$
puis
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2k+1}{k(k+1)^2}.$$
Par décomposition en éléments simples
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}\right)$$
et après réorganisation
$$\int_{1/n}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$
On en déduit
$$I = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 19 : [énoncé]
Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique
$$\frac{1}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$
et donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$
Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme
$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}.$$
On peut donc affirmer que $\mathbb{N}^*$ est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants
$$A_n = \left\{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\right\}.$$
Puisque la famille $(z^p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire
$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m\in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$
Finalement
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}.$$

Exercice 20 : [énoncé]

(a) Soit $s = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^a}.$$
Par conséquent, si $a > 1$, la série $\sum 1/n^s$ converge absolument et donc converge.

(b) Soit s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. En développant
$$\zeta(s)\big(1 - 2^{1-s}\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{P=1}^{+\infty} \frac{2}{(2p)^s}.$$

Par absolue convergence, on peut séparer la première somme en deux paquets, celui des termes d'indices pairs et celui des termes d'indices impairs. Il vient alors

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s}. \tag{2}$$

En regroupant ces sommes, on obtient

$$\zeta(s)\left(1-2^{1-s}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

avec sommabilité de la somme en second membre.

(c) En reprenant, l'expression (**??**), étudions

$$F(s)=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s}-\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s}=\sum_{p=1}^{+\infty}u_p(s)$$

avec

$$u_p(s)=\frac{(2p)^s-(2p-1)^s}{(2p)^s(2p-1)^s}$$

définie pour $s\in\mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re}(s)>0$.
Pour $s=a+ib$ fixé, la fonction $f\colon t\mapsto t^s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2p-1\,;2p]$ et

$$\left|f'(t)\right|=\left|st^{s-1}\right|=|s|t^{a-1}\le|s|\left((2p-1)^{a-1}+(2p)^{a-1}\right).$$

Par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|(2p)^s-(2p-1)^s\right|\le|s|\left((2p-1)^{a-1}+(2p)^{a-1}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\left|u_p(s)\right|&\le|s|\frac{\left((2p-1)^{a-1}+(2p)^{a-1}\right)}{(2p)^a(2p-1)^a}\\&\le|s|\left(\frac{1}{(2p)^a(2p-1)}+\frac{1}{(2p)(2p-1)^a}\right).\end{aligned}$$

Introduisons alors

$$\Omega_{\alpha,R}=\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\operatorname{Re}(z)\ge\alpha\text{ et }|z|\le R\right\}\quad\text{pour}\quad\alpha,R>0.$$

Les fonctions u_n sont continues sur $\Omega_{\alpha,R}$ et pour tout $s\in\Omega_{\alpha,R}$

$$\left|u_n(s)\right|\le|R|\left(\frac{1}{(2p)^\alpha(2p-1)}+\frac{1}{(2p)(2p-1)^\alpha}\right)\underset{n\to+\infty}{=}\mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\Omega_{\alpha,R}$ et sa fonction somme F est définie et continue sur $\Omega_{\alpha,R}$. Ceci valant pour tous α et R strictement positifs, on obtient que F est définie et continue sur $\left\{z\in\mathbb{C}\;\middle|\;\operatorname{Re}(z)\right\}$. Enfin, la fonction $s\mapsto 1-2^{1-s}$ étant continue et ne s'annulant pas sur Ω, on peut prolonger ζ par continuité sur Ω en posant

$$\zeta(s)=\frac{F(s)}{1-2^{1-s}}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C=2C-2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C=0$ et $C=1/2$ seulement.

(b) Après substitution et étude séparée du cas $x=0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x)=h(x)-xh(x)^2.$$

(c) L'application T_x est de classe $\mathcal{C}^1$ et $T_x'(y)=1-xy$. Sur $[0\,;1]$, on vérifie $\left|T_x'(y)\right|\le 1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0\,;1]$ avec $T_x(0)=0$ et $T_x(1)=1-x/2$. On en déduit $T_x\Big([0\,;1]\Big)\subset[0\,;1]$.
Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n\in\mathbb{N},\forall x\in[0\,;1],h_n(x)\in[0\,;1].$$

Pour $n\ge1$ et $x\in[0\,;1]$, on a par lipschitzianité

$$\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right|\le\left|h_n\left(\frac{x}{2}\right)-h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

En répétant cette majoration

$$\left|h_{n+1}(x)-h_n(x)\right|\le\left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right)-h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right|=\frac{x}{2^{n+1}}\le\frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x)-h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h. Au surplus

$$\left|h(x)-h_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n}^{+\infty}h_{k+1}(x)-h_k(x)\right|\le\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0\,;1]$.

(d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0;1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0;1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0;1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}h\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Puisque $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(0) = 1$ et la fonction h n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f\colon x \mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0;1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

(e) On peut ensuite définir une solution sur $[0;2]$ en posant

$$\forall x \in]1;2], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

De même, on prolonge la solution sur $[0;4]$, $[0;8]$, etc.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $u_n(x) = \mathrm{O}(1/n^2)$. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec

$$u_n'(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x}.$$

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x \in [a;b]$

$$\left|u_n'(x)\right| \le \left|u_n'(a)\right| + \left|u_n'(b)\right| = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il y a donc convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction f l'est aussi par opérations.

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x > 0$, on a après télescopage

$$f'(x+1) - f'(x) = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}\right) = \frac{1}{x}$$

et

$$\begin{aligned} f(2) - f(1) = f(2) &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty} 2\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) \\ &= -\ln 2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(2\ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+2)\bigr) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, on peut affirmer $f(x+1) - f(x) = \ln x$. Enfin, f est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.
Inversement, soit g une autre fonction vérifiant les conditions proposées. Étudions la fonction $h = f - g$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle.
Pour $x > 0$, on a par croissance des dérivées de f et de g

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) \le f'\bigl(\lfloor x\rfloor + 1\bigr) - g'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr) = \frac{1}{\lfloor x\rfloor} + h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$$

et parallèlement

$$h'(x) \ge h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr) - \frac{1}{\lfloor x\rfloor}.$$

La fonction h' est 1-périodique, les valeurs $h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$ sont donc constantes égales à C.
En passant à la limite quand $x \to +\infty$ l'encadrement

$$C - \frac{1}{\lfloor x\rfloor} \le h'(x) \le C + \frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$

on obtient que la fonction h' présente une limite en $+\infty$. Puisque h' est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction h est périodique, la fonction h' est constante égale à 0.

(c) On reconnaît en premier membre la fonction Γ « connue » indéfiniment dérivable avec

$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

On sait aussi $\Gamma > 0$, $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
Considérons alors $f(x) = \ln\big(\Gamma(x)\big)$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(x+1) - f(x) = \ln x$, $f(1) = 0$ et f convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\big(\Gamma'(x)\big)^2 \le \Gamma(x)\Gamma''(x)$$

ce qui conduit à $f'' \ge 0$.
On peut donc affirmer

$$\Gamma(x) = \mathrm{e}^{f(x)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

et on peut conclure sachant $n+1$ équivalent à n.

Exercice 23 : [énoncé]

(a)
```
def S(N,x):
    if N == 0:
        return 1/x
    return S(N-1,x) + 1/(x-N) + 1/(x+N)
```

(b)
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def trace(N,a,b):
    X = linspace(a,b,100)
    Y = [S(N,x) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
```

(c) Posons $u_n\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2 - n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On peut alors affirmer la convergence simple de la suite de fonctions (S_N) vers une certaine fonction S sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(d) Soit $[a\,;b]$ inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Pour N_0 assez grand, on a

$$[a\,;b] \subset [-N_0\,;N_0].$$

Soit $x \in [a\,;b]$. Pour tout $N > N_0$ et tout $P \in \mathbb{N}$,

$$S_{N+P}(x) - S_N(x) = \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2x}{x^2-n^2}.$$

Le facteur $x^2 - n^2$ est négatif pour chaque terme sommé et par conséquent

$$\left|S_{N+P}(x) - S_N(x)\right| \le \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2|x|}{n^2 - x^2} \le \sum_{n=N+1}^{N+P} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}.$$

En passant à la limite quand P tend vers $+\infty$, on obtient la majoration uniforme

$$\left|S(x) - S_N(x)\right| \le \alpha_N \quad \text{avec} \quad \alpha_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{2N_0}{n^2 - N_0^2}.$$

Puisque α_N est le reste de rang N d'une série convergente, α_N est de limite nulle et on peut conclure que la suite de fonctions (S_N) converge uniformément vers S sur $[a\,;b]$.

(e) Les fonctions S_N sont continues et par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Les fonctions S_N sont impaires et par convergence simple, on peut affirmer que S est une fonction impaire.
Enfin, on obtient que la fonction S est 1-périodique en passant à la limite l'égalité

$$S_N(x+1) = \sum_{n=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+n} = S_N(x) + \frac{1}{x+N+1} - \frac{1}{x-N}$$

valable pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(f) Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on remarque

$$S_N\left(\frac{x}{2}\right) + S_N\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{2}{x-2n} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{2}{x-(2n-1)}$$
$$= \sum_{n=-2N-1}^{2N} \frac{2}{x-n} = 2S_{2N}(x) + \frac{2}{x+2N+1}.$$

On obtient la relation voulue en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$.

(g) Pour $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a

$$\cot\left(\pi\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)} - \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Après réduction au même dénominateur

$$\cot\left(\pi\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\pi\frac{x+1}{2}\right) = \frac{2\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)} = 2\cot(\pi x).$$

L'ensemble des fonctions vérifiant la relation proposée étant un sous-espace vectoriel, la fonction f vérifie aussi cette relation.

(h) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[\setminus \{0\}$, on peut écrire

$$S(x) = \frac{1}{x} + T(x) \quad \text{avec} \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

Par les arguments précédents, on peut affirmer que la fonction T est continue sur $\left]-1\,;1\right[$. Aussi, on a par développement limité

$$\pi \cot(\pi x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{x} + \mathrm{o}(1)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(1) - T(x)$$

ce qui permet de prolonger f par continuité en 0 avec la valeur $-T(0) = 0$.
Par périodicité, on peut prolonger f par continuité avec la valeur 0 en tout $k \in \mathbb{Z}$.
La fonction f est continue sur le compact $[0\,;1]$ et y présente un maximum de valeur M. Celui-ci est atteint en un certain $x_0 \in [0\,;1]$. Or

$$\underbrace{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{\leq M} + \underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\leq M} = 2f(x_0) = 2M$$

et donc

$$f\left(\frac{x_0}{2}\right) = f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) = M.$$

Ainsi, le maximum de f est aussi atteint en $x_0/2$, puis en $x_0/4$, etc.
Finalement, le maximum de f est atteint en 0 et il est donc de valeur nulle.
De même, on montre que le minimum de f est nul et on peut conclure

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S(x) = \pi \cot(\pi x).$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) *Unicité:* Si deux polynômes sont solutions, leur différence s'annule sur $[-1\,;1]$ et correspond donc au polynôme nul.
Existence: On peut raisonner par récurrence double en introduisant

$$T_0 = 1, T_1 = X \quad \text{et} \quad T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$$

ou employer la formule de Moivre pour écrire :

$$\begin{aligned}\cos(n\theta) &= \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n)\\ &= \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}\theta(1-\cos^2\theta)^p.\end{aligned}$$

(b) On vérifie $\|T_n\| = 1$ et on observe

$$T_n(\cos x_k) = (-1)^k \quad \text{avec} \quad x_k = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } x_0 > x_1 > \dots > x_n.$$

Aussi, le polynôme T_n est de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Par l'absurde, supposons $\|P\| < 1/2^{n-1}$ et considérons

$$Q = P - \frac{1}{2^{n-1}}T_n.$$

Le polynôme Q est de degré strictement inférieur à n et prend exactement le signe de $(-1)^k$ en les x_k. Par l'application du théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme Q s'annule sur $\left]x_n\,;x_{n-1}\right[, \dots, \left]x_1\,;x_0\right[$: c'est le polynôme nul ce qui est absurde.

(c) L'implication indirecte est entendue. Supposons, $\|P\| = 1/2^{n-1}$. Considérons de nouveau le polynôme Q. Au sens large, il prend le signe de $(-1)^k$ en les x_k et on peut assurer l'existence d'au moins une racine dans chaque intervalle $[x_n\,;x_{n-1}], \dots, [x_1\,;x_0]$. Lorsque cela est possible, on choisit cette racine dans l'intervalle ouvert et on note $\alpha_n \leq \ldots \leq \alpha_1$ les n racines ainsi obtenues.
Si celles-ci sont distinctes, le polynôme Q est nul et on conclut.
Sinon, lorsqu'il y en a deux qui ne sont pas distinctes, elles correspondent à un même x_k avec $k \in [\![1\,;n-1]\!]$ pour lequel Q est de signe strict [1] sur $\left]x_{k+1}\,;x_k\right[$ et $\left]x_k\,;x_{k-1}\right[$. Ces signes sont nécessairement identiques et Q présente un extremum en x_k qui est donc racine double de Q. Le polynôme Q admet alors au moins n racines comptées avec multiplicité et on conclut.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) L'application $N\colon E \to \mathbb{R}_+$ est bien définie et on vérifie aisément $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f+g) \leq N(f) + N(g)$.
Supposons maintenant $N(f) = 0$, la fonction f est alors solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ ce qui entraîne $f = 0$.
Finalement N est une norme sur E.

1. Car on a choisi les α_k dans l'intervalle ouvert lorsque cela est possible.

(b) On a évidemment $N \leq \nu$.
Inversement, soit $f \in E$ et $g = f + f''$. La fonction f est solution de l'équation différentielle

$$y'' + y = g$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. Après résolution via la méthode de variation des constantes, on obtient

$$f(x) = \int_0^x \sin(x-t) g(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit $\left|f(x)\right| \leq x\|g\|_\infty \leq \pi\|g\|_\infty$ et donc $\|f\|_\infty \leq \pi N(f)$.
De plus $\|f''\|_\infty \leq \|f + f''\|_\infty + \|f\|_\infty$ donc $\nu(f) \leq (\pi+1)N(f)$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Posons $\varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$. φ est une forme bilinéaire symétrique, $\varphi(f,f) \geq 0$ et si $\varphi(f,f) = 0$ alors $f(0) = 0$ et pour tout $t \in [0\,;1]$, $f'(t) = 0$ donc $f = 0$. φ est donc un produit scalaire et N apparaît comme étant la norme associée.

(b) Pour tout $x \in [0\,;1]$, $\left|f(x)\right| \leq \left|f(0)\right| + \left|\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{2}N(f)$, donc $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.Pour $f(x) = \sin(nx\pi)$, $\|f\|_\infty = 1$ et $N(f) = n\pi/\sqrt{2} \to +\infty$.
Les deux normes ne sont donc pas équivalentes.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) $N_a(1,1)$ et $N_a(1,-1)$ doivent exister et être strictement positifs. Cela fournit les conditions nécessaires $2a + 2 > 0$ et $2 - 2a > 0$ d'où $a \in \left]-1\,;1\right[$. Montrons que cette condition est suffisante.
Supposons $a \in \left]-1\,;1\right[$ et considérons $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi\big((x,y),(x',y')\big) = xx' + yy' + axy' + ayx'$.
L'application φ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^2$ et pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\varphi\big((x,y),(x,y)\big) \geq \big(1 - |a|\big)(x^2+y^2) > 0$ en vertu de $|2axy| \leq |a|\big(x^2+y^2\big)$. Ainsi φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ et N_a est la norme euclidienne associée.

(b) Le cas $a = b$ est immédiat. Quitte à échanger, on peut désormais supposer $a < b$.
Par homogénéité, on peut limiter l'étude de $\frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)}$ au couple $(x,y) = (\cos t, \sin t)$ avec $t \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right]$.
Posons

$$f(t) = \left(\frac{N_a(\cos t,\sin t)}{N_b(\cos t,\sin t)}\right)^2 = \frac{1 + a\sin 2t}{1 + b\sin 2t}.$$

On a

$$f'(t) = 2\frac{(a-b)\cos(2t)}{(1+b\sin 2t)^2}.$$

Les variations de f sont faciles et les extremums de $f(t)$ sont en $t = -\pi/4$ et $t = \pi/4$. Ils valent $\frac{1-a}{1-b}$ et $\frac{1+a}{1+b}$.
On en déduit

$$\inf_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} = \sqrt{\frac{1+a}{1+b}}$$

et

$$\sup_{(x,y)\neq 0} \frac{N_a(x,y)}{N_b(x,y)} = \sqrt{\frac{1-a}{1-b}}$$

(dans le cas $a < b$).

Exercice 28 : [énoncé]
Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors $\big\|f(y) - f(x)\big\| = \|y - x\|$.
Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y) - f(x)\big\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - x\right\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - y + y - x\right\| \leq \|y\| - 1 + \|y - x\| \leq 2\|y - x\|.$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y) - f(x)\big\| = \left\|\frac{y}{\|y\|} - \frac{x}{\|x\|}\right\| = \left\|\frac{y-x}{\|y\|} + x\left(\frac{1}{\|y\|} - \frac{1}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{\|y-x\|}{\|y\|} + \frac{\big|\|x\| - \|y\|\big|}{\|y\|} \leq 2\|y-$$

Au final f est 2-lipschitzienne.
Supposons maintenant que la norme $\|\cdot\|$ soit hilbertienne.
Si $\|x\|, \|y\| \leq 1$ alors

$$\big\|f(y) - f(x)\big\| = \|y - x\|.$$

Si $\|x\| \leq 1$ et $\|y\| > 1$ alors

$$\big\|f(y) - f(x)\big\|^2 - \|y - x\|^2 = 1 - \|y\|^2 - 2\frac{\|y\| - 1}{\|y\|}(x \,|\, y).$$

Or $|(x \,|\, y)| \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$ donc

$$\big\|f(y) - f(x)\big\|^2 - \|y - x\|^2 \leq 1 - \|y\|^2 + 2(\|y\| - 1) = -(1 - \|y\|)^2 \leq 0.$$

Si $\|x\|, \|y\| > 1$ alors

$$\left\|f(y)-f(x)\right\|^2 - \|y-x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 - 2\frac{\|x\|\|y\|-1}{\|x\|\|y\|}(x\,|\,y).$$

Or $|(x\,|\,y)| \leq \|x\|\|y\|$ donc

$$\left\|f(y)-f(x)\right\|^2 - \|y-x\|^2 = 2 - \|y\|^2 - \|x\|^2 + 2(\|x\|\|y\|-1) = -(\|x\|-\|y\|)^2 \leq 0.$$

Au final f est 1-lipschitzienne.

Exercice 29 : [énoncé]

(a) Sachant $(u_{n+1}-u_n)$ de limite nulle, pour $\varepsilon = (b-a)/2 > 0$, il existe un rang $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \implies \left|u_{n+1}-u_n\right| \leq \varepsilon$$

et alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+p+1}-u_{n+p}| \leq \varepsilon.$$

Sachant (v_p) de limite $+\infty$, le terme $u_p - v_q$ tend vers $-\infty$ lorsque q tend vers $+\infty$ et il existe donc un rang q tel que $u_p - v_q \leq a$.
Pour ces paramètres p et q, la suite de terme général $w_n = u_{n+p} - v_q$ vérifie les conditions requises.

(b) Posons

$$E = \left\{u_n - v_p \,\middle|\, (n,p) \in \mathbb{N}^2\right\}.$$

La suite (u_n) étant de limite $+\infty$, la suite (w_n) l'est aussi et l'ensemble A des $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $w_n \leq a$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée. On peut alors introduire le plus grand entier N vérifiant $w_N \leq a$. On vérifie

$$w_{N+1} > a \quad \text{et} \quad w_{N+1} \leq w_N + \underbrace{\left|w_{N+1}-w_N\right|}_{\leq (b-a)/2} < b.$$

On a ainsi établi :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b \implies \exists x \in E, x \in \left]a\,;b\right[.$$

La partie E est donc dense dans $\mathbb{R}$.

(c) Introduisons $(v_p) = (2p\pi)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction sinus est $S = \left\{\sin(u_n) \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
Cette partie est incluse dans le fermé $[-1\,;1]$ et donc $\overline{S}$ aussi.
Inversement, tout élément de $[-1\,;1]$ est le sinus d'un angle θ et il existe une suite d'éléments de E de limite θ. Par continuité de la fonction sinus, il existe une suite d'éléments de S de limite $\sin\theta$. Au final,

$$\overline{S} = [-1\,;1].$$

(d) Introduisons $(v_p) = (p)$ de limite $+\infty$. La partie E est dense dans $\mathbb{R}$ et l'image de celle-ci par la fonction $f\colon x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est $F = \left\{u_n - \lfloor u_n \rfloor \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.
Cette partie est incluse dans le fermé $[0\,;1]$ et donc $\overline{F}$ aussi.
Inversement, tout élément de $]0\,;1[$ est limite d'une suite d'éléments de E. Les termes de cette suite appartiennent à $]0\,;1[$ à partir d'un certain rang et sont donc invariants par f : ils appartiennent à F. Ainsi

$$]0\,;1[\subset \overline{F}.$$

Enfin, $\overline{F}$ étant une partie fermée, on a aussi

$$[0\,;1] \subset \overline{F}$$

puis l'égalité.

(e) L'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) est

$$\mathrm{Adh}(u) = \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{\left\{u_n \,\middle|\, n \geq N\right\}}.$$

Par l'étude qui précède

$$\overline{\left\{u_n \,\middle|\, n \geq N\right\}} = [0\,;1]$$

et l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est exactement[2] $[0\,;1]$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) On sait

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det A.I_n.$$

Si A est inversible alors

$$\det \tilde{A}.\det A = (\det A)^n$$

donne

$$\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}.$$

L'application $A \mapsto \det \tilde{A}$ étant continue et coïncidant avec l'application elle aussi continue $A \mapsto (\det A)^{n-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on peut assurer que $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. L'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite n'est pas immédiatement l'adhérence de l'ensemble de ses termes, par exemple, pour $u_n = n$, la suite (u_n) n'a pas de valeurs d'adhérence !

(b) Si A est inversible alors $\tilde{A}$ aussi donc

$$\operatorname{rg}(A) = n \implies \operatorname{rg}(\tilde{A}) = n.$$

Si $\operatorname{rg}(A) \leq n-2$ alors A ne possède pas de déterminant extrait non nul d'ordre $n-1$ et donc $\tilde{A} = 0$. Ainsi

$$\operatorname{rg}(A) \leq n-2 \implies \operatorname{rg}(\tilde{A}) = 0.$$

Si $\operatorname{rg}(A) = n-1$ alors $\dim \operatorname{Ker} A = 1$ or $A\tilde{A} = \det A.I_n = 0$ donne $\operatorname{Im} \tilde{A} \subset \operatorname{Ker} A$ et donc $\operatorname{rg}(\tilde{A}) \leq 1$. Or puisque $\operatorname{rg}(A) = n-1$, A possède un déterminant extrait d'ordre $n-1$ non nul et donc $\tilde{A} \neq O$. Ainsi

$$\operatorname{rg}(A) = n-1 \implies \operatorname{rg}(\tilde{A}) = 1.$$

(c) Soit P une matrice inversible. Pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,

$$(P^{-1}\tilde{A}P)(P^{-1}AP) = \det A.I_n$$

et $P^{-1}AP$ inversible donc

$$P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP}.$$

Ainsi

$$\tilde{A} = P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}.$$

Les applications $A \mapsto \tilde{A}$ et $A \mapsto P\widetilde{P^{-1}AP}P^{-1}$ sont continues et coïncident sur la partie dense $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ elles sont donc égales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Si A et B sont semblables alors il existe P inversible vérifiant $P^{-1}AP = B$ et par la relation ci-dessus $P^{-1}\tilde{A}P = \widetilde{P^{-1}AP} = \tilde{B}$ donc $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont semblables.

(d) Si A est inversible alors $\tilde{A} = \det(A)A^{-1}$ et

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(\tilde{A})\tilde{A}^{-1} = \det(A)^{n-2}A.$$

Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\tilde{\tilde{A}} = \det(A)^{n-2}A.$$

Exercice 31 : [énoncé]
A est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de A convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $u_n^p \leq u_{n+1}^p$ qui donne à la limite $u_n \leq u_{n+1}$ et donc $u \in A$.

B est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de B convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque $u_n^p \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n^p| \leq \varepsilon/2$$

et donc

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $u \to 0$ et donc $u \in B$.
C est fermé. En effet si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de C convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors en notant ℓ^p la limite de u^p, la suite (ℓ^p) est une suite de Cauchy puisque $|\ell^p - \ell^q| \leq \|u^p - u^q\|_\infty$. Posons ℓ la limite de la suite (ℓ^p) et considérons $v^p = u^p - \ell^p$. $v^p \in B$ et $v^p \to u - \ell$ donc $u - \ell \in B$ et $u \in C$.
D est fermé car si $u^p = (u_n^p)$ est une suite d'éléments de D convergeant vers une suite $u = (u_n)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|u - u^p\|_\infty \leq \varepsilon/2$ et puisque 0 est valeur d'adhérence de u^p, il existe une infinité de n tels que $|u_n^p| \leq \varepsilon/2$ et donc tels que

$$|u_n| \leq |u_n - u_n^p| + |u_n^p| \leq \varepsilon.$$

Ainsi 0 est valeur d'adhérence de u et donc $u \in D$.
E n'est pas fermé. Notons δ^p, la suite déterminée par $\delta_n^p = 1$ si $p \mid n$ et 0 sinon. La suite δ^p est périodique et toute combinaison linéaire de suites δ^p l'est encore.
Posons alors

$$u^p = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k}\delta^k$$

qui est élément de E. La suite u^p converge car

$$\|u^{p+q} - u^p\|_\infty \leq \sum_{k=p+1}^{p+q} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^p} \to 0$$

et la limite u de cette suite n'est pas périodique car

$$u_0 = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{2^k} = 1$$

et que $u_n < 1$ pour tout n puisque pour que $u_n = 1$ il faut $k \mid n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 : [énoncé]
Soit $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in A$ tel que $|x - y| = d(x, A)$. Or $d(x, A) = 0$ donc $x = y \in A$. Ainsi A est fermé.
Par l'absurde supposons que A ne soit pas un intervalle. Il existe $a < c < b$ tel que $a, b \in A$ et $c \notin A$.
Posons $\alpha = \sup\{x \in A \mid x \leq c\}$ et $\beta = \inf\{x \in A \mid x \geq c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha\,;\beta[\subset C_{\mathbb{R}}A$.
Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma - \alpha| = |\gamma - \beta|$ ce qui contredit l'hypothèse d'unicité. Absurde.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Par télescopage

$$\left(\sum_{k=0}^{n} u^k\right) \circ (u - \mathrm{Id}) = u^{n+1} - \mathrm{Id}$$

donc

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id}) = \frac{1}{(n+1)}\big(u^{n+1} - \mathrm{Id}\big).$$

(b) Soit $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \cap \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$. On peut écrire $x = u(a) - a$ et on a $u(x) = x$.
On en déduit

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = x.$$

Or

$$v_n \circ (u - \mathrm{Id})(a) = \frac{1}{n+1}\big(u^{n+1}(a) - a\big) \to 0$$

car

$$\big\|u^{n+1}(a) - a\big\| \leq \big\|u^{n+1}(a)\big\| + \|a\| \leq 2\|a\|.$$

On en déduit $x = 0$.

(c) Par la formule du rang

$$\dim \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) = \dim E$$

et puisque les deux espaces sont en somme directe, ils sont supplémentaires.

(d) Soit $z \in E$. On peut écrire $z = x + y$ avec $x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ et $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
On a alors $v_n(z) = v_n(x) + y$ avec, comme dans l'étude du b), $v_n(x) \to 0$. On en déduit $v_n(z) \to y$.
Ainsi la suite de fonctions (v_n) converge simplement vers la projection p sur $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Puisque pour tout $x \in E$, on a

$$\big\|v_n(x)\big\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\big\|u^k(x)\big\| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|x\| = \|x\|$$

on obtient à la limite $\big\|p(x)\big\| \leq \|x\|$. On en déduit que la projection p est continue puis que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\, p$ est une partie fermée.

(e) Supposons la convergence simple de la suite de fonctions (v_n) et la fermeture de $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$.
Soit $z \in E$. Posons $y = \lim_{n\to+\infty} v_n(z)$ et $x = z - y$.
D'une part, puisque

$$u(v_n(z)) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^{k+1}(z) = v_n(z) + \frac{1}{n+1}\big(u^{n+1}(z) - z\big)$$

on obtient à la limite

$$u(y) = y$$

car l'application linéaire u est continue et $\big\|u^{n+1}(z)\big\| \leq \|z\|$. On en déduit $y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$.
D'autre part

$$z - v_n(z) = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{Id} - u^k)(z)\right)$$

et

$$\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u^k) = \mathrm{Im}\left((\mathrm{Id} - u) \circ \sum_{\ell=0}^{k-1} u^{\ell-1}\right) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - u) = \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$$

donc $z - v_n(z) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$. On en déduit $x = \lim(z - v_n(z)) \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ car $\mathrm{Im}(u - \mathrm{Id})$ est fermé.
Finalement, on a écrit $z = x + y$ avec

$$x \in \mathrm{Im}(u - \mathrm{Id}) \text{ et } y \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}).$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) $B_f(x, r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte.
L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f\big(B_f(x, r)\big)$ est aussi compacte.

(b) La partie K est convexe et donc $f(K)$ aussi car f est linéaire. Les vecteurs $f^k(a)$ étant tous éléments de K, la combinaison convexe définissant y_n détermine un élément de K.
Après simplification
$$f(y_n) - y_n = \frac{1}{n}\big(f^n(a) - a\big).$$
La partie K étant bornée, la suite $\big(f^n(a) - a\big)_{n\geq 1}$ l'est aussi et donc $f(y_n) - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0_E$.
Enfin, la suite $(y_n)_{n\geq 1}$ évolue dans le compact K, elle admet donc une valeur d'adhérence $w \in K$:
$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} w$$
et la propriété
$$f(y_{\varphi(k)}) - y_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0_E$$
donne à la limite $f(w) = w$.

(c) $0_E \notin K$ et donc $w \neq 0_E$. L'égalité $f(w) = w$ assure que 1 est valeur propre de f.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé avec $\|v\| < r$.
Le vecteur $x + v$ est élément de K et donc ses itérés $f^n(x+v) = f^n(x) + \lambda^n v$ le sont encore. Puisque le compact K est borné, les suites $\big(f^n(x+v)\big)$ et $\big(f^n(x)\big)$ le sont aussi et donc $\big(\lambda^n v\big)$ l'est encore. On en déduit $|\lambda| \leq 1$.

(d) Choisissons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement représenté par
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et cependant, en choisissant $x = (1,0,0)$ et $r = 1/2$, la condition $f(K) \subset K$ est remplie.

(e) Puisque $f(K) = K$, les vecteurs e_1/a, e_2/b et e_3/c sont des valeurs prises par f. On en déduit que l'endomorphisme f est nécessairement bijectif.
Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé. Quitte à réduire la norme de v, on peut supposer $v \in K$. On a alors $f^n(v) = \lambda^n.v \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui oblige $|\lambda| \leq 1$.
Sachant $f^{-1}(K) = K$, un raisonnement symétrique donne $|\lambda| \geq 1$ et donc $|\lambda| = 1$.
Enfin, en dimension impaire, un endomorphisme réel admet nécessairement une valeur propre !

Exercice 35 : [énoncé]

(a)
```
import numpy as np
import numpy.linalg

def eigmax(A):
    eig = numpy.linalg.eigvals(A)
    maxi = eig[0]
    for e in eig:
        if abs(e) > abs(maxi): maxi = e
    return maxi
```

(b)
```
import random as rnd

def generematrice(n):
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i,j] = 1 + rnd.random()
    return A

for t in range(10):
    print(eigmax(generematrice(3)))
```

(c) Soit $\lambda \in S$. Il existe x non nul à coefficients positifs tel que $\lambda x \leq Ax$. En divisant x par la somme de ses coefficients (qui est un réel strictement positif), on détermine un nouveau vecteur comme voulu.

(d) Soit λ une valeur propre complexe et $z = (z_1, \dots, z_n)$ le vecteur propre associé. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$,
$$\lambda z_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$$
et donc
$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} |z_j|.$$
Le vecteur $x = (|z_1|, \dots, |z_n|)$, est un vecteur réel non nul vérifiant $0 \leq x$ et $|\lambda| x \leq Ax$. On en déduit $|\lambda| \in S$.

(e) Soit $\lambda \in S$ et $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $0 \leq x$ et $\lambda x \leq Ax$. Considérons i l'indice tel que x_i soit maximal parmi $x_1, \dots, x_n$. On a
$$\lambda x_i \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i.$$

En simplifiant par x_i (qui est strictement positif car $0 \leq x$ et x non nul), il vient

$$\lambda \leq \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

On en déduit que la partie S est majorée par le réel

$$M = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}.$$

(f) La partie S est bornée dans un espace de dimension finie, il suffit d'établir qu'elle est fermée pour pouvoir affirmer qu'elle est compacte.

Soit (λ_p) une suite d'éléments de S de limite λ_∞. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut introduire $x_p \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs de somme égale à 1 et vérifiant $\lambda_p x_p \leq A x_p$. La suite (x_p) évolue dans le compact

$$K = \Bigl\{x \in \mathbb{R}^n \Bigm| 0 \leq x \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\Bigr\}.$$

Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(q)})$ de limite $x_\infty \in K$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\varphi(q)} x_{\varphi(q)} \leq A x_{\varphi(q)}$ ce qui donne à la limite $\lambda_\infty x_\infty \leq A x_\infty$. On peut donc affirmer que λ_∞ est élément de S. La partie S contient les limites de ses suites convergentes, elle est donc fermée et finalement compacte.

(g) La compacité de S permet d'introduire son élément maximal α. Soit aussi $x \in K$ tel que $\alpha x \leq Ax$. Si $\alpha x \neq Ax$, le vecteur $y = Ax - \alpha x$ est à coefficients positifs et n'est pas nul. La matrice A étant à coefficients strictement positifs, Ay est à coefficients strictement positifs. Considérons ensuite $z = Ax$. Le vecteur z est à coefficients strictement positifs car les coefficients de A sont strictement positifs et les coefficients de x sont positifs et non tous nuls. Quitte à considérer $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut écrire $\varepsilon z \leq Ay$. Cette comparaison se réorganise pour permettre d'écrire

$$(\alpha + \varepsilon) z = Az$$

ce qui contredit la définition de α. On en déduit $\alpha x = Ax$ et, comme souligné au-dessus, $z = Ax$ est un vecteur à coefficients strictement positifs ce qui entraine $\alpha > 0$ et x à coefficients strictement positifs.

Exercice 36 : [énoncé]

(a) R est la borne supérieure dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ de l'ensemble

$$\Bigl\{r \in [0\,;+\infty[\Bigm| \bigl(a_n r^n\bigr)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\Bigr\}.$$

Soit $0 < r < R$. On peut introduire ρ tel que $r < \rho$ et $\bigl(a_n \rho^n\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite bornée. Pour tout $z \in D(0, r)$, on a

$$\bigl|a_n z^n\bigr| \leq \bigl|a_n r^n\bigr| = |a_n|\rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n = \mathrm{O}\left(\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\right).$$

Ce majorant uniforme étant sommable (car $|r/\rho| < 1$), on obtient la convergence normale voulue.

(b) Pour $|z| < r$, on peut décomposer en série géométrique

$$\frac{1}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r^{n+1}} z^n.$$

Sachant la fonction f bornée sur le compact $\bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| |z| = r\bigr\}$, il y a convergence de la série

$$\sum \int_0^{2\pi} \left|\frac{\mathrm{Im}\bigl(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{r^{n+1}} z^n\right| \mathrm{d}\theta$$

ce qui permet une intégration terme à terme

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{Im}\bigl(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}} \,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\bigl(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta\right) \frac{z^n}{r^{n+1}}.$$

On obtient ainsi un développement en série entière sur $D(0, r)$.
Pour l'expliciter, on calcule le terme intégral en procédant à une intégration terme à terme justifiée par l'absolue convergence de $\sum a_n r^n$

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{Im}\bigl(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} I_k r^k$$

avec

$$I_k = \mathrm{Re}(a_k) \int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta + \mathrm{Im}(a_k) \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \,\mathrm{d}\theta.$$

Pour $n \neq k$, les deux intégrales sonts nulles.

Pour $n = k = 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{d}\theta = 0 \text{ et } \int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Pour $n = k \neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} \sin(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\int_0^{2\pi} \sin^2(k\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{i}\pi \text{ et}$$
$$\int_0^{2\pi} \cos(k\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\mathrm{d}\theta = \pi.$$

On peut alors conclure

$$\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{Im}\big(f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\big)}{r - z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2\pi \operatorname{Im}(a_0)}{r} + \pi\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big(\operatorname{Im}(a_n) - \mathrm{i}\operatorname{Re}(a_n)\big)z^n}{r}$$
$$= \frac{\mathrm{i}\pi}{r}\Big(\overline{f(0)} - f(z)\Big).$$

(c) Si f est une telle fonction, l'intégrale au-dessus est nulle et donc

$$f(z) = \overline{f(0)} \text{ pour tout } |z| < r.$$

On en déduit $a_0 \in \mathbb{R}$ et $a_n = 0$ pour $n \geq 1$. La fonction f est alors constante réelle.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) *Cas:* $n = 0$. Un polynôme P de A_0 est à coefficients positifs et prend la valeur 0 en 2, c'est n'est nécessairement le polynôme nul.
Cas: $n \geq 1$. Soit $P \in A_n$. Celui-ci n'est pas nul, notons N son dégré et écrivons

$$P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N \quad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_N \in \mathbb{N} \text{ et } a_N \neq 0.$$

La condition $P(2) = n$ entraîne

$$n \geq a_N2^N \geq 2^N.$$

On en déduit que le degré de P est majoré par $\log_2 N$. De plus, en étant large, on peut affirmer que les coefficients de P sont au plus compris entre 0 et n. Il n'y a donc qu'un nombre fini de polynômes solutions.
$A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{1\}$ et $A_2 = \{2, 1 + X\}$ donc $u_0 = u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'application $P \mapsto 1 + P$ transforme un polynôme de A_{2n} en un polynôme de A_{2n+1}. Inversement, un polynôme Q de A_{2n+1} a nécessairement un coefficient constant impair ce qui permet d'introduire $P = Q - 1$ qui est élément de A_{2n}. On en déduit $u_{2n} = u_{2n+1}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $P \mapsto XP$ transforme un polynôme de A_n en un polynôme de A_{2n} dont le coefficient constant est nul et inversement, tout polynôme de A_{2n} de coefficient constant nul est de cette forme. De plus, comme au-dessus, on peut mettre en correspondance les polynômes de A_{2n} de coefficient constant non nul avec les polynômes de A_{2n-1}. On en déduit $u_{2n} = u_n + u_{2n-1}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui précède donne

$$u_{2n} = u_{2n-2} + u_n \quad \text{donc} \quad u_{2n} - u_{2(n-1)} = u_n.$$

En sommant cette relation, on obtient par télescopage la relation demandée.

(d)
```
def liste(n):
    if n == 0:
        L = [1]
    elif n % 2 == 1:
        L = liste(n-1)
        last = L[-1]
        L.append(last)
    else:
        L = liste(n-1)
        S = 0
        for k in range(n//2 + 1):
            S = S + L[k]
        L.append(S)
    return L
```

(e) On peut conjecturer un rayon de convergence R égal à 1.
La suite (u_n) étant croissante, elle n'est pas de limite nulle et donc $R \leq 1$
Soit $\rho > 1$. Montrons $u_n \leq M\rho^n$ pour M bien choisi.
On raisonne par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ après une initialisation sur les rangs 0 à n_0 avec n_0 qui sera précisé par la suite.
La propriété est vraie aux rangs $0, \ldots, n_0$ en choisissant M suffisamment grand :

$$M = \max\left\{\frac{u_k}{\rho^k} \;\middle|\; k \in [\![0\,;n_0]\!]\right\}.$$

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n \geq n_0$.
Cas: $n + 1$ impair. La propriété est immédiate car $u_n = u_{n-1}$ et $\rho > 1$.

Cas: $n+1$ pair. On écrit $n=2p$. L'hypothèse de récurrence donne

$$u_{2p} \leq \sum_{k=0}^{p} M\rho^k = M\frac{\rho^{p+1}-1}{\rho-1} \leq M\frac{\rho^{p+1}}{\rho-1} \leq M\rho^{2p}$$

sous réserve que $\rho^{p-1}(\rho-1)\geq 1$ ce qu'il est possible d'obtenir pour p assez grand ce qui determine la valeur de $n_0\in\mathbb{N}$: on choisit celle-ci de sorte que

$$\rho^{n_0/2-1}(\rho-1)\geq 1.$$

La récurrence est établie.

Cette comparaison assure que le rayon de convergence R est supérieur à $1/\rho$ et, puisque ceci vaut pour tout $\rho>1$, on conclut $R=1$.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) Considérons un ensemble E à $n+1$ éléments. Parmi ceux-ci, choisissons un élément particulier que nous nommons x. Dans une partition de E, il existe une seule partie A contenant l'élément x et celle-ci est de cardinal $k+1$ pour une certaine valeur de $k\in[\![0\,;n]\!]$.

Pour $k\in[\![0\,;n]\!]$, on construit une partition de E dont la partie contenant x est à $k+1$ éléments en commençant par choisir k éléments dans $E\setminus\{x\}$ pour constituer A : cela offre $\binom{n}{k}$ possibilités. On complète ensuite la partie A à l'aide d'une partition de $E\setminus A$ afin de constituer une partition de E : cela offre B_{n-k} possibilités. Ainsi, il y a exactement $\binom{n}{k}B_{n-k}$ partitions de E dont la partie contenant x est de cardinal $k+1$ et, finalement,

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}.$$

En renversant l'indexation puis en exploitant la symétrie des coefficients binomiaux on obtient

$$B_{n+1}=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{n-j}B_j=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j.$$

(b)
```
def fact(n):
    if n == 0:
        return 1
    return n * fact(n-1)

def binom(n,k): # Certes on peut faire mieux
    return fact(n)//fact(k)//fact(n-k)

def Bell(n):
    B = [1]
    for i in range(n):
        S = 0
        for k in range(i+1):
            S = S + binom(i,k)*B[k]
        B.append(S)
    return B
```

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140	21147

(c) Par récurrence forte sur $n\in\mathbb{N}$, vérifions $B_n\leq n!$

La propriété est vraie aux rangs 0, 1 et 2.

Supposons la propriété vraie jusqu'au rang $n\geq 2$. On a

$$B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k\leq n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(n-k)!}=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\leq \mathrm{e}\cdot n!\leq (n+1)!$$

car $n+1\geq \mathrm{e}$.

La récurrence est établie.

La suite $(B_n/n!)$ est bornée et le rayon de convergence de $\sum \frac{B_n}{n!}x^n$ est au moins égal à 1.

(d) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence $R>0$, on sait que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et, pour tout $x\in\left]-R\,;R\right[$,

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{B_{n+1}}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!\,(n-k)!}x^n.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$f'(x)=\mathrm{e}^x f(x).$$

La résolution de cette équation différentielle linéaire sachant $f(0)=1$ donne

$$f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x-1}.$$

On peut alors exprimer B_n en déterminant le coefficient de x^n dans cette série entière. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!}\left(\mathrm{e}^x - 1\right)^p \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \mathrm{e}^{kx} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^{p-k} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!}. \end{aligned}$$

Le coefficient de x^n détermine $B_n/n!$ et donc

$$B_n = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k}\frac{k^n}{p!}.$$

En réorganisant le calcul de cette somme (la famille est sommable)

$$B_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{p=k}^{+\infty} (-1)^{p-k} \frac{k^n}{k!\,(p-k)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!}.$$

C'est la formule de Dobinski.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} x^k \right)^p$$

auquel cas, on obtient

$$B_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!} \sum_{k_1+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\dots k_p!}.$$

Dans cette formule, le terme

$$\sum_{k_1+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!\dots k_p!}$$

(où les k_j sont strictement positifs) se comprend comme le nombre d'applications surjectives d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à p éléments : ceci permet de comprendre le dénombrement réalisé ici. Au surplus, lorsque l'on connaît le nombre de ces surjections, on obtient

$$B_n = \sum_{p=1}^{n}\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k}\frac{k^n}{p!}.$$

Ce n'est pas exactement la même formule qu'au-dessus mais on peut établir

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k}\binom{p}{k}\frac{k^n}{p!} = 0$$

pour tout $p > n$.

Exercice 39 : [énoncé]
Pour $x \in [0\,;R[$, la série $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est une série à termes positifs. Par la formule de Taylor reste intégrale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

et puisque le reste intégrale est positif, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k \le f(x).$$

Puisque ses sommes partielles sont majorées, la série à termes positifs $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est convergente.
Pour $x \in \left]-R\,;0\right]$, on a

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}|x|^n$$

et la série $\sum \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)x^n$ est absolument convergente donc convergente.

Exercice 40 : [énoncé]

(a)
$$N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p).$$

(b) $D(n) \le n!$ donc $\left|\frac{D(n)}{n!}\right| \le 1$ qui implique $R \ge 1$.
On a $\sum_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$ donc $\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} D(n-p) = 1$ d'où par produit de Cauchy $\mathrm{e}^x f(x) = \frac{1}{1-x}$ puis

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}.$$

(c)
$$\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}x^n$$
donc
$$D_n=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$
puis
$$N(n,p)=\frac{n!}{p!}\sum_{k=0}^{n-p}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

(d) Finalement
$$\frac{1}{n!}N(n,p)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{p!\mathrm{e}}.$$

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Pour $a_n=(-1)^n$, on a $f(x)=1/(1+x)$, $\ell=1/2$ et la série $\sum a_n$ diverge.

(b) Pour $N\in\mathbb{N}$ et $x\in[0\,;1[$, on peut écrire
$$\sum_{n=0}^{N}a_n-\ell=A_N+B_N-C_N$$
avec
$$A_N=f(x)-\ell,B_N=\sum_{n=0}^{N}a_n-\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\text{ et }C_N=\sum_{n=N+1}^{+\infty}a_nx^n.$$
Pour $\varepsilon>0$, il existe un rang n_0 au-delà duquel
$$|a_n|\leq\frac{\varepsilon}{n}$$
et alors pour tout $N\geq n_0$
$$|C_N|\leq\frac{\varepsilon}{N}\sum_{n=N+1}^{+\infty}x^n\leq\frac{\varepsilon}{N(1-x)}.$$
Posons alors
$$x=1-\frac{1}{N}$$
et on a
$$|C_N|\leq\varepsilon.$$
D'autre part
$$|B_N|=\left|\sum_{n=0}^{N}a_n(1-x^n)\right|\leq(1-x)\sum_{n=0}^{N}na_n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}na_n.$$
En vertu du théorème de Cesaro
$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N}na_n\to0$$
et donc il existe $n_1\in\mathbb{N}$ tel que pour $N\geq n_1$
$$|B_N|\leq\varepsilon.$$
Enfin, puis f tend vers ℓ en 1^-, il existe $n_2\in\mathbb{N}$ tel que pour $N\geq n_2$
$$A_N=\left|f(1-1/N)-\ell\right|\leq\varepsilon.$$
Finalement, pour $N\geq\max(n_0,n_1,n_2)$
$$\left|\sum_{n=0}^{N}a_n-\ell\right|\leq3\varepsilon.$$
On peut donc affirmer que la série $\sum a_n$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=\ell.$$

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Notons a_n le coefficient générale de la série entière étudiée $a_m=1$ s'il existe n tel que $m=p_n$ et $a_m=0$ sinon. On observe$a_n=\mathrm{O}(1)$ donc $R\geq1$ et $a_n\not\to0$ donc $R\leq1$ puis $R=1$.
Soit $\varepsilon>0$, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour $n\geq N$, $n\leq\varepsilon p_n$. On a alors :
$$0\leq(1-x)f(x)\leq(1-x)\sum_{n=0}^{N-1}x^{p_n}+(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty}x^{n/\varepsilon}.$$

Quand $x \to 1^-$,

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N-1} x^{p_n} \to 0$$

et

$$(1-x)\sum_{n=N}^{+\infty} x^{n/\varepsilon} \le \frac{1-x}{1-x^{1/\varepsilon}} \to \varepsilon$$

donc pour x suffisamment proche de 1,

$$0 \le (1-x)f(x) \le 2\varepsilon.$$

Cela permet d'affirmer $(1-x)f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$.

(b) Ici, il faut penser à une comparaison série-intégrale...
Pour $x \in]0\,;1[$, la fonction $t \mapsto x^{t^q}$ est décroissante. Par la démarche classique, on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t \le f(x) \le 1 + \int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{t^q \ln x}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-a^q t^q}\,\mathrm{d}t$$

avec $a = \sqrt[q]{-\ln x}$ donc

$$\int_0^{+\infty} x^{t^q}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

et on ne calculera pas cette dernière intégrale.
Par l'encadrement qui précède, on peut affirmer

$$f(x) \sim \frac{1}{\sqrt[q]{1-x}}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^q}\,\mathrm{d}u$$

sachant $\ln x \sim x-1$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) $R = 1$.

(b) $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$, $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$.
On obtient les expressions de $f_2, \dots, f_5$ par

```
seq(normal(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)), k=2..5);
```

On peut présumer un équivalent de la forme $\frac{C_\alpha}{(1-x)^{1+\alpha}}$.
On peut obtenir les premières valeurs de C_α par

```
seq(eval(simplify(sum(n^k*x^n, n=1..infinity)*(1-x)^(k+1)),
x=1), k=0..5);
```

Cela laisse présumer $C_\alpha = (-1)^{\alpha+1}\alpha!$.
Pour $x \in]-1\,;1[$, $f_p'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{p+1}x^{n-1}$ donc $xf_p'(x) = f_{p+1}(x)$.
En raisonnant par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, on définit la suite (Q_p) de polynômes de sorte que
$Q_0 = X$ et $Q_{p+1}(X) = X(1-X)Q_p'(X) + (p+1)XQ_p(X)$.
On observe $Q_{p+1}(1) = (p+1)Q_p(1)$ de sorte que $Q_p(1) = p!$.
On peut alors affirmer $f_p(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{p!}{(1-x)^{1+p}}$.

(c) À partir du développement connu de$(1+u)^\alpha$, on obtient
$b_n = \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)}{n!}$.
$\ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n} = \alpha \ln \frac{n+1}{n} - \ln \frac{b_{n+1}}{b_n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la série
$\sum \ln \frac{(n+1)^\alpha}{b_{n+1}} - \ln \frac{n^\alpha}{b_n}$ est absolument convergente.
On en déduit que la suite de terme général $\ln \frac{n^\alpha}{b_n}$ converge puis que $\frac{n^\alpha}{b_n}$ tend vers une constante $A(\alpha) > 0$.
On peut alors conclure en exploitant le résultat suivant :
$a_n \sim b_n$ avec $a_n > 0$, $R = 1$ et $\sum a_n$ diverge entraine
$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.
Pour établir ce résultat :
- d'une part, on montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$,
- d'autre part, on écrit
$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right| \le \sum_{n=0}^{N} |a_n - b_n| + \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en choisissant N de sorte que $|a_n - b_n| \le \varepsilon a_n$ pour $n \ge N$.
On peut alors conclure que $f_\alpha(x) \sim \frac{A(\alpha)}{(1-x)^{1+\alpha}}$.

Exercice 44 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{sh} x}.$$

La fonction f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty\,;R[$ avec $R = \operatorname{argsh} 1$.

Soit $x \in]-R\,;R[$. Puisque $|\operatorname{sh} x| < 1$, on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{1-\operatorname{sh} x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sh}^n x.$$

Chacune des fonctions $x \mapsto \operatorname{sh}^n x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ ce qui permet d'écrire

$$\operatorname{sh}^n x = \sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k.$$

Puisque les coefficients du développement en série entière de la fonction sh sont tous positifs, on a aussi $a_{n,k} \geq 0$ pour tout n,k. Pour $x \in]-R\,;R[$, on peut donc écrire

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_{n,k} x^k \right).$$

Puisque la série $\sum_{k \geq n} \left| a_{n,k} x^k \right| = \sum_{k \geq n} a_{n,k} |x|^k$ converge et puisque la série $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=n}^{+\infty} \left| a_{n,k} x^k \right| = \sum_{n \geq 0} \left(\operatorname{sh}|x|\right)^n$ converge aussi, on peut par le théorème de Fubini échanger les deux sommes ce qui donne

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} a_{n,k} \right) x^k.$$

Ainsi la fonction f est développable en série entière sur $]-R\,;R[$. Le rayon de convergence de la série entière ainsi introduite est alors au moins égale à R et en fait exactement égal à R car f diverge vers $+\infty$ en R^- et ne peut donc être prolongée par continuité en R.

Exercice 45 : [énoncé]

On a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \underset{u=1/t}{=} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+(ux)^2} = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u^{2n} x^{2n} \,\mathrm{d}u.$$

Pour $|x| < 1$, il y a convergence normale sur $[0\,;1]$ donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} = \frac{\arctan x}{x}.$$

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t \mapsto 1$, on obtient $a_n \to 0$.

(b) On a

$$a_n + a_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

(c) Par monotonie $a_n + a_{n+2} \leq 2a_n \leq a_n + a_{n-2}$. On en déduit $a_n \sim \frac{1}{2n}$ puis $u_n(x) \sim \frac{x^n}{2n^{\alpha+1}}$.
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est donc égale à 1.
Pour $x = 1$, $\sum u_n(x)$ converge si, et seulement si,$\alpha > 0$.
Pour $x = -1$, $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement si $\alpha \leq -1$.
Pour $\alpha > -1$, $2\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha} a_k = \alpha + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k^\alpha}(a_k + a_{k+2}) + \mathrm{o}(1)$
Or $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha(n+1)}$ converge par application de critère spécial des séries alternées (car $n \mapsto \frac{1}{n^\alpha(n+1)}$ décroît vers 0 pour n assez grand) donc $\sum u_n(x)$ converge.

(d) Puisque $a_n + a_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^n + a_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{x}.$$

On en déduit

$$f(x) + \frac{f(x) - \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}x}{x^2} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

puis

$$f(x) = \frac{-x\ln(1-x) + \frac{\pi}{4} + x\frac{\ln 2}{2}}{x^2+1}.$$

Exercice 47 : [énoncé]

(a) On a

$$|a_n| = \frac{1}{n!}\int_0^1 t \prod_{k=1}^{n-1}(k-t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 \prod_{k=1}^{n-1} k \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{n}$$

donc $R \geq 1$.

$$|a_n| \geq \frac{1}{n!}\int_0^1 t(1-t) \times \prod_{k=2}^{n-1}(k-1)\,\mathrm{d}t \geq \frac{1}{4n(n-1)}$$

donc $R \leq 1$. Finalement $R = 1$.

(b) Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\,\mathrm{d}t$$

or par convergence uniforme de la suite de fonctions de la variable t sur $[0\,;1]$ (convergence uniforme obtenue par convergence normale grâce à $|x|<1$) on peut permuter somme et intégrale.

$$S(x)=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}(t-k)x^n\,\mathrm{d}t=\int_0^1(1+x)^t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{(1+x)^t}{\ln(1+x)}\right]_{t=0}^{t=1}=\frac{x}{\ln(1+x)}.$$

Exercice 48 : [énoncé]

(a) Par application de la règles de d'Alembert, les rayons de convergence de séries entières définissant f et g sont égaux à 1.

(b) g est assurément définie et continue sur $\left]-1\,;1\right[$ en tant que somme de série entière.
La série entière définissant g converge aussi sur $[-1\,;0]$ par application du critère spécial et

$$\forall x\in[-1\,;0]\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{1}{k}\right)x^k\right|\leq-\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

Il y a donc convergence uniforme de la série de fonctions continues définissant g sur $[-1\,;0]$.
Ainsi g est définie et continue sur $\left[-1\,;1\right[$.
On peut aussi souligner que g n'est pas définie en 1 car

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)1^n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n}.$$

(c) Pour $x\in\left]-1\,;1\right[$,

$$(1-x)f(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln n-\ln(n-1)\big)x^n=-g(x).$$

(d) La fonction f est continue sur $\left]-1\,;1\right[$ en tant que somme de série entière de rayon de convergence 1. On peut prolonger f par continuité en -1 via

$$f(x)=-\frac{g(x)}{1-x}\xrightarrow[x\to-1]{}-\frac{g(-1)}{2}.$$

(e) On a

$$\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)=-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc pour $x\in\left]-1\,;1\right[$

$$g(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}-\frac{1}{n}x^n-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n$$

et donc

$$g(x)=\ln(1-x)+1-\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)x^n.$$

Le terme sommatoire définit une fonction continue sur $[-1\,;1]$ (par convergence normale) et donc

$$g(x)\underset{x\to1^-}{\sim}\ln(1-x)$$

puis

$$f(x)\underset{x\to1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 49 : [énoncé]

(a) Posons

$$a_n=\sin\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Puisque $a_{n+1}/a_n\to1$, on peut affirmer $R=1$.

(b) La suite (a_n) décroît vers 0 donc par le critère spécial des séries alternée, la série entière converge en $x=-1$.
Puisque $a_n\sim1/\sqrt{n}$, par équivalence de séries à termes positifs, la série entière diverge en $x=1$.

(c) Par positivité des termes sommés, on a pour $x\in[0\,;1]$,

$$f(x)\geq\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n.$$

Or

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\xrightarrow[x\to1^-]{}\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Puisque

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\xrightarrow[N\to+\infty]{}+\infty.$$

Pour tout $M\in\mathbb{R}$, il existe un rang N tel que

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\geq M+1$$

et pour x au voisinage de 1^-

$$\sum_{n=1}^{N}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n\geq M$$

puis

$$f(x)\geq M.$$

On peut donc affirmer que

$$f(x)\xrightarrow[x\to1^-]{}+\infty.$$

(d) On a

$$(1-x)f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1}$$

et par décalage d'indice

$$(1-x)f(x)=\sin(1)x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right)x^n.$$

Puisque

$$\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

la série entière en second membre est définie et continue en 1 par convergence normale de la série de fonctions associée. On en déduit

$$(1-x)f(x)\xrightarrow[x\to1]{}\sin(1)+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right)=0.$$

Il est aussi possible de procéder par les en ε exploitant

$$\left|\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|\leq\varepsilon\text{ pour }n\text{ assez grand}$$

et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Soit $r\in\,]0\,;R[$. La série numérique $\sum a_nr^n$ est absolument convergente. Pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\frac{a_n}{n!}z^n=a_nr^n\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n=\mathrm{o}\big(a_nr^n\big)$$

car par croissance comparée

$$\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{r}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$

Par comparaison de séries absolument convergentes, on peut affirmer que la série numérique $\sum a_nz^n$ est absolument convergente pour tout $z\in\mathbb{C}$.
Le rayon de convergence de la série entière étudiée est $+\infty$.

(b) On a

$$f(t)\mathrm{e}^{-xt}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n!}t^n\mathrm{e}^{-xt}=\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(t)\text{ avec }f_n(t)=\frac{a_n}{n!}t^n\mathrm{e}^{-xt}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n et la fonction $t\mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ sont continues par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.
Les fonctions f_n sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$ car $t^2f_n(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$ et

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t=\frac{|a_n|}{n!}\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties généralisées successives

$$\int_0^{+\infty}t^n\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\frac{n!}{x^{n+1}}$$

et donc

$$\int_0^{+\infty}\left|f_n(t)\right|\mathrm{d}t=\frac{|a_n|}{x^{n+1}}.$$

Si $x>1/R$ alors la série $\sum|a_n|/x^{n+1}$ est convergente et, par le théorème de Fubini, on peut affirmer que la fonction $t\mapsto f(t)\mathrm{e}^{-xt}$ est intégrable et

$$\int_0^{+\infty}f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{x^{n+1}}.$$

Exercice 51 : [énoncé]

(a) s est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
La série diverge en $x = 1$ (par série de Riemann avec $1/2 \le 1$) et converge en $x = -1$ par application du critère spécial des séries alternées. On conclut $I = [-1\,;1[$.

(b) Puisque s est la somme d'une série entière, on peut dériver terme à terme sur $]-1\,;1[$ et

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n.$$

Sur $I \cap \mathbb{R}_+$, cette somme est positive. La fonction s est donc croissante sur $[0\,;1[$.
Si celle-ci était majorée par un réel M, nous aurions pour tout $N \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in [0\,;1[, \sum_{n=1}^{N} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \le \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} \le M.$$

En passant à la limite quand $x \to 1^-$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \le M.$$

Ceci est absurde car la série à termes positifs $\sum 1/\sqrt{n}$ diverge et ne peut donc avoir ses sommes partielles majorées. La fonction s est donc croissante et non majorée, elle diverge donc vers $+\infty$ en 1^-.

(c) Pour $x \in]-1\,;1[$

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n+1} x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \bigl(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\bigr) x^n.$$

Pour $x \le 0$, on peut écrire $x = -t$ avec $t \ge 0$ et alors

$$(1-x)s'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n t^n$$

avec $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \ge 0$. On vérifie que la suite (a_n) est décroissante de limite nulle et donc le critère spécial s'applique à la série alternée $\sum (-1)^n a_n t^n$. Sa somme est donc du signe de son premier terme ce qui fournit $(1-x)s'(x) \ge 0$. On en déduit

$$\forall x \in]-1\,;0], s'(x) \ge 0.$$

(d) Après étude (un peu lourde) du signe de $f''(x)$, on peut affirmer que f est concave et croissante.
Pour $x \in [0\,;1[$, on a clairement $s''(x) \ge 0$. Pour $x \in]-1\,;0]$, considérons

$$\bigl((1-x)s'(x)\bigr)' = \sum_{n=1}^{+\infty} f(n) x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n+1) x^n$$

puis

$$(1-x)\bigl((1-x)s'(x)\bigr)' = \sum_{n=0}^{+\infty} \bigl(f(n+1) - f(n)\bigr) x^n.$$

Posons $b_n = f(n+1) - f(n) \ge 0$.
On vérifie $b_n \to 0$ et $b_{n+1} \le b_n$ car la concavité de f fournit

$$\frac{b_n + b_{n+2}}{2} \le b_{n+1}.$$

Le critère spécial de série alternée s'applique à nouveau, la somme est du signe de son premier terme et cela fournit

$$(1-x)\bigl((1-x)s'(x)\bigr)' \ge 0$$

puis $s''(x) \ge 0$ car on sait $s'(x) \ge 0$.
Finalement s est convexe.

Exercice 52 : [énoncé]

(a) Puisque

$$\left|1 - \frac{z}{2^k}\right| \le 1 + \frac{|z|}{2^k}$$

l'inégalité $\bigl|P_n(z)\bigr| \le P_n(-|z|)$ est immédiate.
Par produit à facteurs strictement positifs, on a $P_n(-|z|) > 0$ et on peut donc introduire

$$\ln P_n(-|z|) = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^k}\right).$$

Or

$$\ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{|z|}{2^n}$$

et ce terme est donc sommable. On peut alors écrire

$$\ln P_n(-|z|) \le M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{|z|}{2^n}\right)$$

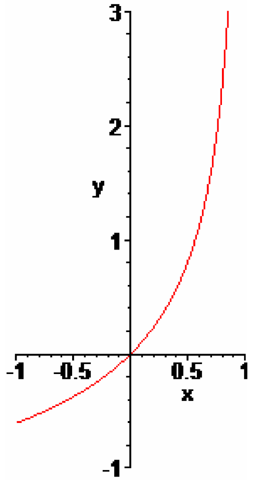

FIGURE 1 – Allure de la fonction s

puis
$$\left|P_n(z)\right| \leq \mathrm{e}^M.$$

(b) On a
$$\left|P_{n+1}(z) - P_n(z)\right| \leq \left|P_n(z)\right| \frac{|z|}{2^{n+1}} \leq \mathrm{e}^M \frac{|z|}{2^{n+1}}.$$

Le majorant est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ est donc convergente et la suite $(P_n(z))$ est de même nature.

(c) Pour $|z| \leq 1$, on a
$$\left|P_{n+1}(z) - P_n(z)\right| \leq \frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}} \text{ avec } M = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

et donc
$$\sup_{|z|\leq 1} \left|P_{n+1}(z) - P_n(z)\right| \leq \frac{\mathrm{e}^M}{2^{n+1}}.$$

Ce terme est sommable, la série télescopique $\sum P_{n+1}(z) - P_n(z)$ converge donc normalement, et donc uniformément, sur le domaine défini par la condition $|z| \leq 1$. On en déduit que la suite de fonctions $\left(P_n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur ce même domaine. Or chaque fonction P_n est continue en 0 et donc sa limite simple f est continue en 0.

(d) La fonction f vérifie évidemment les conditions énoncées.
Inversement, si une fonction g vérifie les conditions proposées alors
$$g(z) = (1 - z)g(z/2) = (1 - z)(1 - z/2)g(z/4) = \dots$$

Par récurrence
$$g(z) = P_n(z)g(z/2^{n+1}).$$

Par continuité de g en 0, un passage à la limite donne $g(z) = f(z)$.

(e) Par analyse-synthèse, la recherche d'une fonction somme de série entière $\sum a_n z^n$ solution conduit à
$$a_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - 2^k}$$

et un rayon de convergence infini.

Exercice 53 : [énoncé]
Soulignons que les termes sommés pour définir la série entière ont un sens car l'irrationalité de α donne
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sin(n\pi\alpha) \neq 0.$$

(a) Puisque
$$\frac{1}{|\sin(n\pi\alpha)|} \geq 1$$

la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge grossièrement en 1 et donc $R_\alpha \leq 1$.

(b) Par une récurrence facile, on montre $u_n \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n^{u_n - 1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

(c) On a
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_{k+1}} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_k}$$

et puisque la suite (u_n) est croissante
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{1}{u_{n+1}} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k} \frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{K}{u_{n+1}}$$

avec
$$K = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^k}.$$

On en déduit
$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \le \frac{K\pi u_n}{u_{n+1}} = \frac{K\pi}{u_n^{u_n - 1}}.$$

(d) Considérons $m = u_n \in \mathbb{N}^*$. Quand $n \to +\infty$, on a pour $x > 0$
$$\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \to -\infty.$$

En effet
$$m\alpha = u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}.$$

Or
$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_n}{u_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{k+1}}{u_k} \in 1 + 2\mathbb{N}$$

et donc
$$-\sin(m\pi\alpha) = \sin\left(\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}\right)$$

d'où
$$0 \le -\sin(m\pi\alpha) \le \frac{C}{u_n^{u_n - 1}}$$

puis
$$-\frac{x^m}{\sin(m\pi\alpha)} \ge C \frac{(xu_n)^{u_n}}{u_n} \to +\infty.$$

On en déduit que $\sum_{n\ge 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$ diverge pour tout $x > 0$ et donc $R_\alpha = 0$.

(e) Par l'absurde, supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$. Il existe alors un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q\alpha \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $qu_n\alpha \in \mathbb{N}$ or
$$qu_n\alpha = qu_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} + qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k}$$

avec comme vu ci-dessus
$$u_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}.$$

On en déduit
$$qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \in \mathbb{N}.$$

Or
$$0 < qu_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} < \frac{qKu_n}{u_{n+1}} \to 0.$$

C'est absurde.

Exercice 54 : [énoncé]

(a) Une fonction dérivable sur un intervalle y est strictement croissante si, et seulement si, sa dérivée est positive et n'est nulle sur aucun sous-intervalle non réduit à un point (l'ensemble des zéros est d'intérieur vide).

(b) L'application $F\colon x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est une bijection continue strictement croissante de $[a\,;b]$ vers $[0\,;L]$ avec L l'intégrale de f sur $[a\,;b]$. Les x_i sont alors déterminés par
$$x_i = F^{-1}\left(\frac{iL}{n}\right).$$

(c) On peut écrire
$$\frac{L}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i) = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x_i) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrons par application du théorème de convergence dominée
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On écrit
$$\sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)\,\mathrm{d}x = \int_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x$$

avec
$$h_n(x) = g(x_i)f(x) \text{ pour } x \in [x_{i-1}\,;x_i[\ (x_i \text{ est fonction de } n).$$

Les fonctions g et h étant continues sur un segment, on peut les borner et il est facile d'acquérir l'hypothèse de domination. Le plus difficile est d'obtenir la convergence simple...

Soit $x \in [a\,;b]$.

Si $f(x)=0$ alors $h_n(x)=0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.
Si $f(x)\neq 0$ alors, il existe $m>0$ et $\alpha>0$ tels que

$$\forall y\in[a\,;b],\ |y-x|\leq\alpha \implies f(y)\geq m.$$

Pour l'indice i tel que $x\in[x_{i-1}\,;x_i[$, on a (selon que l'intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$ est de longueur supérieure ou inférieure à α)

$$\frac{1}{n}L=\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(t)\,\mathrm{d}t\geq m\min(x_i-x_{i-1},\alpha).$$

On en déduit $x_i-x_{i-1}\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis $x_i\xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, et, par continuité de g, $h_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x)$.
Par application du théorème de convergence dominée, on peut conclure

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Exercice 55 : [énoncé]
Sans perte de généralités, on suppose $a\leq b$.

(a) Les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies et à termes positifs. Par l'inégalité $2xy\leq x^2+y^2$, on obtient $a_{n+1}\leq b_{n+1}$. On en déduit la croissance de (a_n) et la décroissance de (b_n). Ces suites sont monotones et bornées donc convergentes. Notons ℓ et ℓ' leurs limites. Par passage à la limite de la relation définissant a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, on obtient

$$\ell=\frac{\ell+\ell'}{2}.$$

On en déduit $\ell=\ell'$.

(b) L'intégrale définissant $T(a,b)$ est convergente car

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+u^2)(b^2+u^2)}}\underset{u\to\pm\infty}{\sim}\frac{1}{u^2}.$$

La fonction de changement de variable $t\mapsto\frac{1}{2}\left(t-\frac{ab}{t}\right)$ est une bijection $\mathcal{C}^1$ croissante de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$. Après calculs

$$T\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{2\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}.$$

Par parité de la fonction intégrée

$$T\left(\frac{a+b}{2},\sqrt{ab}\right)=T(a,b).$$

(c) On a

$$T(a_{n+1},b_{n+1})=T(a_n,b_n)$$

et donc

$$T(a_n,b_n)=T(a,b).$$

Par convergence dominée avec la fonction de domination

$$\varphi(u)=\frac{1}{a^2+u^2}$$

on obtient

$$T(a_n,b_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{M(a,b)^2+u^2}=\frac{1}{M(a,b)}\left[\arctan\frac{u}{M(a,b)}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{M(a,b)}.$$

Exercice 56 : [énoncé]

(a) Posons

$$f(x,\theta)=\frac{\arctan(x\tan\theta)}{\tan\theta}.$$

La fonction arctan étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f est définie pour tout couple (x,θ) de $\mathbb{R}\times\,]0\,;\pi/2[$.
Pour $x\in\mathbb{R}$, la fonction $\theta\mapsto f(x,\theta)$ est continue par morceaux sur $]0\,;\pi/2[$ et

$$f(x,\theta)\xrightarrow[x\to 0^+]{} x\quad\text{et}\quad f(x,\theta)\xrightarrow[x\to(\pi/2)^-]{} 0.$$

L'intégrale est faussement généralisée en ses deux bornes et donc converge.
Finalement, F est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,\theta)=\frac{1}{1+x^2\tan^2\theta}.$$

Cette dérivée partielle est continue en x, continue par morceaux en θ et, pour tout $(x,\theta)\in\mathbb{R}\times\,]0\,;\pi/2[$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial\theta}(x,\theta)\right|\leq 1=\varphi(\theta)$$

avec φ intégrable. Par domination, F est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$F'(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+x^2\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

On poursuit le calcul à l'aide du changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $t=\tan\theta$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}.$$

Pour $x^2\neq 0$ et $x^2\neq 1$, on décompose en éléments simples la fraction

$$\frac{1}{(1+x^2X)(1+X)}$$

et on en déduit en prenant t^2 au lieu de X

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{\frac{x^2}{x^2-1}}{1+x^2t^2} + \frac{\frac{1}{1-x^2}}{1+t^2}.$$

On peut alors poursuivre le calcul de $F'(x)$. Pour $x>0$ et $x\neq 1$,

$$F'(x) = \frac{x}{x^2-1}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{x+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

La fonction F' étant continue et paire, on obtient l'expression sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = \frac{1}{|x|+1}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

Enfin, sachant $F(0)=0$, on conclut

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\ln(1+x) & \text{si } x\geq 0\\ -\frac{\pi}{2}\ln(1-x) & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

(c) Pour $x=1$, on obtient

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Par intégration par parties généralisée

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\theta}{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta = \underbrace{\Big[-\theta\ln(\sin\theta)\Big]_0^{\pi/2}}_{=0} + \int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

et donc

$$\int_0^{\pi/2}\ln(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

Exercice 57 : [énoncé]
La fonction intégrée ne converge pas simplement en les $t=\pi/2+\pi\ [2\pi]$. Pour contourner cette difficulté on raisonne à l'aide de valeurs absolues.

$$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\left|\sin^n t\right|\mathrm{d}t.$$

On a

$$f_n(t) = \left|\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\right| \xrightarrow{CS} f(t)$$

avec

$$f(t) = \begin{cases}0 & \text{si } t\neq\pi/2\ [\pi]\\ \mathrm{e}^{-t} & \text{sinon.}\end{cases}$$

Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$\left|f_n(t)\right| \leq \mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ continue par morceaux intégrable sur $[0\,;+\infty[$ donc par convergence dominée :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 58 : [énoncé]

(a) On a

$$u_n(1) = \int_0^{\pi/2}\sin t(\cos t)^n\,\mathrm{d}t = \Big[-\frac{1}{n+1}\cos^{n+1}t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{1}{n+1}.$$

La série de terme général $u_n(1)$ est divergente.

(b) Pour $\alpha\leq 1$,

$$\forall t\in\,]0\,;\pi/2],\ (\sin t)^\alpha \geq \sin t$$

et donc $u_n(\alpha)\geq u_n(1)$.
On en déduit que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est alors divergente.
Pour $\alpha>1$. La série des $u_n(\alpha)$ est une série à termes positifs et

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) = \int_0^{\pi/2}(\sin t)^\alpha\frac{1-(\cos t)^{n+1}}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sum_{k=0}^n u_k(\alpha) \leq \int_0^{\pi/2}\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t}\,\mathrm{d}t$$

avec l'intégrale majorante qui est convergente puisque

$$\frac{(\sin t)^\alpha}{1-\cos t} \sim 2\frac{t^\alpha}{t^2} = \frac{2}{t^{2-\alpha}} \text{ quand } t \to 0^+.$$

Puisque la série à termes positifs $\sum u_n(\alpha)$ a ses sommes partielles majorées, elle est convergente.

(c) Par ce qui précède, on peut intégrer terme à terme car il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues des fonctions. On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^\alpha t}{1-\cos t} \,\mathrm{d}t.$$

Pour $\alpha = 2$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t}{1-\cos t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 1+\cos t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}+1.$$

Pour $\alpha = 3$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 t}{1-\cos t} \,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin t(1+\cos t) \,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}.$$

Exercice 59 : [énoncé]

Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)$.

La fonction u est définie sur $\mathbb{R}\times[0\,;+\infty[$ et admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)$$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$ car négligeable devant $1/t^2$ en $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.

$\forall t \in [0\,;+\infty[$, $x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Enfin

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}\times[0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \le t\mathrm{e}^{-t^2} = \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.

Par domination, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} -t\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Procédons à une intégration par parties avec les fonctions $\mathcal{C}^1$

$$u(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2} \text{ et } v(t) = \sin(xt).$$

Puisque le produit uv converge en 0 et $+\infty$, l'intégration par parties généralisée est possible et

$$g'(x) = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\sin(xt)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-t^2}\cos(xt)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi on obtient

$$g'(x) = -\frac{1}{2}xg(x)$$

g est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $g(0) = \sqrt{\pi}/2$ on conclut

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}.$$

Exercice 60 : [énoncé]

Si $|a| < 1$ alors

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it}-a}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{i(n-1)t}}{1-a\mathrm{e}^{-it}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \mathrm{e}^{i(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t.$$

Par convergence normale de la série

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it}-a}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n-(k+1))t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi a^{n-1} & \text{si } n \ge 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $|a| > 1$ alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{\mathrm{e}^{it}-a}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{a}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{int}}{1-\mathrm{e}^{it}/a}\,\mathrm{d}t \\ &= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{a^{k+1}} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(n+k)t}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} -2\pi a^{n-1} & \text{si } n \le 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$$

Exercice 61 : [énoncé]

(a) $a_{n+1}/a_n \to 1/\mathrm{e} < 1$.

(b) Posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties, on obtient $I_n = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ d'où

$$a_n = n\int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

(c) On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

et la série

$$\sum \int_0^{+\infty} \left|nt^n\mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t = \sum a_n$$

converge donc on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$(1-t\mathrm{e}^{-t})\sum_{n=1}^{+\infty} nt^n\mathrm{e}^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} t^n\mathrm{e}^{-nt} = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-t\mathrm{e}^{-t}}$$

d'où la conclusion.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(t) = 1/(1+t^n)$ sur $]0\,;1]$.
La suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction $u_\infty\colon t\mapsto 1$.
Les fonctions u_n et la fonction u_∞ sont continues par morceaux.
Enfin

$$\forall t\in\,]0\,;1],\left|u_n(t)\right| \le 1 = \varphi(t)$$

avec $\varphi\colon]0\,;1]\to\mathbb{R}_+$ intégrable. Par convergence dominée

$$I_n = \int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 u_\infty(t)\,\mathrm{d}t = 1 = \ell.$$

(b) On a

$$\ell - I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\frac{t^{n-1}}{1+t^n}\,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t.$$

Puisque

$$\left|\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

on peut affirmer $\ell - I_n \sim \frac{\ln 2}{n}$.

(c) Pour $y\in\,]0\,;1[$,

$$\frac{\ln(1+y)}{y} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k y^k}{k+1}.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}.$$

Sans peine, $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$ sachant $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ strictement croissant $y = t^n$

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y.$$

Par convergence dominée (domination par sa limite simple),

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y^{\frac{n-1}{n}}}\,\mathrm{d}y \to \int_0^1 \frac{\ln(1+y)}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ainsi,

$$\ell - I_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

puis

$$I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) Posons $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f(x,t)=\frac{\mathrm{e}^{itx}}{1+t^2}.$$
La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, on a
$$\left|f(x,t)\right|\leq\frac{1}{1+t^2}=\psi(t)$$
avec ψ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
On en déduit que φ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Par intégration par parties
$$\varphi(x)=-\frac{1}{\mathrm{i}x}+\frac{1}{\mathrm{i}x}\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$
La fonction
$$x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en vertu de la domination
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\right)\right|=\frac{2t^2}{(1+t^2)^2}\leq\frac{2}{1+t^2}.$$
On en déduit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ avec
$$\varphi'(x)=\frac{1}{\mathrm{i}x^2}-\frac{1}{\mathrm{i}x^2}\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t.$$
Or par intégration par parties
$$\int_0^{+\infty}\frac{2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}=\left[-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\mathrm{i}x\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
donc
$$\varphi'(x)=-\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t+\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{2t^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{(1+t^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$
Enfin, une dernière intégration par parties donne
$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}\left[-\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\right]_0^{+\infty}+\mathrm{i}\int_0^{+\infty}\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t$$
et la relation voulue...

(c) Par le changement de variable $u=tx$, on obtient l'expression proposée.
On peut décomposer
$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\int_0^1\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_1^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u.$$
D'une part, par intégration par parties
$$\int_1^{+\infty}\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u$$
avec
$$\left[\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\right]_1^{+\infty}=-\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}}}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0^+]{}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}}$$
et
$$\left|\int_1^{+\infty}\frac{x^2-u^2}{(x^2+u^2)^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_1^{+\infty}\frac{u^2-x^2}{(x^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0^+]{}1.$$
D'autre part
$$\int_0^1\frac{u\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u+\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$
avec
$$\int_0^1\frac{u}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u=\left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\right]_0^1\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x$$
et
$$\left|\int_0^1\frac{u(\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1)}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u\right|\leq\int_0^1\frac{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right|}{u}\,\mathrm{d}u<+\infty.$$
Au final
$$\varphi'(x)=\mathrm{i}\ln x+\mathrm{o}(\ln x)+\mathrm{o}(1)\underset{x\to0^+}{\sim}\mathrm{i}\ln x.$$

(d) En vertu de ce qui précède
$$\operatorname{Im}(\varphi'(x))\underset{x\to0^+}{\sim}\ln x\to-\infty.$$
On en déduit que la fonction réelle $\operatorname{Im}\varphi$ n'est pas dérivable en 0, il en est *a fortiori* de même de φ.

Exercice 64 : [énoncé]

(a) La fonction $x \mapsto 1/x^\alpha(1+x)$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$\frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \frac{1}{x^\alpha(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Cette fonction est donc intégrable si, et seulement si, $\alpha \in\,]0\,;1[$.
La fonction intégrée étant de surcroît positive, l'intégrale définissant $f(\alpha)$ converge si, et seulement si, $\alpha \in\,]0\,;1[$.

(b) On a

$$f(\alpha) - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}.$$

Or

$$\left|\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}(1+x)}\right| \le \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x)} = C$$

et pour $\alpha \le 1/2$

$$\left|\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)}\right| \le \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)} = C'.$$

On a donc

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha+1}} + \mathrm{O}(1) = \frac{1}{\alpha} + \mathrm{O}(1) \sim \frac{1}{\alpha}.$$

On peut aussi obtenir cet équivalent en commençant par opérer le changement de variable $u = x^\alpha$.

(c) Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $x = 1/t$, on obtient $f(\alpha) = f(1-\alpha)$ d'où la symétrie affirmée.

(d) Posons

$$u(\alpha, x) = \frac{1}{x^\alpha(1+x)}.$$

Pour chaque $x \in\,]0\,;+\infty[$, la fonction $\alpha \mapsto u(\alpha, x)$ est continue et pour chaque $\alpha \in\,]0\,;1[$ la fonction $x \mapsto u(\alpha,x)$ est continue par morceaux. Enfin pour $\alpha \in [a\,;b] \in\,]0\,;1[$ (avec $a > 0$), on a

$$\left|u(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{x^a(1+x)} \text{ si } x \in [1\,;+\infty[$$

et

$$\left|u(x,\alpha)\right| \le \frac{1}{x^b(1+x)} \text{ si } x \in\,]0\,;1].$$

Ainsi

$$\left|u(x,\alpha)\right| \le \varphi_{a,b}(x) \text{ pour } x \in\,]0\,;+\infty[$$

en posant $\varphi_a(x) = u(a,x) + u(b,x)$ qui est intégrable.
Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;1[$.

(e) Par le changement de variable $x = 1/t$, on peut écrire

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha(1+x)} = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1-\alpha}(1+t)}$$

et alors

$$f(\alpha) = \int_1^{+\infty} \frac{x^{1-\alpha} + x^\alpha}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x.$$

On vérifie que pour $x \ge 1$, la fonction $\alpha \mapsto x^{1-\alpha} + x^\alpha$ est décroissante sur $]0\,;1/2]$ puis croissante sur $[1/2\,;1[$. La fonction f a donc la même monotonie et son minimum est donc

$$f(1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}(1+t)} = \pi$$

via le changement de variable $u = \sqrt{t}$.

Exercice 65 : [énoncé]

(a) En dérivant $u_1u_2 = 1$, on obtient $u_1'u_2 + u_1u_2' = 0$ ce qui permet d'établir que z_1 et z_2 sont deux fonctions opposées. Aussi

$$z_i' = \frac{u_i''u_i - u_i'^2}{u_i^2} = -\frac{pu_i'u_i + qu_i^2 + u_i'^2}{u_i^2}$$

et donc z_i est solution de l'équation différentielle

$$(E_2)\colon z' + p(t)z + z^2 + q(t) = 0.$$

(b) *Analyse:* Si l'équation (E_1) admet deux solutions u_1 et u_2 avec $u_1u_2 = 1$ alors (E_2) admet deux solutions opposées z_1 et $z_2 = -z_1$:

$$z_1' + pz_1 + z_1^2 + q = 0 \quad\text{et}\quad z_2' + pz_2 + z_2^2 + q = 0.$$

La différentce et la somme de ces deux équations donnent

$$z_1' + pz_1 = 0 \quad\text{et}\quad z_1^2 + q = 0.$$

On en déduit $q \leq 0$ et $z_1 z_1' + p z_1^2 = 0$ donne $q' + 2pq = 0$. Notons que si la fonction q s'annule, l'équation différentielle précédente assure que q est la fonction nulle. *Synthèse:* Si la fonction q est nulle l'équation (E_1) admet des solutions constantes et, parmi celles-ci, il figure des solutions dont le produit vaut 1. Si la fonction q est strictement négative et vérifie $q' + 2pq = 0$, on peut introduire $z = \sqrt{-q}$ et on observe $z' = -pz$ car

$$2zz' = (-q)' = 2pq = -2pz^2.$$

Si u est une solution non nulle de l'équation différentielle $u' = uz$, elle ne s'annule pas et on vérifie par le calcul que u et $1/u$ sont solutions de l'équation (E_1).

En résumé, l'équation (E_1) admet deux solutions dont le produit vaut 1 si, et seulement si, q est une fonction négative vérifiant $q' + 2pq = 0$.

(c) La condition précédente est vérifiée pour

$$p(t) = -\frac{2\sin(4t)}{1+\cos(4t)} = \frac{2\sin(2t)}{\cos(2t)} \quad \text{et} \quad q(t) = -\frac{8}{1+\cos(4t)} = -\frac{4}{\cos^2(2t)}.$$

En adaptant les calculs qui précèdent, on obtient une solution u en prenant

$$u' = uz \quad \text{avec} \quad z = \frac{2}{\cos(2t)}$$

et on parvient à

$$u(t) = \sqrt{\frac{1-\sin(2t)}{1+\sin(2t)}} = \frac{1-\sin(2t)}{\cos(2t)}.$$

La fonction inverse est aussi solution et on peut exprimer la solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2

$$x(t) = \frac{\lambda\big(1-\sin(2t)\big) + \mu\big(1+\sin(2t)\big)}{\cos(2t)}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 définie sur $\mathbb{R}$. Les conditions initiales proposées déterminent alors une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Puisque la fonction u est continue et $u(0) = 1$, la fonction u est strictement positive au voisinage de 0 et par la satisfaction de l'équation différentielle, on peut affirmer que u'' est strictement négative au voisinage de 0. La fonction u' étant alors strictement décroissante au voisinage de 0 et vérifiant $u'(0) = 0$, les existences de α et β sont assurées.
Par l'absurde, supposons que la fonction u ne s'annule par sur $\mathbb{R}_+$.
La fonction u est alors positive et u'' est négative sur $\mathbb{R}_+$. La fonction u' étant donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$\forall t \geq \beta, u'(t) \leq u'(\beta).$$

En intégrant

$$\forall x \geq \beta, u(x) - u(\beta) \leq u'(\beta)(x - \beta).$$

Or cette affirmation est incompatible avec un passage à la limite quand $x \to +\infty$.
On en déduit que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$ (et cette annulation est nécessairement sur $\mathbb{R}_+^*$)
De même, on justifie que u s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_-^*$ (et on peut même montrer que la fonction u est paire...)

(c) Considérons l'ensemble

$$A = \big\{t > 0 \,\big|\, u(t) = 0\big\}.$$

C'est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$, elle admet donc une borne inférieure δ. Par la caractérisation séquentielle d'une borne inférieure, il existe une suite $(t_n) \in A^{\mathbb{N}}$, telle que

$$t_n \to \delta.$$

Puisque $u(t_n) = 0$, on obtient à la limite $u(\delta) = 0$. Evidemment $\delta \geq 0$ et $\delta \neq 0$ donc $\delta \in A$ et ainsi δ est un minimum de A.
De même on obtient γ.

(d) Grâce à l'équation différentielle

$$W' = u''v - uv'' = 0.$$

Le wronskien W est donc constant mais peu importe... puisque les solutions u et v sont indépendantes, le wronskien ne s'annule pas et il est donc de signe constant.
Or

$$W(\gamma) = u'(\gamma)v(\gamma) \text{ et } W(\delta) = u'(\delta)v(\delta).$$

Puisque u est strictement positive sur $]\gamma\,;\delta[$, u'' est strictement négative et u' strictement décroissante sur ce même intervalle. On en déduit

$$u'(\gamma) > 0 \text{ et } u'(\delta) < 0$$

ce qui entraîne que $v(\gamma)$ et $v(\delta)$ sont de signes stricts contraires. On en déduit que v s'annule sur $]\gamma\,;\delta[$.

(e) Plus généralement, qu'une solution de (E) soit colinéaire à u ou non, on peut affirmer que celle-ci possède un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. Or on vérifie que les fonctions w_n sont solutions de (E) et donc chacune possède au moins un zéro dans $[\gamma\,;\delta]$. On en déduit que la fonction w possède au moins un zéro dans chaque intervalle $[\gamma+n\pi\,;\delta+n\pi]$ ce qui assure l'existence d'une infinité de zéros.

Exercice 67 : [énoncé]

(a) Par l'absurde, supposons que f s'annule et introduisons

$$b=\inf\bigl\{t\in[a\,;+\infty[\;\big|\;f(t)=0\bigr\}.$$

Par continuité de f, on a $f(b)=0$ et sachant $f(a)>0$, on aussi.

$$\forall t\in[a\,;b], f(t)\geq 0.$$

On en déduit $f''(t)=q(t)f(t)\geq 0$ et donc f' est croissante sur $[a\,;b]$. Sachant $f'(a)>0$, la fonction f est croissante sur $[a\,;b]$. Ceci est incompatible avec la valeur $f(b)=0$. C'est absurde.
On en déduit que f ne s'annule pas sur $[a\,;+\infty[$ et est donc strictement positive. Comme au dessus, on retrouve que f' est croissante et donc strictement positive. Enfin

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t\geq f(a)+f'(a)(x-a)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty.$$

(b) $(u'v-uv')'=u''v-uv''=0$. La fonction $u'v-uv'$ est donc constante égale à -1 (qui est sa valeur en a).
Puisque $v(a)=0$ et $v'(a)=1$, les fonctions v et v' sont strictement positives sur un intervalle de la forme $]a\,;a+h]$ (avec $h>0$). En appliquant la question précédente avec $a+h$ plutôt que a, on assure que v et v' sont strictement positives sur $]a\,;+\infty[$. On peut donc introduire les fonctions u/v et u'/v'. Aussi

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{-1}{v^2}\leq 0 \text{ et } \left(\frac{u'}{v'}\right)'=\frac{u''v'-u'v''}{v'^2}=\frac{q}{v'^2}\geq 0.$$

On a

$$\frac{u}{v}-\frac{u'}{v'}=\frac{uv'-u'v}{vv'}=\frac{1}{vv'}$$

avec $v\xrightarrow[+\infty]{}+\infty$ et $v'\geq v'(a)=1$. On en déduit que les fonctions u/v et u'/v' ont la même limite en $+\infty$ (ces limites existent assurément par monotonie). Aussi cette limite est finie car la fonction u/v est au dessus de la fonction u'/v'. Nous noterons ℓ cette limite.

(c) Les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$g=\lambda u+\mu v$$

car (u,v) forme un système fondamentale de solutions de l'équation linéaire (E).
La condition $g(a)=1$ impose $\lambda=1$.
Les conditions g strictement positive et décroissante imposent respectivement

$$u+\mu v>0 \text{ et } u'+\mu v'\leq 0.$$

La constante μ est alors nécessairement $-\ell$.
Finalement $g=u-\ell v$. La réciproque est immédiate.

(d) Le changement de fonction proposé transpose l'équation $x^4y''(x)=y(x)$ en $z''(1/x)=z(1/x)$.
La solution générale de l'équation (E) sur $[1\,;+\infty[$ est donc

$$y(x)=x\bigl(\lambda\mathrm{e}^{1/x}+\mu\mathrm{e}^{-1/x}\bigr).$$

Par développement limité

$$y(x)\underset{x\to+\infty}{=}x\bigl((\lambda+\mu)+\mathrm{o}(1)\bigr).$$

Pour que la fonction g décroisse en restant positive, il est nécessaire que $\lambda+\mu=0$.
Sachant $y(1)=\lambda\mathrm{e}+\mu/\mathrm{e}$, on obtient

$$g(x)=\frac{\mathrm{e}x}{\mathrm{e}^2-1}\bigl(\mathrm{e}^{1/x}-\mathrm{e}^{-1/x}\bigr).$$

On aurait aussi pu calculer

$$u(x)=x\mathrm{e}^{1/x-1} \text{ et } v(x)=\frac{x}{2}\bigl(-\mathrm{e}^{1/x-1}+\mathrm{e}^{-1/x+1}\bigr)$$

et reprendre ce qui précède.

Exercice 68 : [énoncé]

(a) La solution générale de l'équation homogène associée est

$$y(t)=\lambda\cos t+\mu\sin t.$$

On peut avoir l'intuition de trouver une solution particulière de la forme $y(t)=\alpha\cos(nt)$ et, en effet on obtient,

$$y(t)=\frac{-1}{n^2-1}\cos(nt)$$

solution particulière lorsque $n \neq 1$. La solution générale est alors

$$y(t) = \lambda \cos t + \mu \sin t + \frac{1}{1-n^2}\cos(nt).$$

Quand $n = 1$, on applique la méthode de variation des constantes. On obtient une solution particulière en résolvant

$$\begin{cases} \lambda'(t)\cos t + \mu'(t)\sin t = 0 \\ -\lambda'(t)\sin t + \mu'(t)\cos t = \cos(nt). \end{cases}$$

Par les formules de Cramer, on obtient

$$\lambda'(t) = -\sin t\cos t \text{ et } \mu'(t) = \cos^2(t).$$

Alors

$$\lambda(t) = -\frac{1}{2}\sin^2 t \text{ et } \mu(t) = \frac{t}{2} + \frac{\sin(t)\cos(t)}{2}$$

conviennent et l'on obtient la solution particulière

$$y(t) = \frac{t}{2}\sin t$$

puis la solution générale

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu \sin t + \frac{1}{2}t\sin t.$$

(b) Soit

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{2}t\sin t + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{a_n}{1-n^2}\cos(nt).$$

Sans difficultés, on peut dériver deux fois sous le signe somme car il y a convergence normale de la série des dérivées secondes et convergences simples intermédiaires. On peut alors conclure que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle étudiée. La solution générale de celle-ci est alors

$$y(t) = \lambda\cos t + \mu\sin t + f(t).$$

Exercice 69 : [énoncé]

(a) On résout l'équation différentielle linéaire étudiée et, par la méthode de variation de la constante, on obtient la solution générale suivante

$$g(x) = \lambda x + x\int_1^x \frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Par une intégration par parties, on peut écrire

$$g(x) = \lambda x - f(x) + xf(1) + x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to 0^+$, on a

$$\left|x\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t\right| \le \|f'\|_{\infty,[0;1]}x|\ln x|$$

et on obtient

$$g(x) \to -f(0).$$

Quand $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x}\bigl(g(x)-g(0)\bigr) = \lambda - \frac{f(x)-f(0)}{x} + f(1) + \int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le terme $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ converge vers $f'(0)$.
Si $f'(0) \neq 0$ alors l'intégrale $\int_{]0;1]}\frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge et donc le terme $\int_1^x \frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge. On en déduit qu'alors g n'est pas dérivable en 0.
L'égalité $f'(0) = 0$ est une condition nécessaire à la dérivabilité de g en 0.
Cette condition n'est pas suffisante. En effet considérons une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f'(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\ln x}.$$

L'intégrale $\int_{]0;1]}\frac{f'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ demeure divergente alors que $f'(0) = 0$.

(b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$ et vérifie $f'(0) = 0$ on peut écrire

$$f(x) = f(0) + x^2\varphi(x) \text{ pour tout } x > 0$$

avec $\varphi\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ et convergeant vers $f''(0)/2$ en 0^+.
On a alors pour tout $x > 0$

$$g(x) = \lambda x + xf(0) - f(0) + x\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

g est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]0\,;+\infty[$ car φ y est de classe $\mathcal{C}^2$.
On prolonge g par continuité en 0 en posant $g(0) = -f(0)$

$$g'(x) = \lambda + f(0) + x\varphi(x) + \int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to 0^+$, g' converge et donc g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0\,;+\infty[$.

$$g''(x) = 2\varphi(x) + x\varphi'(x).$$

Or

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)}{x^2} - 2\frac{f(x)-f(0)}{x^3}$$

donc

$$g''(x) = \frac{f'(x)}{x} = \frac{f'(x)-f'(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} f''(0).$$

On en déduit que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0\,;+\infty[$

Exercice 70 : [énoncé]

(a) (E) est une équation différentielle linéaire d'ordre 1. Après résolution via variation de la constante, on obtient la solution générale

$$y(x) = \frac{x+\lambda}{\ln x}.$$

(b) Par opérations, la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[1/2\,;+\infty[$.
Pour $x \in \,]-1\,;1[$ on a le développement en série entière

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

et si $x \neq 0$, on obtient

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n.$$

Si l'on pose $g(0) = 1$, la relation précédente reste valable pour $x = 0$ et ainsi on a prolongé g en une fonction développable en série entière sur $]-1\,;1[$.
Ce prolongement est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1\,;1[$ puis sur $]-1\,;+\infty[$.

(c) La fonction g est à valeurs strictement positives et on peut donc introduire la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{g(x-1)}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}.$$

Ainsi f est solution de (E) sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$ et enfin on vérifie aisément que l'équation différentielle (E) est aussi vérifiée quand $x = 1$.

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Commençons par remarquer que $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$ car

$$\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0)^2 \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \mathrm{I}_n.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$ et $s \neq 0$, on a

$$\frac{1}{s}\big(\varphi(s+t) - \varphi(t)\big) = \frac{1}{s}\big(\varphi(s) - \varphi(0)\big)\varphi(t).$$

En passant à la limite quand s tend vers 0, on obtient

$$\varphi'(t) = \varphi'(0)\varphi(t).$$

Cette égalité s'apparente à une équation différentielle linéaire vectorielle à coefficient constant $x' = a(x)$ où l'inconnue x correspond à la fonction φ et l'endomorphisme a est la multiplication par la matrice $\varphi'(0)$. La résolution de cette équation donne

$$\varphi(t) = \exp(tA)\varphi(0) \quad \text{avec} \quad A = \varphi'(0).$$

En rappelant $\varphi(0) = \mathrm{I}_n$, on obtient l'expression voulue de $\varphi(t)$.

(b) Posons $f(x,t) = \theta(x-t)\varphi(t)$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$ car nulle en dehors $[x-\alpha\,;x+\alpha]$. Ceci assure la définition de la fonction ψ.
La fonction f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \theta'(x-t)\varphi(t).$$

Celle-ci est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $a > 0$. Pour tout $x \in [-a\,;a]$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \underbrace{\sup_{s\in[-\alpha;\alpha]} |\theta'(s)| \varphi(t) \mathbf{1}_{[-(a+\alpha);a+\alpha]}(t)}_{\text{intégrable}}.$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$.
Pour tous x et y réels

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x-t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \underset{s=x-t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(s)\varphi(x-s)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(s)\varphi(x)\varphi(-s)\,\mathrm{d}s = \varphi(x)\psi(0).\end{aligned}$$

On obtient donc $\psi(x) = \varphi(x)B$ avec $B = \psi(0)$.

(c) Montrons qu'il est possible de se ramener à la situation où la matrice B est inversible auquel cas on établit que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et on conclut par la première question que $\varphi\colon t\mapsto \exp(tA)$ pour $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$\theta_n(x)=\frac{1}{n}\theta(nx).$$
La fonction θ_n réunit les conditions de la fonction θ précédente et
$$B_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta_n(t)\varphi(-t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\varphi(-t/n)\,\mathrm{d}t.$$
Pour tout $t\in\mathbb{R}$
$$\theta(t)\varphi(-t/n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\theta(t)\varphi(0)$$
et
$$\left\|\theta(t)\varphi(-t/n)\right\|\le\underbrace{\max_{s\in[-\alpha;\alpha]}\left|\theta(s)\right|\max_{s\in[-\alpha;\alpha]}\left\|\varphi(s)\right\|\mathbf{1}_{[-\alpha;\alpha]}(t)}_{\text{intégrable}}.$$
Par convergence dominée
$$B_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\varphi(-t/n)\,\mathrm{d}t\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_{-\infty}^{+\infty}\theta(t)\varphi(0)\,\mathrm{d}t=\varphi(0)=\mathrm{I}_n.$$
Par continuité du déterminant, $\det(B_n)$ tend vers 1 et on peut affirmer que, pour n assez grand, B_n est inversible et on peut conclure.

Exercice 72 : [énoncé]
On a
$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\frac{A^k}{n^k}=I_p+\frac{1}{n}A+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$
donc
$$\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)=I+\frac{1}{n}(A+B)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$
Ainsi
$$\left(\exp\left(\frac{A}{n}\right)\exp\left(\frac{B}{n}\right)\right)^n=\left(I+\frac{1}{n}(A+B)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$
Puisque I et $\frac{1}{n}(A+B)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$ commutent, on peut développer par la formule du binôme de Newton et obtenir :
$$\left(I+\frac{1}{n}(A+B)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+\mathrm{o}(1))^k.$$
Posons $f_k\colon\mathbb{N}^*\mapsto\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ définie par
$$f_k(n)=\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}(A+B+\mathrm{o}(1))^k\text{ si }k\le n\text{ et }f_k(n)=0\text{ sinon.}$$
On remarque que
$$\left(I+\frac{1}{n}(A+B)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n=\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(n).$$
Montrons la convergence normale de la série des f_k.
Puisque $A+B+\mathrm{o}(1)\to A+B$, la norme de $A+B+\mathrm{o}(1)$ est bornée par un certain M.
On observe alors $\|f_k\|_\infty\le\frac{1}{k!}M^k$ en choisissant une norme multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
La série $\sum f_k$ converge normale sur $\mathbb{N}^*$, cela permet de permuter limite et somme infinie.
Or, pour k fixé, $f_k(n)\to\frac{(A+B)^k}{k!}$ quand $n\to+\infty$, donc
$$\left(I+\frac{1}{n}(A+B)+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k.$$

Exercice 73 : [énoncé]
(a) Supposons
$$\lambda_0I_n+\lambda_1N+\dots+\lambda_{p-1}N^{p-1}=O_n.$$
En multipliant par N^{p-1} on obtient $\lambda_0N^{p-1}=O_n$ car $N^p=O_n$. Or $N^{p-1}\neq O_n$ donc $\lambda_0=0$.
On montre de même successivement que $\lambda_1=0,\dots,\lambda_{p-1}=0$.
On conclut que la famille $(I_n,N,N^2,\dots,N^{p-1})$ est libre.
Puisque λI_n et N commutent, on a
$$\mathrm{e}^{t(\lambda I_n+N)}=\mathrm{e}^{t\lambda I_n}\mathrm{e}^{tN}=\mathrm{e}^{\lambda t}\left(I_n+\frac{t}{1!}N+\frac{t^2}{2!}N^2+\dots+\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}N^{p-1}\right).$$
(b) Le polynôme caractéristique de A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et possède une unique racine λ, on a donc
$$\chi_A(X)=(X-\lambda)^n.$$
En vertu du théorème de Cayley Hamilton
$$N^n=(A-\lambda I_n)^n=O_n.$$

La matrice N s'avère donc nilpotente.
Les solutions du système différentiel $X' = AX$ sont les fonctions

$$t \mapsto X(t) = \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0).$$

Si N est nulle et $\lambda \in i\mathbb{R}$, il est clair que toutes les solutions sont bornées.
Inversement, supposons les solutions toutes bornées. En choisissant $X(0) \in \operatorname{Ker} N \setminus \{O_n\}$, la solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{tA}X(0) = \mathrm{e}^{\lambda t}X(0)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$ et nécessairement $\lambda \in i\mathbb{R}$.
Notons p l'indice de nilpotence de N et choisissons $X(0) \notin \operatorname{Ker} N^{p-1}$. La solution

$$t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}.\mathrm{e}^{tN}X(0)$$

devant être bornée avec $\left|\mathrm{e}^{\lambda t}\right| = 1$, la fonction

$$t \mapsto X(0) + tNX(0) + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)}N^{p-1}X(0)$$

est elle aussi bornée. Or $N^{p-1}X(0) \neq 0$ et donc cette solution ne peut pas être bornée si $p - 1 > 0$.
On en déduit $p = 1$ puis $N = O_n$.

(c) Les polynômes $(X - \lambda_k)^{n_k}$ sont deux à deux premiers entre eux. Par le théorème de Cayley Hamilton et le lemme de décomposition des noyaux, on obtient

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{k=1}^{m} \operatorname{Ker}(f - \lambda_k \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n})^{n_k}.$$

Une base adaptée à cette décomposition fournit une représentation matricielle Δ de f diagonale par blocs. Plus précisément, les blocs diagonaux sont de la forme

$$\lambda_k \mathrm{Id}_{n_k} + N_k \text{ avec } N_k^{n_k} = O_{n_k}.$$

(d) La matrice A est semblable à Δ et on peut donc écrire

$$A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P \text{ inversible.}$$

Les solutions de l'équation $X' = AX$ correspondent aux solutions de l'équation $Y' = \Delta Y$ via $Y = P^{-1}X$.
Les solutions de $X' = AX$ seront bornées si, et seulement si, celles de $Y' = \Delta Y$ le sont. En raisonnant par blocs et en exploitant le résultat du b), on peut affirmer que les solutions de $X' = AX$ sont bornées sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les λ_k sont imaginaires purs et les N_k tous nuls (ce qui revient à dire que A est diagonalisable).

(e) Supposons A antisymétrique réelle. Puisque A et ${}^tA$ commutent

$${}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\,{}^tA + tA} = \mathrm{e}^{O_n} = I_n.$$

Soit $X : t \mapsto \mathrm{e}^{tA}.X(0)$ une solution de l'équation $X' = AX$. On a

$$\left\|X(t)\right\|^2 = {}^t\overline{X(t)}X(t) = {}^t\overline{X(0)}\,{}^t\overline{(\mathrm{e}^{tA})}\mathrm{e}^{tA}X(0) = \left\|X(0)\right\|^2.$$

Les solutions sont toutes bornées et donc A est diagonalisable à valeurs propres imaginaires pures.

Exercice 74 : [énoncé]

(a) Si $|y| \leq 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$
Si $|y| > 1$ alors la série définissant $f(x,y)$ converge si, et seulement si, $|x| < \left|y^2\right|$ car $\frac{x^n}{1+y^{2n}} = \left(\frac{x}{y^2}\right)^n$.
Finalement $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| < \max(1, y^2)\right\}$.

(b) $u_n(x,y) = \frac{x^n}{1+y^{2n}}$. Soit $a \in [0\,;1[$ et $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, |x| \leq a\max(1,y^2)\right\}$.
Pour $(x,y) \in D_a$:

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right|.$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right| \leq \frac{na^{n-1}}{1+y^{2n}} \leq na^{n-1}.$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| = \left|\frac{nx^{n-1}}{1+y^{2n}}\right| \leq \frac{na^{n-1}y^{2n-2}}{1+y^{2n}} \leq \frac{na^{n-1}}{y^2} \leq na^{n-1}.$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq na^{n-1}$ qui est le terme général d'une série convergente.

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| = \left|\frac{2ny^{2n-1}x^n}{(1+y^{2n})^2}\right| \leq \frac{2nx^n}{1+y^{2n}} \text{ car } \frac{y^{2n-1}}{1+y^{2n}} \leq 1.$$

Si $|y| \leq 1$ alors $|x| \leq a$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{2na^n}{1+y^{2n}} \leq 2na^n.$$

Si $|y| > 1$ alors $|x| \leq ay^2$ et

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \frac{2na^n y^{2n}}{1+y^{2n}} \leq 2na^n.$$

Dans les deux cas $\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2na^n$ qui est le terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D_a et comme ceci vaut pour tout $a \in [0\,;1[$, $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent sur D.

Exercice 75 : [énoncé]

(a) On pose $\varphi(a,a) = -\sin a$ et on observe que $\varphi(x,y) \to \varphi(a,a)$ quand $(x,y) \to (a,a)$ avec $x \neq y$ et avec $x = y$.

(b) En vertu de

$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

on a

$$\varphi(x,y) = -\operatorname{sinc}\left(\frac{x-y}{2}\right)\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

avec sinc de classe $\mathcal{C}^\infty$ car développable en série entière.

Exercice 76 : [énoncé]
Par composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, la fonction F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
On calcule les dérivées partielles de F

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n) = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}(x_1,\dots,x_n) &= \frac{x_i^2}{x_1^2+\dots+x_n^2} f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right)\\ &\quad+\frac{x_1^2+\dots+\hat{x}_i^2+\dots+x_n^2}{(x_1^2+\dots+x_n^2)^{3/2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = f''\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right) + \frac{n-1}{\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}} f'\left(\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}\right).$$

Puisque $t = \sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$ parcourt $\mathbb{R}_+^*$ quand $(x_1,\dots,x_n)$ parcourt $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, l'équation $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0$ est vérifiée si, et seulement si, f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$f''(t) + \frac{(n-1)}{t} f'(t) = 0.$$

Après résolution on obtient

$$f(t) = \frac{\lambda}{t^{n-2}} + \mu \text{ avec } \lambda,\mu \in \mathbb{R} \text{ si } n \neq 2 \text{ et } f(t) = \lambda \ln t + \mu \text{ si } n = 2.$$

Exercice 77 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(1,1)$ seul point critique.
La fonction $t \mapsto t^{\ln t}$ admet un minimum en 1, donc $(x,y) \mapsto x^{\ln x} + y^{\ln y}$ admet un minimum en $(1,1)$.

Exercice 78 : [énoncé]
Méthode analytique :
L'intérieur du triangle et son bord forment un compact. La fonction considérée est continue sur celui-ci donc admet un maximum. Celui-ci ne peut être au bord car la fonction prend des valeurs strictement positives alors qu'elle est nulle sur le bord. Il existe donc un maximum à l'intérieur du triangle et celui-ci annule la différentielle de la fonction.
En introduisant un repère, $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(a,b)$ (ce qui est possible qui à appliquer une homothétie pour que $AB = 1$) la fonction étudiée est

$$f(x,y) = y(bx-ay)(b(x-1)-(a-1)y).$$

On résout le système formé par les équations

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Le calcul est très lourd sans logiciel de calcul formel mais on parvient à conclure.
Méthode géométrique (plus élégante) :
Le point M peut s'écrire comme barycentre des points A,B,C affectés de masses $a,b,c \geq 0$ vérifiant $a+b+c=1$.
L'aire du triangle (MBC) est donné par

$$\frac{1}{2}\left|\det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})\right|.$$

Or
$$\overrightarrow{BM} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BB} + c\overrightarrow{BC}$$
donc
$$\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = a\det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}).$$
En notant $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et d_A le distance de M à la droite (BC), on obtient
$$a = \frac{d_A.BC}{\mathcal{A}}.$$
De façon analogue,
$$b = \frac{d_B AC}{\mathcal{A}} \text{ et } c = \frac{d_C AB}{\mathcal{A}}$$
avec des notations entendues.
Par suite, maximiser le produit $d_A d_B d_C$ équivaut à maximiser le produit abc avec les contraintes $a+b+c=1$ et $a,b,c \geq 0$
La maximisation de $ab(1-a-b)$ avec $a,b \geq 0$ et $a+b \leq 1$ conduit à $a=b=1/3$, d'où $c=1/3$ et le point M est au centre de gravité.

Exercice 79 : [énoncé]
L'étude des points critiques donne $(\sqrt[3]{a}, \sqrt[3]{a})$ seul point critique.
Posons $\alpha = \sqrt[3]{a}$.
$$f(x,y) - f(\alpha,\alpha) = x + y + \frac{\alpha^3}{xy} - 3\alpha = \frac{x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy}{xy}.$$
Étudions $\varphi\colon \alpha \mapsto x^2y + xy^2 + \alpha^3 - 3\alpha xy$. Cette application admet un minimum en $\sqrt{xy}$ de valeur
$$x^2y + xy^2 - 2xy\sqrt{xy} = xy(x + y - 2\sqrt{xy}) = xy(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 \geq 0$$
donc pour tout $x, y > 0$,
$$f(x,y) \geq f(\alpha,\alpha).$$
De plus, il y a égalité si, et seulement si, $\sqrt{x} = \sqrt{y}$ et $\alpha = \sqrt{xy}$ *i.e.* $x = y = \alpha$.

Exercice 80 : [énoncé]
Supposons f homogène de degré p *i.e.*
$$\forall t > 0, f(tx_1, \dots, tx_n) = t^p f(x_1, \dots, x_n).$$
En dérivant cette relation par rapport à t et en évaluant en $t = 1$, on obtient
$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = pf(x_1, \dots, x_n).$$
Inversement, posons
$$g(t) = f(tx_1, \dots, tx_n).$$
Si f vérifie l'équation aux dérivées partielles proposée, la fonction $t \mapsto g(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$tg'(t) = pg(t)$$
et, après résolution, on obtient
$$g(t) = t^p g(1)$$
ce qui donne f homogène de degré p.
Notons que pour $n = 1$, $f(x) = |x|^3$ vérifie la relation et n'est pas homogène de degré 3 que dans le sens précisé initialement.

Exercice 81 : [énoncé]

(a) immédiat.

(b) L'application $d_h\colon f \mapsto \mathrm{d}_h f(0)$ fait l'affaire pour n'importe quel $h \in \mathbb{R}^n$ non nul.

(c) Si h est constante égale à λ alors pour toute fonction $f \in E$ on a par linéarité
$$d(fh) = \lambda d(f)$$
et par définition des éléments de $\mathcal{D}$,
$$d(fh) = f(0)d(h) + \lambda d(f).$$
En employant une fonction f ne s'annulant pas en 0, on peut affirmer $d(h) = 0$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, puisque la fonction $\varphi\colon t \in [0\,;1] \mapsto f(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$, on a
$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$
ce qui donne
$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$.
Toutes les dérivées partielles en x de $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ sont continues sur $K \times [0\,;1]$ donc bornées.
Par domination sur tout compact, on peut affirmer que la fonction $f_i \colon x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(e) Notons $p_i \colon x \mapsto x_i$.
Par linéarité de d, on a

$$d(f) = \sum_{i=1}^n d(p_i f_i) = \sum_{i=1}^n d(p_i) f_i(0)$$

car $d(f(0)) = 0$ et $p_i(0) = 0$.
En posant $a_i = d(p_i)$ et sachant

$$f_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$$

on obtient

$$\forall f \in E, d(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

(f) L'application qui à $h \in \mathbb{R}^n$ associe d_h est donc une surjection de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{D}$.
Cette application est linéaire et aussi injective (prendre $f \colon x \mapsto (h \,|\, x)$ pour vérifier $d_h = 0 \implies h = 0$) c'est donc un isomorphisme et

$$\dim \mathcal{D} = n.$$