Exercice 1 [02357] [Correction]
Soit E un ensemble de cardinal n, $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E ayant k classes d'équivalence et $G = \left\{(x, y) \in E^2 \mid x\mathcal{R}y\right\}$ le graphe de $\mathcal{R}$ supposé de cardinal p. Prouver qu'on a $n^2 \leq kp$.

Exercice 2 [02359] [Correction]
Soit A la somme des chiffres de 4444^{4444}, B celle de A et enfin C celle de B. Que vaut C ?

Exercice 3 [02472] [Correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3} + \left(\frac{2}{3} - \frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 4 [02531] [Correction]
Montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}.$$

Exercice 5 [00319] [Correction]

(a) Soit

$$u_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{n+k}$$

où $p \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Montrer que la suite (u_n) converge. Sa limite sera notée ℓ (on ne demande pas ici de la calculer)

(b) Soit $f \colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et telle que $f(0) = 0$. Soit

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} f\left(\frac{1}{n+k}\right).$$

Montrer que (v_n) converge. Exprimer sa limite en fonction de ℓ.

(c) Calculer ℓ en utilisant $f(x) = \ln(1 + x)$.

(d) Si f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{C}$ est continue et vérifie $f(0) = 0$, montrer qu'il peut y avoir divergence de la suite (v_n).

Exercice 6 [03184] [Correction]
Soient K un réel strictement supérieur à 1 et (ε_n) une suite de réels positifs convergeant vers 0. Soit (u_n) une suite de réels de $[0\,;1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{u_n + \varepsilon_n}{K}.$$

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ?

Exercice 7 [00246] [Correction]
La fonction $t \mapsto \sin\frac{1}{t}$ si $t > 0$ et 0 si $t = 0$ est-elle continue par morceaux sur $[0\,;1]$?

Exercice 8 [02444] [Correction]
Soit

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

(a) Calculer les limites de f en 0^+ et $+\infty$, la limite en $+\infty$ de $f(x)/x$ et montrer que $f(x)$ tend vers $\ln 2$ quand x tend vers 1.

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais qu'elle ne l'est pas sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 9 [02436] [Correction]
Calculer

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t.$$

Exercice 10 [00088] [Correction]
Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = \int_{2x+y}^{2y+x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer f.

Exercice 11 [00188] [Correction]

(a) Soit $f \in \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$. Établir
$$\int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

(b) En déduire la valeur de
$$I_n = \int_0^\pi \frac{x\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x)+\cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 12 [00316] [Correction]
Montrer que l'équation $x^n + x^2 - 1 = 0$ admet une unique racine réelle strictement positive pour $n \geq 1$. On la note x_n. Déterminer la limite ℓ de la suite (x_n) puis un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice 13 [00317] [Correction]
Pour tout entier $n \geq 2$, on considère l'équation $(E_n)\colon x^n = x + 1$ dont l'inconnue est $x \geq 0$.

(a) Montrer l'existence et l'unicité de x_n solution de (E_n).

(b) Montrer que (x_n) tend vers 1.

(c) Montrer que (x_n) admet un développement limité à tout ordre. Donner les trois premiers termes de ce développement limité.

Exercice 14 [00318] [Correction]
Pour $n \geq 2$, on considère le polynôme
$$P_n = X^n - nX + 1.$$

(a) Montrer que P_n admet exactement une racine réelle entre 0 et 1, notée x_n.

(b) Déterminer la limite de x_n lorsque $n \to +\infty$.

(c) Donner un équivalent de (x_n) puis le deuxième terme du développement asymptotique x_n.

Exercice 15 [00323] [Correction]
Développement asymptotique à trois termes de :
$$u_n = \sum_{k=1}^n \sin\frac{k}{n^2}.$$

Exercice 16 [02471] [Correction]
Soit $f(x) = (\cos x)^{1/x}$ et $(\mathcal{C})$ le graphe de f.

(a) Montrer l'existence d'une suite (x_n) vérifiant :

(b) (x_n) est croissante positive.
ii) la tangente à $(\mathcal{C})$ en $(x_n, f(x_n))$ passe par O.

(c) Déterminer un développement asymptotique à 2 termes de (x_n).

Exercice 17 [02358] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par N le nombre de diviseurs positifs de n et par P leur produit. Quelle relation existe-t-il entre n, N et P ?

Exercice 18 [02369] [Correction]
On suppose que n est un entier ≥ 2 tel que $2^n - 1$ est premier.
Montrer que n est nombre premier.

Exercice 19 [02370] [Correction]
On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Pour tout entier $n > 0$, on note $v_p(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers. On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x. On note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers au plus égaux à x.

(a) Montrer
$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^k}\right\rfloor.$$

(b) Montrer que $\binom{2n}{n}$ divise $\prod_{p\in\mathcal{P};p\leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p}\rfloor}$.

(c) Montrer que $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$.

(d) Montrer que $\frac{x}{\ln x} = \mathrm{O}\big(\pi(x)\big)$ quand $x \to +\infty$

Exercice 20 [03199] [Correction]
Soient $A(1,0)$ et $B(0,1)$. Les points $M_0(x_0,y_0)$ et $M_1(x_1,y_1)$ sont donnés.
On construit le point P_0 par les conditions :
— les droites (P_0M_0) et (Ox) sont parallèles ;
— $P_0 \in (AB)$.
On construit le point Q_0 par les conditions :
— les droites (P_0Q_0) et (M_1B) sont parallèles ;

— $Q_0 \in (AM_1)$.

Soit le point $M_2(x_2, y_2)$ tel que le quadrilatère $(M_0P_0Q_0M_2)$ soit un parallélogramme.

On pose

$$M_2 = M_0 * M_1.$$

(a) Démontrer

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + x_1 y_0 \\ y_0 y_1 \end{pmatrix}.$$

(b) Démontrer que la loi $*$ est associative, admet un élément neutre et que, si $y_0 \neq 0$, le point M_0 admet un inverse.

(c) On définit une suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de M_0, de M_1 et de la relation de récurrence valable pour tout entier $n \geq 2$

$$M_n = M_{n-1} * M_{n-2}.$$

Déterminer y_n en fonction de y_0 et de y_1.

Exercice 21 [02361] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a, b deux entiers relatifs avec $b > 0$ et $\sqrt{b}$ irrationnel.

(a) Exemple : montrer que $\sqrt{6}$ est irrationnel.

(b) Quelle est la forme de $(a + \sqrt{b})^n$?

(c) Montrer que si $a + \sqrt{b}$ est racine de P alors $a - \sqrt{b}$ aussi.

(d) On suppose que $a + \sqrt{b}$ est racine double de P. Montrer que $P = RQ^2$ avec R et Q dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 22 [00399] [Correction]

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il y a équivalence entre :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$;

(ii) $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$.

Exercice 23 [02375] [Correction]

Trouver les $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = P(X)P(X + 1).$$

Exercice 24 [03269] [Correction]

On pose

$$f(x) = \frac{1}{\cos x}.$$

Démontrer l'existence d'un polynôme P_n de degré n et à coefficients positifs ou nul vérifiant

$$\forall n \geq 1, f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}.$$

Préciser P_1, P_2, P_3 et calculer $P_n(1)$.

Exercice 25 [02373] [Correction]

Soit $P = X^3 + aX^2 + bX + c$ un polynôme complexe de racines α, β, γ. Calculer

$$\frac{\alpha}{\beta + \gamma} + \frac{\beta}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta}.$$

Exercice 26 [02371] [Correction]

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $\sin\big((2n + 1)\alpha\big)$ en fonction de $\sin \alpha$ et $\cos \alpha$.

(b) En déduire que les racines du polynôme :

$$P(X) = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{n-p}$$

sont de la forme $x_k = \cot^2 \beta_k$. Déterminer les β_k.

Exercice 27 [03812] [Correction]

(a) Déterminer trois éléments a, b, c de $\mathbb{C}$, non tous réels, tels que $a + b + c$, $a^2 + b^2 + c^2$ et $a^3 + b^3 + c^3$ soient trois réels.

(b) Montrer que, si a, b, c sont trois éléments de $\mathbb{C}$ de modules différents et si $a + b + c \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 + c^2 \in \mathbb{R}$ et $a^3 + b^3 + c^3 \in \mathbb{R}$, alors a,b et c sont trois réels.

Énoncé fourni par le concours CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA

Exercice 28 [00539] [Correction]

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F, $F(n) \in \mathbb{Q}$.

Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Exercice 29 [02372] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples $(x_1, \dots, x_n)$. Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Exercice 30 [00181] [Correction]
Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

(a) On suppose $\dim F_1 = \dim F_2$. Montrer qu'il existe G sous-espace vectoriel de E tel que $F_1 \oplus G = F_2 \oplus G = E$.

(b) On suppose que $\dim F_1 \leq \dim F_2$. Montrer qu'il existe G_1 et G_2 sous-espaces vectoriels de E tels que $F_1 \oplus G_1 = F_2 \oplus G_2 = E$ et $G_2 \subset G_1$.

Exercice 31 [04162] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Pour $a \in E$, on note F_a l'ensemble des endomorphismes f de E tels que, pour tout $x \in E$, la famille $\big(x, f(x), a\big)$ est liée.

(a) Déterminer F_a lorsque $a = 0$ puis lorsque $n = 2$.

(b) Montrer que F_a est un espace vectoriel pour tout $a \in E$.

(c) Soit H un espace vectoriel de dimension finie. Caractériser les endomorphismes v de H tels que pour tout $h \in H$, la famille $\big(h, v(h)\big)$ soit liée.

(d) Déterminer la dimension de F_a.

Exercice 32 [02379] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^6)$ tel que $\operatorname{rg} f^2 = 3$. Quels sont les rangs possibles pour f ?

Exercice 33 [04163] [Correction]
Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, $n = \dim E, p = \dim F$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On note

$$H = \big\{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\big\}.$$

(a) Si f est bijectif, montrer $H = \{0\}$.

(b) Montrer que $\dim H = np - r^2$ avec $r = \operatorname{rg} f$.

(c) On suppose que $E = F$ et on définit l'application $\varphi\colon g \mapsto f \circ g \circ f$. Montrer

$$\operatorname{tr} \varphi = (\operatorname{tr} f)^2.$$

Exercice 34 [02380] [Correction]
Quels sont les $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telles que $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$?

Exercice 35 [03164] [Correction]
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure.
Montrer que T commute avec sa transposée si, et seulement si, la matrice T est diagonale.

Exercice 36 [00730] [Correction]
Soit M une matrice carrée de taille n à coefficients dans $\mathbb{K}$ sous-corps de $\mathbb{C}$.
Montrer que si $\operatorname{tr} M = 0$, il existe deux matrices A et B telles que

$$M = AB - BA.$$

Exercice 37 [02388] [Correction]
Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et H une partie non vide et finie de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ stable par multiplication.

(a) Soit $M \in H$. Montrer que $k \in \mathbb{N}^* \mapsto M^k \in H$ n'est pas injective.
En déduire que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Soient

$$q = |H| \text{ et } P = \frac{1}{q} \sum_{M \in H} M.$$

(b) Montrer, si $M \in H$, que $MP = PM = P$. En déduire $P^2 = P$.

(c) Trouver un supplémentaire, dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, stable par tous les éléments de H, de

$$\bigcap_{M \in H} \operatorname{Ker}(M - I_n).$$

(d) Montrer que

$$\sum_{M \in H} \operatorname{tr} M \in q\mathbb{N}.$$

Que dire si cette somme est nulle ?

Exercice 38 [03071] [Correction]
Soit f un endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

(a) Montrer qu'il existe d'uniques complexes a, b tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\overline{z}.$$

(b) Exprimer en fonction de a et b le déterminant de f.

Exercice 39 [02387] [Correction]

(a) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \geq 0.$$

(b) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

(c) Trouver un contre-exemple à b) si A et B ne commutent pas.

(d) Soient $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CA$. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - CB).$$

Exercice 40 [02385] [Correction]
Calculer

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}.$$

Exercice 41 [02386] [Correction]
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Calculer :

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X-\lambda_1} & \frac{P(X)}{X-\lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X-\lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Exercice 42 [00198] [Correction]
Soient $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

(a) À quelle condition la matrice A est-elle inversible ?

(b) Donner son inverse quand cela est possible.

Exercice 43 [02396] [Correction]
Soit $(E, \langle \cdot\,, \cdot \rangle)$ un espace euclidien non nul et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{tr}(u) = 0$.

(a) Montrer qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.

(b) Montrer qu'il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est à diagonale nulle.

Exercice 44 [04160] [Correction]
Un fumeur a un paquet de N cigarettes dans chacune de ses deux poches. Chaque fois qu'il veut fumer, il choisit une poche au hasard pour prendre une cigarette. Il répète cela jusqu'à ce qu'il tombe sur un paquet vide. Soit X_N la variable aléatoire qui donne le nombre de cigarettes restant dans l'autre paquet à ce moment-là.

(a) Écrire une fonction **Python** qui simule l'expérience et retourne X_N. Faire la moyenne pour 1 000 tests.

(b) Proposer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ qui modélise l'expérience.

(c) Exprimer la loi de X_N.

(d) Montrer que, pour $k \in [\![1\,;N]\!]$

$$(2N - k - 1)P(X_N = k + 1) = 2(N - k)\mathrm{P}(X_N = k).$$

(e) Calculer l'espérance de X_N puis donner un équivalent de $\mathrm{E}(X_N)$.

Exercice 45 [01083] [Correction]
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \bigl(\ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)\bigr).$$

Calculer la somme lorsqu'il y a convergence.

Exercice 46 [02429] [Correction]
On fixe $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \frac{n!}{x^n} \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right).$$

(a) Étudier la suite de terme général $\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge et préciser sa limite.

(b) Établir l'existence de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la série de terme général :

$$\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) - \alpha \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

converge.

(c) Établir l'existence de $A \in \mathbb{R}^*$ tel que $u_n \sim An^\alpha$.

(d) Étudier la convergence de la série de terme général u_n.

Exercice 47 [02431] [Correction]
Soit $a > 0$, $b > 0$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a + bk), B_n = \prod_{k=1}^{n}(a + bk)^{1/n}.$$

Trouver $\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{A_n}$ en fonction de e.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Notons $n_1, \dots, n_k$ les cardinaux respectifs des k classes d'équivalence de $\mathcal{R}$. D'une part $n = n_1 + \dots + n_k$, d'autre part $p = n_1^2 + \dots + n_k^2$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $(n_1 + \dots + n_k)^2 \le k(n_1^2 + \dots + n_k^2)$.

Exercice 2 : [énoncé]
Posons $x = 4444^{4444}$, $4444 = 7\ [9]$, $7^3 = 1\ [9]$ donc $4444^{4444} = 7\ [9]$.
$x < 10^{5\times 4444}$ donc $A \le 9 \times 5 \times 4444 = 199980$, $B \le 9 \times 5 + 1 = 46$ puis $C \le 4 + 9 = 13$.
Or $C = B = A = x\ [9]$ donc $C = 7$

Exercice 3 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié
```
x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);
```
Attention à définir les racines cubiques par des exposants 1/3 avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée
```
evalf(x);
```
Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3
```
expand(x^3);
```
Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}.$$

Simplifions ce terme
```
simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);
```
On obtient

$$\frac{1}{81}\left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}.$$

Développons selon $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$
```
(486^2-123^2*15)^(1/3);
```
donne 9261. Enfin
```
ifactor(9261);
```
permet de conclure que

$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}.$$

Ainsi x est solution de l'équation

$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x.$$

En factorisant le polynôme sous-jacent
```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```
on obtient

$$(3x-4)(3x^2+4x+3) = 0.$$

Puisque $3x^2 + 4x + 3 > 0$, on peut conclure

$$x = 4/3.$$

Exercice 4 : [énoncé]
Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité est nulle, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation

$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$

et donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc

$$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

puis

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \ge 0$.

Exercice 5 : [énoncé]
(a) La suite (u_n) est croissante car

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(p+1)+1} + \dots + \frac{1}{(n+1)(p+1)} - \frac{1}{n+1} \ge 0$$

et $u_n \le \frac{np}{n+1} \le p$ donc (u_n) converge vers une limite ℓ.

(b) Commençons par le cas où $f'(0) = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [0\,;\alpha]$ on ait $\left|f'(x)\right| \le \varepsilon$ et par l'inégalité des accroissements finis, on obtient

$$\forall x \in [0\,;\alpha], \left|f(x)\right| \le \varepsilon |x|.$$

On a alors

$$|v_n| = \sum_{k=1}^{np} \frac{\varepsilon}{n+k} \le p\varepsilon$$

et donc $v_n \to 0$.
Pour le cas général, il suffit d'introduire $g(x) = f(x) - xf'(0)$. Puisque $g'(0) = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{np} g\left(\frac{1}{n+k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$v_n - u_n f'(0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et finalement $v_n \to \ell f'(0)$.

(c) Pour $f(x) = \ln(1+x)$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) = \ln(n(p+1)+1) - \ln(n+1) \to \ln(p+1).$$

On conclut $\ell = \ln(p+1)$.

(d) Pour $f(x) = \sqrt{x}$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{\sqrt{n+k}} \ge \frac{np}{\sqrt{(n+1)p}} \to +\infty.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Montrons que la suite (u_n) converge vers 0 par l'epsilontique...
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (ε_n) converge vers 0, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ pour lequel

$$\forall n \ge N, 0 \le \varepsilon_n \le \varepsilon$$

et alors pour tout $n \ge N$

$$0 \le u_{n+1} \le \frac{u_n + \varepsilon}{K}.$$

On en déduit

$$0 \le u_{n+2} \le \frac{u_n}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K^2} + \frac{\varepsilon}{K}$$

et par récurrence

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \le u_{n+p} \le \frac{u_n}{K^p} + \sum_{i=1}^{p} \frac{\varepsilon}{K^i}.$$

La suite (u_n) est majorée par 1 et on peut encore écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, 0 \le u_{n+p} \le \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K}\frac{1-(1/K)^p}{1-1/K} \le \frac{1}{K^p} + \frac{\varepsilon}{K-1}.$$

Pour p assez grand, on a $1/K^p \le \varepsilon$ et alors

$$0 \le u_{n+p} \le \varepsilon + \frac{\varepsilon}{K-1} = \lambda\varepsilon$$

avec λ une constante strictement positive ce qui permet de conclure.

Exercice 7 : [énoncé]
Cette fonction n'a pas de limite en 0, elle n'est donc pas continue par morceaux.

Exercice 8 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ car pour chaque x dans ce domaine, la fonction $t \mapsto 1/\ln t$ est définie et continue sur le segment d'extrémités x et x^2 car 1 n'y appartient pas. Pour $x \in]0\,;1[$, on a pour tout $t \in [x^2\,;x]$, $2\ln x \le \ln t \le \ln x$ puis par encadrement d'intégrales

$$\frac{x^2-x}{2\ln x} \le f(x) \le \frac{x^2-x}{\ln x}$$

et donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
L'encadrement est identique pour $x > 1$ ce qui permet d'affirmer $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
On peut aussi écrire

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{t}{t\ln t}\,\mathrm{d}t$$

et par encadrement du t du numérateur par x et x^2, on obtient $f(x)$ encadré par $xI(x)$ et $x^2I(x)$ avec

$$I(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_x^{x^2} = \ln 2$$

d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \ln 2$.

(b) On introduit H primitive de $t \mapsto 1/\ln t$ et on démontre que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$ avec $f'(x) = \frac{x-1}{\ln x}$. Cette dérivée étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on conclut que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$. On prolonge f par continuité en 1 en posant $f(1) = \ln 2$ et puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 1$, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec $f'(1) = 1$. Par développement en série entière $h \mapsto \frac{\ln(1+h)}{h}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc $x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1 et par passage à l'inverse $x \mapsto f'(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 1. Finalement f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$. Le calcul de $f''(x)$ permet de justifier que f'' n'a pas de limite finie en 0 et donc f ne peut être prolongée en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

(c) f est croissante, convexe, branche parabolique verticale en $+\infty$, tangente horizontale en l'origine.

Exercice 9 : [énoncé]

La fonction intégrée est bien définie et continue car $\frac{2t}{1+t^2} \in [-1\,;1]$.

On simplifie l'expression de la fonction intégrée.

Par parties, on intègre le facteur 1 multipliant l'arc sinus[1].

On pose

$$u(t) = t \quad \text{et} \quad v(t) = \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right).$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec $u'(t) = 1$ et, par dérivation de fonctions composées,

$$v'(t) = \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2}} = \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1-t^2}{|1-t^2|}.$$

Afin de poursuivre le calcul, il faut résoudre la valeur absolue : on découpe l'intégrale en $t = 1$ et l'on calcule séparément les deux intégrales.

D'une part,

$$\int_0^1 \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[t \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2t}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$$
$$= \arcsin(1) - \left[\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{2} - \ln 2.$$

D'autre part,

$$\int_1^{\sqrt3} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \left[t \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\right]_1^{\sqrt3} + \int_1^{\sqrt3} \frac{2t}{1+t^2} \,\mathrm{d}t$$
$$= \arcsin\left(\frac{\sqrt3}{2}\right) - \arcsin(1) + \left[\ln(1+t^2)\right]_1^{\sqrt3}$$
$$= \sqrt3 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \ln 2.$$

Finalement, en sommant ces deux calculs

$$\int_0^{\sqrt3} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sqrt3}.$$

Exercice 10 : [énoncé]

Puisque continue, la fonction f admet une primitive F sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x) - f(y) = F(2y+x) - F(2x+y).$$

Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, on obtient

$$f\colon x \mapsto f(y) + F(2y+x) - F(2x+y).$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f'(x) = f(2y+x) - 2f(2x+y).$$

En dérivant cette relation en la variable y, on obtient

$$0 = 2f'(2y+x) - 2f'(2x+y)$$

et donc

$$f'(2y+x) = f'(2x+y).$$

Puisque pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} 2x + y = s \\ x + 2y = t \end{cases}$$

on peut affirmer que la fonction f' est constante.
On en déduit que la fonction f est affine.
Par le calcul, on vérifie que, parmi les fonctions affines, seule la fonction nulle vérifie la relation proposée.

1. On peut aussi réaliser le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ afin d'exploiter $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) Par le changement de variable $u = \pi - t$, on obtient

$$I = \int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

et donc

$$2I = \int_0^\pi t f(\sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi (\pi - u) f(\sin u)\,\mathrm{d}u = \pi \int_0^\pi f(\sin u)\,\mathrm{d}u$$

puis l'identité proposée.

(b) En observant $\cos^{2n} x = (1 - \sin^2 x)^n$, on peut appliquer la relation précédente

$$I_n = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

En coupant l'intégrale en $\pi/2$

$$I_n = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right).$$

En procédant au changement de variable $y = \pi - x$ dans la seconde intégrale

$$I_n = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Enfin, en procédant au changement de variable $y = \pi/2 - x$, on observe

$$I_n = \pi \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x$$

et on en déduit

$$2I_n = \pi\left(\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{2n}(x)}{\sin^{2n}(x) + \cos^{2n}(x)}\,\mathrm{d}x\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Finalement

$$I_n = \frac{\pi^2}{4}.$$

Exercice 12 : [énoncé]

Posons $f_n(x) = x^n + x^2 - 1$. L'étude de la fonction f_n assure l'existence et l'unicité d'une solution $x_n \in \mathbb{R}_+$ à l'équation étudiée. De plus, on observe que $x_n \in [0\,;1]$.
Puisque $0 = f_{n+1}(x_{n+1}) \leq f_n(x_{n+1})$, on peut affirmer $x_{n+1} \geq x_n$.
La suite (x_n) est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ.
Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0\,;1]$, à la limite $\ell \in [0\,;1]$.
Si $\ell < 1$ alors

$$0 \leq x_n^n \leq \ell^n \to 0$$

et la relation $x_n^n + x_n^2 - 1 = 0$ donne à la limite $\ell^2 = 1$ ce qui est absurde.
On conclut que $\ell = 1$.
Posons $u_n = 1 - x_n$,
On a

$$(1 - u_n)^n = u_n(2 - u_n)$$

donc

$$n \ln(1 - u_n) = \ln u_n + \ln(2 - u_n)$$

d'où

$$-nu_n \sim \ln u_n \text{ puis } \ln n + \ln u_n \sim \ln(-\ln u_n)$$

or

$$\ln(-\ln u_n) = \mathrm{o}(\ln u_n)$$

donc

$$\ln u_n \sim -\ln n$$

puis

$$u_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

et enfin

$$x_n - 1 \sim -\frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Il suffit d'étudier $f_n \colon x \mapsto x^n - (x+1)$.

(b) $f_n(1) \leq 0$ donc $x_n \geq 1$. De plus

$$f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (x_n + 1) = x_n(x_n + 1) - (x_n + 1) = (x_n - 1)(x_n + 1) \geq 0$$

donc $x_{n+1} \leq x_n$. La suite (x_n) est décroissante et minorée par 1 donc elle converge vers $\ell \geq 1$.
Si $\ell > 1$ alors $x_n^n \geq \ell^n \to +\infty$ or $x_n^n = x_n + 1 \to \ell + 1$. Ce qui est impossible et il reste $\ell = 1$.

(c) On a
$$x^n = x+1 \iff n\ln x = \ln(x+1) \iff g(x) = \frac{1}{n}$$
avec
$$g(x) = \frac{\ln x}{\ln(x+1)}$$
définie sur $[1\,;+\infty[$. La fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $g'(x)>0$ donc g réalise une bijection de $[1\,;+\infty[$ vers $[0\,;1[$, de plus (puisque $g'(x)\neq 0$) g^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donc g^{-1} admet un $DL_n(0)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et donc $x_n = g^{-1}(1/n)$ admet un développement limité à tout ordre.
Formons ses trois premiers termes
$$g^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + \mathrm{o}(x^2)$$
$a = g^{-1}(0) = 1$. $g(g^{-1}(x)) = x$ donc
$$\ln(1+bx+cx^2+\mathrm{o}(x^2)) = x\ln(2+bx+\mathrm{o}(x^2))$$
puis
$$bx + \left(c - \frac{b^2}{2}\right)x^2 + \mathrm{o}(x^2) = \ln(2)x + \frac{b}{2}x^2 + \mathrm{o}(x^2)$$
donc
$$b = \ln 2 \text{ et } c = \frac{(1+\ln(2))\ln(2)}{2}.$$
Finalement
$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(1+\ln(2))\ln 2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 14 : [énoncé]

(a) La fonction $x\mapsto P_n(x)$ est strictement décroissante sur $[0\,;1]$ car
$$P_n'(x) = n(x^{n-1}-1)$$
est strictement négatif sauf pour $x=1$.
La fonction continue P_n réalise donc une bijection strictement décroissante de $[0\,;1]$ vers $[P_n(1)\,;P_n(0)] = [2-n\,;1]$.
On en déduit l'existence et l'unicité de la solution x_n à l'équation $P_n(x) = 0$.

(b) Puisque $x_n\in[0\,;1]$, on a $x_n^{n+1}\leq x_n^n$ puis
$$P_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} - (n+1)x_n + 1 \leq P_n(x_n) = 0.$$
Ainsi $P_{n+1}(x_n)\leq P_{n+1}(x_{n+1})$ et donc $x_{n+1}\leq x_n$ car la fonction P_{n+1} est strictement décroissante.
La suite (x_n) est décroissante et minorée, elle converge donc vers un réel $\ell\in[0\,;1]$.
Si $\ell>0$ alors
$$P_n(x_n) = x_n^n - nx_n + 1 \to -\infty$$
ce qui est absurde. On conclut $\ell = 0$.

(c) On a
$$\frac{x_n^n}{nx_n} = \frac{1}{n}x_n^{n-1} \to 0$$
et donc $x_n^n = \mathrm{o}(nx_n)$.
Sachant $x_n^n - nx_n + 1 = 0$, on obtient $nx_n \sim 1$ puis
$$x_n \sim \frac{1}{n}.$$
Écrivons ensuite
$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon_n}{n} \text{ avec } \varepsilon_n \to 0.$$
Puisque $x_n^n = nx_n - 1$, on a
$$\varepsilon_n = x_n^n = \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} \geq 0.$$
Nous allons montrer
$$(1+\varepsilon_n)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
ce qui permettra de déterminer un équivalent de ε_n puis de conclure.
Puisque $\varepsilon_n\to 0$, pour n assez grand, on a $|1+\varepsilon_n|\leq 2$ et alors
$$\varepsilon_n = \frac{(1+\varepsilon_n)^n}{n^n} \leq \frac{2^n}{n^n}.$$
On en déduit
$$1 \leq (1+\varepsilon_n)^n \leq \left(1+\frac{2^n}{n^n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{2^n}{n^n}\right)\right).$$
Or
$$n\ln\left(1+\frac{2^n}{n^n}\right) \sim \frac{2^n}{n^{n-1}} \to 0$$
et par encadrement
$$(1+\varepsilon_n)^n \to 1.$$

On peut conclure $\varepsilon_n \sim \frac{1}{n^n}$ et finalement

$$x_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^{n+1}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{n+1}}\right).$$

Exercice 15 : [énoncé]
Pour $x \in [0\,;1]$,

$$\left|\sin x - x + \frac{1}{6}x^3\right| \leq \frac{1}{120}.$$

On a donc

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{k^3}{n^6} + M_n$$

avec

$$|M_n| \leq \frac{1}{120}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^5}{n^{10}} \leq \frac{1}{120}\frac{1}{n^4}$$

donc $M_n = \mathrm{o}(1/n^3)$.
Or

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^6}\sum_{k=1}^{n}k^3 \sim \frac{1}{4n^2}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{24n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) La fonction f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} I_k$ avec

$$I_k = \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\,;\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[.$$

Pour $x \in \mathcal{D}$, la tangente en $(x, f(x))$ passe par O si, et seulement si, $xf'(x) = f(x)$.
Après transformation, ceci équivaut pour $x > 0$ à l'équation

$$x\tan x + \ln(\cos(x)) + x = 0.$$

Posons $\varphi(x) = x\tan x + \ln(\cos(x)) + x$.
φ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
$\varphi'(x) = x(1+\tan^2 x) + 1 > 0$ sur $\mathcal{D}\cap\mathbb{R}_+^*$.
Quand $x \to \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^-$, $\varphi(x) \to +\infty$. Quand $x \to \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^+$, $\varphi(x) \to -\infty$.
$\varphi_{\restriction I_k}$ réalise donc une bijection de I_k vers $\mathbb{R}$ (pour $k \in \mathbb{N}^*$).
La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $x_n = (\varphi_{\restriction I_n})^{-1}(0)$ est solution.

(b) Evidemment $x_n \sim 2n\pi$ et donc $x_n = 2n\pi + y_n$.
Après calculs, on obtient

$$(2n\pi + y_n)(\cos y_n + \sin y_n) = -\cos(y_n)\ln(\cos y_n).$$

La fonction $t \mapsto t\ln t$ est bornée sur $]0\,;1]$ car prolongeable par continuité en 0 et donc

$$\cos y_n + \sin y_n = -\frac{\cos y_n \ln(\cos y_n)}{2n\pi + y_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Sachant $|y_n| < \pi/2$, on en déduit $y_n \to -\pi/4$.
On conclut

$$x_n = 2n\pi - \frac{\pi}{4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 17 : [énoncé]
En associant dans $P^2 = P \times P$ chaque diviseur d avec celui qui lui est conjugué n/d, on obtient un produit de N termes égaux à n. Ainsi

$$P^2 = n^N.$$

Exercice 18 : [énoncé]
Si $n = ab$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$ alors

$$2^n - 1 = (2^a - 1)(1 + 2^a + \cdots + 2^{a(b-1)})$$

donc $2^a - 1 \mid 2^n - 1$ d'où $2^a - 1 = 1$ ou $2^a - 1 = 2^n - 1$ ce qui implique $a = 1$ ou $a = n$.
Ainsi n ne possède que des diviseurs triviaux, il est premier.

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Pour k suffisamment grand $\lfloor n/p^k \rfloor = 0$, la somme évoquée existe donc car elle ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$, parmi les entiers allant de 1 à n, il y en a exactement $\lfloor n/p \rfloor$ divisibles par p, $\lfloor n/p^2 \rfloor$ divisibles par p^2, etc... donc

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

(b) On a

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Pour tout $p \in \mathcal{P}$,

$$v_p\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$$

or $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \leq \operatorname{Card}\left\{ k \in \mathbb{N}^* \,\middle|\, \lfloor 2n/p^k \rfloor > 0 \right\} \leq \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor.$$

De plus les nombres premiers diviseurs de $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ sont diviseurs d'un entier inférieur à $2n$ (lemme d'Euclide) et sont donc eux-mêmes inférieur à $2n$. Il en découle

$$\binom{2n}{n} \mid \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$$

car toutes les puissances de nombres premiers intervenant dans la décomposition de $\binom{2n}{n}$ divisent $\prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$.
Notons qu'en fait ce produit désigne

$$\operatorname{ppcm}(1, 2, \ldots, 2n).$$

(c) On a

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} p^{\frac{\ln(2n)}{\ln p}} \leq \prod_{p \in \mathcal{P}; p \leq 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}.$$

(d) En passant au logarithme :

$$\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \pi(2n)\ln(2n).$$

À l'aide d'une comparaison intégrale on obtient

$$\int_1^n \ln(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \int_1^{(n+1)} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$n\ln n - n + 1 \leq \sum_{k=1}^{n} \ln k \leq (n+1)\ln(n+1) - n$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \ln k = n\ln n - n + \mathrm{O}(\ln n).$$

Par suite

$$\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k = 2n\ln(2n) - 2n - 2(n\ln n - n) + \mathrm{O}(\ln n)$$

puis

$$\sum_{k=1}^{2n} \ln k - 2\sum_{k=1}^{n} \ln k \sim \ln(2)(2n).$$

On en déduit

$$\frac{2n}{\ln 2n} = \mathrm{O}(\pi(2n)).$$

Ajoutons

$$\frac{x}{\ln x} \sim \frac{2\lfloor x/2 \rfloor}{\ln 2\lfloor x/2 \rfloor}$$

par calculs et $\pi(x) \sim \pi(2\lfloor x/2 \rfloor)$ car $\pi(x)$ et $\pi(2\lfloor x/2 \rfloor)$ ne différent qu'au plus d'une unité et $\pi(x) \to +\infty$.
Finalement, une certaine satisfaction.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On a

$$P_0 \left| \begin{matrix} 1 - y_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \text{ et } Q_0 \left| \begin{matrix} 1 + y_0(x_1 - 1) \\ y_0 y_1 \end{matrix} \right.$$

(en considérant que les cas singuliers sont les prolongements du cas général)
On en déduit

$$\begin{cases} x_2 = x_0 + y_0 x_1 \\ y_2 = y_0 y_1. \end{cases}$$

(b) Avec des notations immédiates

$$(M_0 * M_1) * M_2 \left| \begin{matrix} (x_0 + y_0x_1) + (y_0y_1)x_2 \\ (y_0y_1)y_2 \end{matrix} \right. \text{ et } M_0 * (M_1 * M_2) \left| \begin{matrix} x_0 + y_0(x_1 + y_1x_2) \\ y_0(y_1y_2) \end{matrix} \right.$$

et on vérifie bien l'associativité de la loi $*$.
On remarque que

$$B * M = M * B = M$$

donc B est élément neutre de la loi $*$.
Enfin si $y_0 \neq 0$ alors pour

$$\begin{cases} x_1 = -x_0/y_0 \\ y_1 = 1/y_0 \end{cases}$$

on observe

$$M_0 * M_1 = M_1 * M_0 = B$$

et donc on peut affirmer que M_0 est inversible d'inverse M_1.

(c) On a

$$y_n = y_{n-1}y_{n-2}$$

et on peut donc affirmer qu'il est possible d'écrire y_n sous la forme

$$y_n = y_0^{a_n} y_1^{b_n}$$

avec

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0, a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ b_0 = 0, b_1 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}. \end{cases}$$

Les suites (a_n) et (b_n) sont récurrente linéaires d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 = r + 1$ de racines

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

On obtient après calculs

$$a_n = \frac{r_2}{r_2 - r_1} r_1^n + \frac{r_1}{r_1 - r_2} r_2^n \text{ et } b_n = \frac{r_2^n - r_1^n}{r_2 - r_1}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Supposons $\sqrt{6} = p/q$ avec $p \wedge q = 1$. On a $6q^2 = p^2$ donc p pair, $p = 2k$. On obtient alors $3q^2 = 2k^2$ et donc q est pair. Absurde car p et q sont premiers entre eux.

(b) Par développement selon la formule du binôme de Newton

$$(a + \sqrt{b})^n = \alpha_k + \beta_k \sqrt{b} \text{ avec } \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{Z}.$$

(c) $a + \sqrt{b}$ racine de $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ donne

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k = \left(\sum_{k=0}^n a_k \beta_k \right) \sqrt{b}.$$

L'irrationalité de $\sqrt{b}$ entraîne

$$\sum_{k=0}^n a_k \alpha_k = \sum_{k=0}^n a_k \beta_k = 0$$

ce qui permet de justifier qu'alors $P(a - \sqrt{b}) = 0$.

(d) Posons

$$Q = (X - a + \sqrt{b})(X - a - \sqrt{b}) = X^2 - 2aX + a^2 - b \in \mathbb{Z}[X].$$

Par division euclidienne $P = QS + T$ avec $\deg T < 2$. Or en posant cette division euclidienne, on peut affirmer que $S, T \in \mathbb{Z}[X]$ avec $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ et Q unitaire. $a + \sqrt{b}, a - \sqrt{b}$ racine de P entraîne $T = 0$ et donc $P = QS$ avec $Q, S \in \mathbb{Z}[X]$. En dérivant $P' = Q'S + QS'$ et $a + \sqrt{b}$ entraîne racine de P' donne $a + \sqrt{b}$ racine de S. On peut alors comme ci-dessus justifier $S = QR$ avec $R \in \mathbb{Z}[X]$ et conclure.

Exercice 22 : [énoncé]
L'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i) est immédiate.
Supposons (i).
Puisque P est de signe constant, la décomposition en facteurs irréductibles de P s'écrit avec des facteurs de la forme

$$(X - \lambda)^2 = (X - \lambda)^2 + 0^2$$

et

$$X^2 + 2pX + q = (X + p)^2 + \left(\sqrt{q - p^2} \right)^2.$$

Ainsi P est, à un facteur multiplicatif positif près, le produit de polynômes s'écrivant comme la somme des carrés de deux polynômes réels.
Or

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2$$

donc P peut s'écrire comme la somme des carrés de deux polynômes réels

Exercice 23 : [énoncé]
Le polynôme nul est solution. Soit P une solution non nulle.
Si a est racine de P alors a^2 l'est aussi puis $a^4, a^8, \dots$.
Or les racines de P sont en nombre fini donc les éléments a^{2^n} $(n \in \mathbb{N})$ sont redondants. On en déduit que $a = 0$ ou a est une racine de l'unité.
De plus, si a est racine de P alors $(a-1)$ est aussi racine de $P(X+1)$ donc $(a-1)^2$ est racine de P. On en déduit que $a-1=0$ ou $a-1$ est racine de l'unité.
Si $a \neq 0, 1$ alors $|a| = |a-1| = 1$ d'où l'on tire $a = -j$ ou $-j^2$.
Au final, les racines possibles de P sont $0, 1, -j$ et $-j^2$.
Le polynôme P s'écrit donc

$$P(X) = \lambda X^\alpha (X-1)^\beta (X+j)^\gamma (X+j^2)^\delta$$

avec $\lambda \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{N}$.
En injectant cette expression dans l'équation

$$P(X^2) = P(X)P(X+1)$$

on obtient

$$\lambda^2 = \lambda, \alpha = \beta \text{ et } \gamma = \delta = 0.$$

On conclut

$$P(X) = \big(X(X-1)\big)^\alpha.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Montrons la propriété par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$, $P_1(X) = X$ convient.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
En dérivant la relation

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(\sin x)}{(\cos x)^{n+1}}$$

on obtient

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(n+1)\sin x P_n(\sin x) + \cos^2 x P_n'(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}.$$

Posons alors

$$P_{n+1}(X) = (n+1)XP_n(X) + (1-X^2)P_n'(X)$$

de sorte que

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{P_{n+1}(\sin x)}{(\cos x)^{n+2}}.$$

On peut écrire

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \text{ avec } a_k \geq 0, a_n \neq 0$$

et alors

$$P_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n (n+1-k) a_k X^{k+1} + \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1}$$

est un polynôme de degré $n+1$ à coefficients positif ou nul.
Récurrence établie.
Par la relation de récurrence obtenue ci-dessus

$$P_1(X) = X, P_2(X) = 1 + X^2 \text{ et } P_3(X) = 5X + X^3$$

et

$$P_{n+1}(1) = (n+1)P_n(1)$$

donc

$$P_n(1) = n!$$

Exercice 25 : [énoncé]
Puisque $\alpha + \beta + \gamma = -a$, on a

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = -\left(\frac{\alpha}{a+\alpha} + \frac{\beta}{a+\beta} + \frac{\gamma}{a+\gamma}\right)$$

et réduisant au même dénominateur

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} = \frac{a^3 - 2ab + 3c}{ab - c}$$

car $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = b$ et $\alpha\beta\gamma = -c$.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) L'égalité

$$\sin\big((2n+1)\alpha\big) = \operatorname{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)\alpha}\big) = \operatorname{Im}\big((\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^{2n+1}\big)$$

donne en développant

$$\sin\big((2n+1)\alpha\big) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} \cos^{2(n-p)}\alpha . \sin^{2p+1}\alpha.$$

(b) On observe

$$\sin\big((2n+1)\alpha\big) = \sin^{2n+1}\alpha P(\cot^2\alpha).$$

Posons $\beta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ pour $1 \leq k \leq n$. Les $x_k = \cot^2\beta_k$ sont n racines distinctes de P, or $\deg P = n$, ce sont donc exactement les racines de P.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) $1, j, j^2$ conviennent.

(b) Introduisons le polynôme $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)$. Les coefficients de ce polynôme s'expriment à partir de $S_1 = a+b+c$, $S_2 = a^2+b^2+c^2$ et $S_3 = a^3+b^3+c^3$, le polynôme P est donc à coefficients réels. S'il n'admet pas trois racines, il possède deux racines complexes conjuguées. Celles-ci sont alors de même module ce qui est exclu.

Exercice 28 : [énoncé]

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $F = P/Q$.
Le cas où $P = 0$ étant immédiat, supposons-le désormais exclu.
Posons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$ et écrivons

$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell, a_k, b_\ell \in \mathbb{C}.$$

Considérons $p+q+1$ naturels n n'annulant pas Q. Pour chacun, la relation

$$P(n) - y_n Q(n) = 0 \text{ avec } F(n) = y_n \in \mathbb{Q}$$

définit une équation

$$a_0 + na_1 + \cdots + n^p a_p - y_n b_0 - \cdots - y_n n^q b_q = 0.$$

Le système formé par ses équations est compatible (dans $\mathbb{C}$) et à coefficients rationnels. Par application de la méthode de Gauss (par exemple), on peut affirmer que ce système possède une solution rationnelle. Il existe donc

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{Q}$$

tels que pour

$$R = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k \in \mathbb{Q}[X] \text{ et } S = \sum_{\ell=0}^{q} \beta_\ell X^\ell \in \mathbb{Q}[X]$$

on ait

$$R(n) - y_n S(n) = 0$$

pour chacun de $p+q+1$ naturels n initialement considéré. On a alors pour ces n,

$$P(n)S(n) = Q(n)R(n)$$

et donc le polynôme

$$PS - QR$$

admet au moins $p+q+1$ racines.
Or

$$\deg(PS - QR) \le p+q$$

donc

$$PS = QR$$

puis

$$F = \frac{R}{S} \in \mathbb{Q}(X).$$

Exercice 29 : [énoncé]

On a

$$\frac{P''}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k} \text{ avec } \alpha_k = \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}.$$

Sachant que

$$\frac{xP''(x)}{P(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Exercice 30 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $p = \dim E - \dim F_1$.
Si $\dim E - \dim F_1 = 0$ alors $G = \{0_E\}$ convient.
Supposons la propriété établie au rang $p \ge 0$.
Soient F_1 et F_2 de même dimension tels que $\dim E - \dim F_1 = p+1$.
Si $F_1 = F_2$ l'existence d'un supplémentaire à tout sous-espace vectoriel en dimension finie permet de conclure.
Sinon, on a $F_1 \not\subset F_2$ et $F_2 \not\subset F_1$ ce qui assure l'existence de $x_1 \in F_1 \setminus F_2$ et de $x_2 \in F_2 \setminus F_1$.
Le vecteur $x = x_1 + x_2$ n'appartient ni à F_1, ni à F_2. On pose alors $F_1' = F_1 \oplus \mathrm{Vect}(x)$ et $F_2' = F_2 \oplus \mathrm{Vect}(x)$. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à F_1' et F_2' : on obtient l'existence d'un supplémentaire commun G' à F_1' et F_2'. $G = G' \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est alors supplémentaire commun à F_1 et F_2.
Récurrence établie.

(b) Soit F_1' un sous-espace vectoriel contenant F_1 et de même dimension que F_2. F_1' et F_2 possèdent un supplémentaire commun G. Considérons H un supplémentaire de F_1 dans F_1'. En posant $G_1 = H \oplus G$ et $G_2 = G$ on conclut.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Si $a=0$ ou $n=2$, la famille est assurément liée, peu importe l'endomorphisme f : $F_a=\mathcal{L}(E)$.

(b) $F_a\subset\mathcal{L}(E)$ et $0\in F_a$. Soit $f,g\in F_a$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in E$, les familles $\big(x,f(x),a\big)$ et $\big(x,g(x),a\big)$ sont liées.
Si (x,a) est liée alors assurément $\Big(x,\big(\lambda f+\mu g\big)(x),a\Big)$ liée.
Si (x,a) est libre

$$f(x)\in\mathrm{Vect}(x,a) \text{ et } g(x)\in\mathrm{Vect}(x,a) \text{ donc } \big(\lambda f+\mu g\big)(x)\in\mathrm{Vect}(x,a)$$

et donc $\Big(x,(\lambda f+\mu g)(x),a\Big)$ est liée.

(c) « Classiquement », ce sont les homothéties vectorielles : $v=\lambda Id_H$.

(d) Les cas $n=2$ et $a=0$ étant déjà résolus, on suppose $n\geq 3$ et $a\neq 0$.
Soit φ une forme linéaire telle que $\varphi(a)=1$, H son noyau et p la projection sur H parallèlement à $\mathrm{Vect}\,a$:

$$p(x)=x-\varphi(x)a.$$

Pour tout $x\in E$, on a

$$\mathrm{Vect}\big(x,f(x),a\big)=\mathrm{Vect}\Big(p(x),p\big(f(x)\big),a\Big)=\mathrm{Vect}\Big(p(x),p\big(f(x)\big)\Big)\oplus\mathrm{Vect}(a).$$

Si la famille $\big(x,f(x),a\big)$ est liée alors la famille $\big(p(x),p\big(f(x)\big)\big)$ l'est aussi. On en déduit qu'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que

$$\forall x\in H, p\big(f(x)\big)=\lambda x \text{ i.e. } f(x)=\lambda x+\varphi(f(x))a.$$

On a alors

$$\begin{aligned}\forall x\in E, f(x)&=f\big(\varphi(x)a+x-\varphi(x)a\big)\\&=\varphi(x)f(a)+f\big(\underbrace{x-\varphi(x)a}_{\in H}\big)\\&=\varphi(x)f(a)+\lambda x-\lambda\varphi(x)a+\varphi(f(x))a-\varphi(x)\varphi(f(a))a\\&=\varphi(x)f(a)+\lambda x+\psi(x)a\end{aligned}$$

avec ψ une forme linéaire.
Pour suivre, montrons que $f(a)$ est colinéaire à a.
Soit b un vecteur indépendant de a.
La famille $\big(b,f(b),a\big)$ est liée donc $f(b)\in\mathrm{Vect}(a,b)$.
La famille $\big(a+b,f(a)+f(b),a\big)$ est liée donc
$f(a)+f(b)\in\mathrm{Vect}(a+b,a)=\mathrm{Vect}(a,b)$ puis $f(a)\in\mathrm{Vect}(a,b)$.
Soit c un vecteur n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}(a,b)$ (possible car $n\geq 3$). Par le raisonnement ci-dessus, $f(a)\in\mathrm{Vect}(a,c)$ et donc

$$f(a)\in\mathrm{Vect}(a,b)\cap\mathrm{Vect}(a,c)=\mathrm{Vect}(a).$$

On en déduit que la fonction f s'exprime

$$f(x)=\lambda x+\theta(x)a \text{ avec } \theta \text{ une forme linéaire.}$$

La réciproque étant immédiate, et l'écriture ci-dessus étant unique, on peut conclure

$$\dim F_a=\dim\mathbb{K}\times E^*=n+1.$$

Exercice 32 : [énoncé]

Puisque $\mathrm{Im}\,f^2\subset\mathrm{Im}\,f\subset\mathbb{R}^6$, on a $3\leq\mathrm{rg}\,f\leq 6$.
Si $\mathrm{rg}\,f=6$ alors f est un isomorphisme, donc f^2 aussi et $\mathrm{rg}\,f^2=6$. Contradiction.
Si $\mathrm{rg}\,f=5$ alors $\dim\mathrm{Ker}\,f=1$. Considérons $g=f|_{\mathrm{Im}\,f}$. Par le théorème du rang $\dim\mathrm{Ker}\,g=5-\mathrm{rg}\,g$. Or $\mathrm{Im}\,g\subset\mathrm{Im}\,f^2$ donc $\mathrm{rg}\,g\leq 3$ et par suite $\dim\mathrm{Ker}\,g\geq 2$. Or $\mathrm{Ker}\,g\subset\mathrm{Ker}\,f$ donc $\dim\mathrm{Ker}\,f\geq 2$. Contradiction.
$\mathrm{rg}\,f=3$ et $\mathrm{rg}\,f=4$ sont possibles en considérant :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Si f est bijectif (nécessairement $n=p$), il suffit de composer de part et d'autre par f^{-1} pour écrire

$$\begin{aligned}f\circ g\circ g=0&\iff f\circ g=0\\&\iff g=0.\end{aligned}$$

(b) Dans des bases adaptées, l'application linéaire f peut être figurée par la matrice J_r canonique de rang r de type (n,p). Par représentation matricielle, l'espace H est alors isomorphe à

$$\big\{M\in\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})\,\big|\,J_rMJ_r=O_n\big\}.$$

Un calcul par blocs, montre que les matrices solutions sont celles de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \mathrm{O}_r.$$

La dimension de H s'en déduit.

(c) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $u_{i,j}$ l'endomorphisme de E envoyant e_i sur e_j et les autres vecteurs de bases sur 0_E ($u_{i,j}$ est l'endomorphisme figuré par la matrice élémentaire $E_{i,j}$).
On peut écrire

$$f = \sum_{k,\ell=1}^{n} a_{k,\ell} u_{k,\ell}$$

avec $A = (a_{k,\ell})$ la matrice figurant f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$.
Sachant $u_{i,j} \circ u_{k,\ell} = \delta_{j,k} u_{i,\ell}$, il vient

$$u_{i,j} \circ f = \sum_{\ell=1}^{n} a_{j,\ell} u_{i,\ell}$$

puis

$$f \circ u_{i,j} \circ f = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_{k,i} a_{j,\ell} u_{k,\ell}.$$

La coordonnée selon $u_{i,j}$ de $\varphi(u_{i,j})$ est donc $a_{i,i} a_{j,j}$. On en déduit

$$\mathrm{tr}(\varphi) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,i} a_{j,j} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,j}\right) = (\mathrm{tr}\, f)^2.$$

Exercice 34 : [énoncé]
Soit f solution. La matrice de f relative à la base canonique est à coefficients entiers. De plus f est un automorphisme car les vecteurs de la base canonique sont des valeurs prises par f et comme $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$, la matrice de f^{-1} relative à la base canonique est à coefficients entiers. Inversement, si f est un automorphisme telle que f et f^{-1} soient représentés par des matrices à coefficients entiers dans la base canonique, il est immédiat que $f(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ et que $f^{-1}(\mathbb{Z}^n) \subset \mathbb{Z}^n$ donc que $\mathbb{Z}^n \subset f(\mathbb{Z}^n)$ et finalement $f(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{Z}^n$. Notons que les endomorphismes solutions peuvent aussi se décrire comme étant les endomorphismes canoniquement représentés par une matrice à coefficients entiers et qui sont de déterminant égal à 1 ou -1.

Exercice 35 : [énoncé]
Par récurrence sur $n \geq 1$.
La propriété est immédiate pour $n = 1$.
Supposons la propriété vraie au rang $n \geq 1$.
Soit $T \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure commutant avec sa transposée.
On peut écrire

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & {}^tX \\ O_{n,1} & S \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in \mathbb{K}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure.
L'identification du coefficient d'indice $(1,1)$ dans la relation ${}^tTT = T{}^tT$ donne

$$\alpha^2 = \alpha^2 + {}^tXX.$$

On en déduit $X = O_{n,1}$ et l'égalité ${}^tTT = T{}^tT$ donne alors ${}^tSS = S{}^tS$.
Par hypothèse de récurrence, la matrice S est diagonale et par conséquent la matrice T l'est aussi.
Récurrence établie.

Exercice 36 : [énoncé]
Supposons que M soit semblable à une matrice M' via une matrice inversible P *i.e.*

$$M' = P^{-1}MP.$$

Si on peut écrire $M' = A'B' - B'A'$ alors $M = AB - BA$ avec $A = PA'P^{-1}$ et $B = PB'P^{-1}$.
On peut ainsi transformer la matrice M en une matrice semblable sans changer la problématique.
Établissons maintenant le résultat demandé en raisonnant par récurrence sur la taille de la matrice M.
Si M est taille 1 : ok
Supposons la propriété établie au rang $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit M une matrice carrée d'ordre $n+1$ de trace nulle.
Montrons que M est semblable à une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline * & * \end{array}\right).$$

Si M est matrice d'une homothétie alors $\mathrm{tr}\, M = 0$ permet de conclure $M = O_n$.
Sinon, il existe des vecteurs qui ne sont pas vecteurs propres de l'endomorphisme associé à M.
Soit x, un tel vecteur. En introduisant une base dont x et $f(x)$ sont les deux premiers vecteurs, on obtient que la matrice M est semblable à celle voulue.

Compte tenu de la remarque préliminaire, on suppose désormais que la matrice M est de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline C & M' \end{array}\right)$$

avec $\operatorname{tr} M' = 0$.
Par l'hypothèse de récurrence on peut écrire

$$M' = A'B' - B'A'.$$

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ qui n'est par valeur propre de la matrice B'.
En posant

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 1 & L(B'-\lambda I)^{-1} \\ \hline (\lambda I - B')^{-1}C & A' \end{array}\right)$$

et

$$B = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & B' \end{array}\right)$$

on obtient

$$M = AB - BA.$$

Récurrence établie.

Exercice 37 : [énoncé]

(a) L'application considérée est au départ d'un ensemble infini et à valeurs dans un ensemble fini, elle ne peut donc être injective et il existe $k < \ell \in \mathbb{N}$, $M^k = M^\ell$ ce qui fournit $M^p = I_n$ avec $p = \ell - k$ car M est inversible. On en déduit que $I_n \in H$ et que $M^{-1} = M^{p-1} \in H$. Cela suffit pour conclure que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

(b) Si $M \in H$ alors $N \mapsto MN$ et $N \mapsto NM$ sont des permutations de H. On en déduit que $MP = PM = P$ car pour chaque terme les sommes portent sur les mêmes éléments.

$$P^2 = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} MP = \frac{1}{q}\sum_{M\in H} P = P.$$

(c) Puisque $P^2 = P$, $\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker}(P - I_n)$ et $\operatorname{Ker} P$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Si $X \in \operatorname{Ker} P$ alors $PX = 0$ et pour tout $M \in H$, $PMX = PX = 0$ donc $MX \in \operatorname{Ker} P$. Ainsi $\operatorname{Ker} P$ est stable par H.
Si $X \in \bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n)$ alors pour tout $M \in H$, $MX = X$ donc $PX = X$ puis $X \in \operatorname{Ker}(P - I_n)$.
Inversement, si $X \in \operatorname{Ker}(P - I_n)$ alors $PX = X$ et pour tout $M \in H$, $X = PX = MPX = MX$ et donc $X \in \bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n)$. Ainsi

$$\bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n) = \operatorname{Ker}(P - I_n)$$

et $\operatorname{Ker} P$ est solution du problème posé.

(d) P est une projection donc $\operatorname{tr} P = \operatorname{rg} P \in \mathbb{N}$ et donc $\sum_{M\in H} \operatorname{tr} M = q \operatorname{tr} P \in q\mathbb{N}$.
Si $\sum_{M\in H} \operatorname{tr} M = 0$ alors $P = 0$. Par suite $\bigcap_{M\in H} \operatorname{Ker}(M - I_n) = \{0\}$ et il n'y a donc pas de vecteur non nul invariant pour tous les éléments de H et inversement.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Pour $a, b \in \mathbb{C}$, l'application $\varphi_{a,b} \colon z \mapsto az + b\bar{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et sa matrice dans la base $(1, i)$ est

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b & \operatorname{Im} b - \operatorname{Im} a \\ \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b & \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b \end{pmatrix}.$$

Pour f endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

dans la base $(1, \mathrm{i})$, on a $f = \varphi_{a,b}$ si, et seulement si,

$$\begin{cases} \operatorname{Re} a + \operatorname{Re} b = \alpha \\ \operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b = \beta \\ \operatorname{Im} b - \operatorname{Im} a = \gamma \\ \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b = \delta. \end{cases}$$

Ce système possède une unique solution qui est

$$a = \frac{\alpha+\delta}{2} + \mathrm{i}\frac{\beta-\gamma}{2} \text{ et } b = \frac{\alpha-\delta}{2} + \mathrm{i}\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

(b) Le déterminant de f vaut

$$\det f = \alpha\delta - \beta\gamma = |a|^2 - |b|^2.$$

Exercice 39 : [énoncé]

(a) En multipliant les n dernières lignes par i et les n dernières colonnes aussi :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ -iB & -A \end{pmatrix}$$

puis par opérations sur les lignes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A & iB \\ A-iB & -A+iB \end{pmatrix}$$

et par opérations sur les colonnes

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det\begin{pmatrix} A+iB & iB \\ 0 & -A+iB \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = (-1)^n \det(A+iB)\det(-A+iB)$$

et enfin

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} = \det(A+iB)\det(A-iB).$$

Les matrices A et B étant réelles, cette écriture est de la forme $z\bar{z} = |z|^2 \geq 0$.

(b) $\det(A+iB)\det(A-iB) = \det(A^2+B^2)$ car A et B commutent donc $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple.

(d) Si A est inversible, on remarque

$$\begin{pmatrix} I & O \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B+D \end{pmatrix}$$

donc $\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(-CA^{-1}B+D) = \det(AD-CB)$ car A et C commutent.

On étend cette égalité aux matrices non inversibles par densité :

Les applications $A \mapsto \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $A \mapsto \det(AD-CB)$ sont continues et coïncident sur l'ensemble des matrices inversibles commutant avec C. Or cet ensemble est dense dans l'ensemble des matrices commutant avec C : si A commute avec C alors pour tout $\lambda > 0$ assez petit $A+\lambda I_n$ est inversible et commute avec C). Par coïncidence d'applications continues sur une partie dense, les deux applications sont égales.

Exercice 40 : [énoncé]

Considérons le polynôme

$$P(X) = (X-a_1)(X-a_2)\dots(X-a_n).$$

Celui-ci se développe sous la forme

$$P(X) = X^n + \alpha_{n-1}X^{n-1} + \dots + \alpha_0$$

avec $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$ et en particulier $\alpha_k = (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}$ où les $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ désignent les expressions symétriques élémentaires en $a_1, \dots, a_n$.
En procédant à l'opération $C_n \leftarrow C_n + \sum_{j=0}^{k-1} \alpha_j C_{j+1} + \sum_{j=n}^{n-1} \alpha_j C_j$, les coefficients de la dernière colonne de la matrice sont transformés en

$$P(a_i) - \alpha_k a_i^k = -\alpha_k a_i^k \text{ car } P(a_i) = 0.$$

Ainsi

$$D_k = (-1)^{n+1-k}\sigma_{n-k}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^k \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} & a_2^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^k \end{vmatrix}.$$

En permutant de façon circulaire les $n-k$ dernières colonnes, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{k-1} & a_1^k & a_1^{k+1} & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{k-1} & a_2^k & a_2^{k+1} & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{k-1} & a_n^k & a_n^{k+1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Sachant calculer un déterminant de Vandermonde, on obtient

$$D_k = \sigma_{n-k}\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j - a_i).$$

Exercice 41 : [énoncé]

En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$.
Pour $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1}\prod_{i\neq k}(\lambda_k - \lambda_i)V_{n-1}(\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_k, \dots, \lambda_n) = (-1)^{n+1}V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

où $V_n(a_1, \dots, a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1, \dots, a_n)$.
Le polynôme Δ coïncide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1}V_n(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, ils sont donc égaux.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Par les opérations $L_{n+1} \leftarrow L_{n+1} + L_1, \dots, L_{2n} = L_{2n} + L_n$,

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B + \mathrm{I}_n & \mathrm{I}_n + B \end{vmatrix}.$$

Par les opérations $C_1 \leftarrow C_1 - C_{n+1}, \dots, C_n \leftarrow C_n - C_{2n}$,

$$\det A = \begin{vmatrix} \mathrm{I}_n - B & B \\ O_n & \mathrm{I}_n + B \end{vmatrix} = \det(\mathrm{I}_n - B)\det(\mathrm{I}_n + B).$$

Ainsi A est inversible si, et seulement si, $\mathrm{I}_n - B$ et $\mathrm{I}_n + B$ le sont (*i.e.* $1, -1 \notin \mathrm{Sp}\, B$).
On aurait aussi pu étudier le noyau de A.

(b) On peut présumer que l'inverse de A est alors de la forme

$$\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix}.$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} \mathrm{I}_n & B \\ B & \mathrm{I}_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M & N \\ N & M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M + BN & N + BM \\ BM + N & BN + M \end{pmatrix}$$

et puisque

$$\begin{cases} M + BN = \mathrm{I}_n \\ BM + N = \mathrm{O}_n \end{cases} \iff \begin{cases} M = \left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} \\ N = -B\left(\mathrm{I}_n - B^2\right)^{-1} \end{cases}$$

on obtient

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} (\mathrm{I}_n - B^2)^{-1} & -B(\mathrm{I}_n - B^2)^{-1} \\ -B(\mathrm{I}_n - B^2)^{-1} & (\mathrm{I}_n - B^2)^{-1} \end{pmatrix}.$$

On aurait pu aussi inverser l'équation $AX = Y$

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. $\operatorname{tr} u = 0$ donne

$$\sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u(e_i) \rangle = 0.$$

Si $\dim E = 1$: ok
Si $\dim E > 1$, il existe $i \neq j$ tel que $\langle e_i, u(e_i)\rangle \geq 0$ et $\langle e_j, u(e_j)\rangle \leq 0$.
L'application $t \mapsto \langle u(te_i + (1-t)e_j), te_i + (1-t)e_j\rangle$ est continue, à valeurs réelles et change de signe, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule et donc il existe $t \in [0\,;1]$ tel que pour $x = te_i + (1-t)e_j$, $\langle u(x), x\rangle = 0$. De plus, l'indépendance de e_i et e_j assure $x \neq 0$.

(b) Il existe ε_1 vecteur unitaire tel que

$$\langle \varepsilon_1, u(\varepsilon_1)\rangle = 0.$$

On complète celui-ci en une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. La matrice de u dans cette base est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & A \end{pmatrix}$$

avec $\operatorname{tr} A = 0$. Considérons alors u' l'endomorphisme de $E' = \mathrm{Vect}(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de matrice A dans la base $(\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$. Puisque $\operatorname{tr} u' = \operatorname{tr} A = 0$, un principe de récurrence permet de former une base orthonormée $(\varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ de E' dans laquelle u' est représenté par une matrice de diagonale nulle. La famille $(\varepsilon_1, \varepsilon_2', \dots, \varepsilon_n')$ est alors une base orthonormée solution du problème posé.

Exercice 44 : [énoncé]

(a)
```
from random import random

def simul(N):
    P1,P2 = N,N
    while P1 * P2 > 0:
        if random() <= 0.5:
            P1 = P1 - 1
        else:
            P2 = P2 - 1
    return P1 + P2

N = 20
C = 0
for i in range(1000):
    C = C + simul(N)
print(C/1000)
```

(b) On peut prendre $\Omega = \{1,2\}^{2N}$ muni de la tribu discrète et de la probabilité uniforme pour modéliser la succession de $2N$ choix de l'un ou l'autre paquet.

(c) La variable X_N prend ses valeurs dans $[\![1\,;N]\!]$. Pour $k \in [\![1\,;N]\!]$, on a $X_N = k$ lorsque N fois le paquet 1 a été choisi et $N - k$ fois le paquet 2, le dernier choix étant fait dans le paquet 1. On a aussi $X_N = k$ dans la situation symétrique. On en déduit :

$$\mathrm{P}(X_N = k) = 2 \times \binom{2N - (k+1)}{N-1} \times \frac{1}{2^{2N-k}}$$

(le coefficient binomial correspond au positionnement des $N-1$ valeurs 1 dans les $2N-(k+1)$ positions possibles (le dernier 1 étant en position $2N-k$).

(d) La formule se vérifie en exprimant les coefficients binomiaux sous forme factorielle (le cas $k=N$) étant traité à part).

(e) On somme la formule qui précède et on simplifie sachant

$$\sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X_N=k)=1, \sum_{k=1}^{N} \mathrm{P}(X_N=k+1)=1-\mathrm{P}(X_N=1)$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{N}(k+1)\mathrm{P}(X_N=k+1)=\mathrm{E}(X_N)-\mathrm{P}(X_N=1).$$

On conclut

$$\mathrm{E}(X_N)=(2N-1)\mathrm{P}(X_N=1)=\frac{2N-1}{2^{2N-2}}\binom{2N-2}{N-1}.$$

Par la formule de Stirling

$$\mathrm{E}(X_N)\underset{N\to+\infty}{\sim}\frac{2\sqrt{N}}{\sqrt{\pi}}.$$

Exercice 45 : [énoncé]

On a

$$\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=(1+a+b)\ln n+\frac{a+2b}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il y a convergence si, et seulement si, $1+a+b=0$ et $a+2b=0$ ce qui correspond à $a=-2$ et $b=1$.

Dans ce cas :

$$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\sum_{n=1}^{N}\ln n-2\sum_{n=2}^{N+1}\ln n+\sum_{n=3}^{N+2}\ln n$$

puis

$$\sum_{n=1}^{N}\ln n+a\ln(n+1)+b\ln(n+2)=\ln 1+\ln 2-2\ln 2-2\ln(N+1)+\ln(N+1)+\ln(N+2)\to-\ln 2.$$

Exercice 46 : [énoncé]

(a)

$$\ln u_{n+1}-\ln u_n\sim-\frac{1}{2}\frac{x}{n}$$

avec $x>0$ donc

$$\sum_{k=1}^{n}\ln u_{k+1}-\ln u_k\to-\infty$$

puis $u_n\to 0$.

(b) Pour $\alpha=-x/2$,

$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc il y a convergence de

$$\sum\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

(c) Puisque

$$\ln(u_{n+1})-\ln(u_n)-\alpha\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\frac{u_{n+1}}{(n+1)^\alpha}-\ln\frac{u_n}{n^\alpha}$$

la suite de terme général $\ln\frac{u_n}{n^\alpha}$ converge puis $\frac{u_n}{n^\alpha}\to A$ avec $A>0$.

(d) Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha<-1$ *i.e.* $x>2$.

Exercice 47 : [énoncé]

On a

$$A_n=a+\frac{b(n+1)}{2}, \ln B_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(a+bk).$$

Posons $f(t)=\ln(a+bt)$ fonction croissante.

À l'aide d'une comparaison série-intégrale

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=n\ln(a+bn)-n+\mathrm{o}(n)$$

donc

$$\ln\frac{B_n}{A_n}=\ln B_n-\ln A_n=\ln\left(\frac{a+bn}{a+bn/2}\right)-1+\mathrm{o}(1)\to\ln 2-1$$

puis

$$\frac{B_n}{A_n}\to\frac{2}{\mathrm{e}}.$$