

**Exercice 1** [ 02650 ] [Correction]

On note  $V$  l'ensemble des matrices à coefficients entiers du type

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}$$

et  $G$  l'ensemble des  $M \in V$  inversibles dans  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  et dont l'inverse est dans  $V$ .

- Quelle est la structure de  $G$  ?
- Soit  $M \in V$ . Montrer que  $M \in G$  si, et seulement si,  $\det M = \pm 1$ .
- Donner un groupe standard isomorphe à  $G$  muni du produit.

**Exercice 2** [ 02649 ] [Correction]

Soit  $(G, \cdot)$  un groupe fini tel que

$$\forall g \in G, g^2 = e$$

où  $e$  est le neutre de  $G$ . On suppose  $G$  non réduit à  $\{e\}$ .

Montrer qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $G$  est isomorphe à  $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ .

**Exercice 3** [ 02648 ] [Correction]

Soit  $G$  un groupe,  $H$  un sous-groupe de  $G$ ,  $A$  une partie non vide de  $G$ . On pose  $AH = \{ah \mid a \in A, h \in H\}$ . Montrer que  $AH = H$  si, et seulement si,  $A \subset H$ .

**Exercice 4** [ 02677 ] [Correction]

Soit  $\mathbb{K}$  un corps,  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$  sur  $\mathbb{K}$  et  $\mathbb{L}$  un sous-corps de  $\mathbb{K}$  tel que  $\mathbb{K}$  est un espace vectoriel de dimension finie  $p$  sur  $\mathbb{L}$ . Montrer que  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $q$  sur  $\mathbb{L}$ . Relier  $n, p, q$ .

**Exercice 5** [ 02662 ] [Correction]

Soit  $K = \mathbb{Q} + \sqrt{2}\mathbb{Q} + \sqrt{3}\mathbb{Q} + \sqrt{6}\mathbb{Q}$ .

- Montrer que  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$  est une  $\mathbb{Q}$ -base du  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel  $K$ .
- Montrer que  $K$  est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 6** [ 02658 ] [Correction]

- Pour  $(a, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$  avec  $a \wedge n = 1$ , montrer que  $a^{\varphi(n)} = 1 [n]$ .
- Pour  $p$  premier et  $k \in \{1, \dots, p-1\}$ , montrer que  $p$  divise  $\binom{p}{k}$ .
- Soit  $(a, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ . On suppose que  $a^{n-1} = 1 [n]$ . On suppose que pour tout  $x$  divisant  $n-1$  et différent de  $n-1$ , on a  $a^x \neq 1 [n]$ . Montrer que  $n$  est premier.

**Exercice 7** [ 02660 ] [Correction]

Si  $p$  est un nombre premier, quel est le nombre de carrés dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ?

**Exercice 8** [ 03929 ] [Correction]

- Déterminer l'ensemble des inversibles de l'anneau  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ . De quelle structure peut-on munir cet ensemble ?
- Y a-t-il, à isomorphisme près, d'autres groupes de cardinal 4 ?

**Exercice 9** [ 04954 ] [Correction]

Déterminer les  $z$  complexes pour lesquels la matrice suivante est diagonalisable

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10** [ 04979 ] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Déterminer les polynômes  $P$  pour lesquels la matrice  $P(A)$  est nilpotente.

**Exercice 11** [ 04982 ] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice vérifiant

$$A^3 = A + I_n \quad \text{et} \quad \text{tr}(A) \in \mathbb{Q}.$$

Montrer que  $n$  est un multiple de 3 et calculer  $\det(A)$ .

**Exercice 12** [ 04983 ] [Correction]

Soient  $a, b, c$  trois réels non nuls. Étudier la diagonalisabilité de la matrice réelle

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 1/a & 0 & b \\ 1/c & 1/b & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 13** [04985] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  n'ayant aucune valeur propre en commun.

- (a) Montrer que  $\chi_A(B)$  est une matrice inversible.  
 (b) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Montrer qu'il existe une unique matrice  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que

$$AX - XB = M$$

**Exercice 14** [00864] [Correction]

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  ( $n \geq 3$ ) vérifiant

$$\text{rg } A = 2, \text{tr } A = 0 \text{ et } A^n \neq O_n.$$

Montrer que  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 15** [02713] [Correction]

Trouver les  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \text{ et } \text{tr } A = 8.$$

**Exercice 16** [02703] [Correction]

Diagonaliser les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \cdots & 0 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 17** [02702] [Correction]

Soit  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ . La matrice  $(a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$  est-elle diagonalisable?

**Exercice 18** [01948] [Correction]

Trouver les matrices  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$\text{tr } M = 0 \text{ et } M^3 - 4M^2 + 4M = O_n.$$

**Exercice 19** [02719] [Correction]

Soient  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n \geq 1$  tels que

$$f \circ g - g \circ f = f.$$

- (a) Montrer que  $f$  est nilpotent.  
 (b) On suppose  $f^{n-1} \neq 0$ . Montrer qu'il existe une base  $e$  de  $E$  et  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que :

$$\text{Mat}_e f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Mat}_e g = \text{diag}(\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1).$$

**Exercice 20** [02707] [Correction]

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b \neq 0$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  la matrice dont les éléments diagonaux valent  $a$  et les autres valent  $b$ .  $A$  est-elle diagonalisable? Quelles sont les valeurs propres de  $A$ ? Quel est le polynôme minimal de  $A$ ? Sous quelles conditions sur  $a$  et  $b$ ,  $A$  est-elle inversible? Lorsque c'est le cas trouver l'inverse de  $A$ .

**Exercice 21** [02696] [Correction]

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $AB$  et  $BA$  ont même valeurs propres.

**Exercice 22** [02705] [Correction]

Soient  $a, b$  deux réels et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b & \cdots & b & a \\ \vdots & \ddots & a & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & b & \cdots & b \end{pmatrix}.$$

Réduire ces deux matrices.

**Exercice 23** [02692] [Correction]

Les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

**Exercice 24** [02667] [Correction]Montrer qu'il existe  $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

**Exercice 25** [02706] [Correction]

On pose

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$$

pour tous  $a, b$  réels.

- (a) Ces matrices sont-elles simultanément diagonalisables ?
- (b) Étudier et représenter graphiquement l'ensemble des  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $M(a, b)^n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $\infty$ .

**Exercice 26** [02700] [Correction]Soit  $E = \mathcal{C}([0; 1], \mathbb{R})$ . Si  $f \in E$  on pose

$$T(f): x \in [0; 1] \mapsto \int_0^1 \min(x, t) f(t) dt.$$

- (a) Vérifier que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $T$ .

**Exercice 27** [02729] [Correction]Soit la matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  donnée par  $A = (\min(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

- (a) Trouver une matrice triangulaire inférieure unité  $L$  et une matrice triangulaire supérieure  $U$  telle que  $A = LU$ .

- (b) Exprimer  $A^{-1}$  à l'aide de

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

- (c) Montrer que  $\text{Sp } A^{-1} \subset [0; 4]$ .

**Exercice 28** [02718] [Correction]

Soient  $A \in \mathbb{R}[X]$  et  $B \in \mathbb{R}[X]$  scindé à racines simples de degré  $n+1$ . Soit  $\Phi$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  qui à  $P \in \mathbb{R}[X]$  associe le reste de la division euclidienne de  $AP$  par  $B$ . Déterminer les éléments propres de  $\Phi$ . L'endomorphisme  $\Phi$  est-il diagonalisable ?

**Exercice 29** [03063] [Correction]

Soit  $E$  l'espace des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $[0; +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(0) = 0$ . Pour un élément  $f$  de  $E$  on pose  $T(f)$  la fonction définie par

$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t} dt.$$

Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$  et déterminer ses valeurs propres.**Exercice 30** [02697] [Correction]Soit  $(A, B) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ . Montrer que

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{BA}(X).$$

Indice : Commencer par le cas où

$$A = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 31** [02714] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$A^3 + A^2 + A = 0.$$

Montrer que la matrice  $A$  est de rang pair.

**Exercice 32** [03755] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice inversible.

Montrer que  $A$  est triangulaire supérieure si, et seulement si,  $A^k$  l'est pour tout  $k \geq 2$ .

Donner un contre-exemple dans le cas où l'on ne suppose plus la matrice  $A$  inversible.

**Exercice 33** [02698] [Correction]

- (a) Si  $P \in \mathbb{Z}[X]$  est unitaire de degré  $n$ , existe-t-il une matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  de polynôme caractéristique  $P(X)$  ?
- (b) Soient  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  et le polynôme

$$P = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i).$$

On suppose  $P \in \mathbb{Z}[X]$ . Montrer que pour tout  $q \in \mathbb{N}^*$  le polynôme

$$P_q = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i^q)$$

appartient encore à  $\mathbb{Z}[X]$ .

- (c) Soit  $P$  dans  $\mathbb{Z}[X]$  unitaire dont les racines complexes sont de modules  $\leq 1$ . Montrer que les racines non nulles de  $P$  sont des racines de l'unité.

**Exercice 34** [02722] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^2 = f$ . Étudier les éléments propres et la diagonalisabilité de l'endomorphisme  $u \mapsto fu - uf$  de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 35** [02726] [Correction]

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$u^3 = \text{Id}.$$

Décrire les sous-espaces stables de  $u$ .

Même question avec  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

**Exercice 36** [02681] [Correction]

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$  et  $a$  un élément non nul de  $\mathbb{K}$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 - 3af^2 + a^2f = 0$ . Est-il vrai que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires ?

**Exercice 37** [02897] [Correction]

On note  $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et on pose, pour toute  $f \in E$  et tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$Tf(x) = f(x) + \int_0^x f(t) dt.$$

- (a) L'opérateur  $T$  est-il un automorphisme de  $E$  ?
- (b) Existe-t-il un sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension finie impaire et stable par  $T$  ?

**Exercice 38** [02699] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

- (a) Comparer  $\text{Sp } B$  et  $\text{Sp } {}^t B$ .
- (b) Soit  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer que s'il existe  $\lambda$  pour lequel  $AC = \lambda C$ , alors  $\text{Im } C \subset \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ .
- (c) Soit  $\lambda$  une valeur propre commune à  $A$  et  $B$ . Montrer qu'il existe  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $C \neq 0$ , telle que  $AC = CB = \lambda C$ .
- (d) On suppose l'existence de  $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec  $\text{rg } C = r$  et  $AC = CB$ . Montrer que le PGCD des polynômes caractéristiques de  $A$  et  $B$  est de degré  $\geq r$ .
- (e) Étudier la réciproque de d).

**Exercice 39** [ 02708 ] [Correction]

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & a+b & 0 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{C}).$$

Quels sont les  $P \in \mathbb{C}[X]$  tels que  $P(A) = 0$  ?

**Exercice 40** [ 02723 ] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On définit  $T \in \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  par

$$T(g) = f \circ g - g \circ f.$$

Montrer que si  $f$  est diagonalisable, alors  $T$  est diagonalisable; si  $f$  est nilpotente, alors  $T$  est nilpotente.

**Exercice 41** [ 02727 ] [Correction]

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$  de polynôme minimal  $\Pi_f$ .

Montrer l'existence de  $x \in E$  tel que

$$\{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(f)(x) = 0\}$$

soit l'ensemble des multiples de  $\Pi_f$ .

**Exercice 42** [ 02690 ] [Correction]

Soient  $A$  et  $B$  des matrices complexes carrées d'ordre  $n$ . On suppose les matrices  $A + 2^k B$  nilpotentes pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq n$ . Montrer que les matrices  $A$  et  $B$  sont nilpotentes.

**Exercice 43** [ 02720 ] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ . On suppose  $u^3 = u$ ,  $\text{tr } u = 0$  et  $\text{tr } u^2 = 2n$ . On note

$$C(u) = \{v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{2n+1}) \mid uv = vu\}.$$

- (a) Calculer la dimension  $C(u)$ .
- (b) Quels sont les  $n$  tels que  $C(u) = \mathbb{R}[u]$  ?

**Exercice 44** [ 02721 ] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose  $f_A(M) = AM$ , pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

- (a) Montrer que si  $A^2 = A$  alors  $f_A$  est diagonalisable.
- (b) Montrer que  $f_A$  est diagonalisable si, et seulement si,  $A$  est diagonalisable.

**Exercice 45** [ 03763 ] [Correction]

Pour  $n \geq 2$ , on note  $H$  un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  ne contenant aucune matrice inversible.

- (a) Montrer que  $H$  contient toutes les matrices nilpotentes.
- (b) En déduire que tout hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  rencontre  $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice 46** [ 00708 ] [Correction]

Soit  $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$  tel que

$$C = A + B, C^2 = 2A + 3B \text{ et } C^3 = 5A + 6B.$$

Les matrices  $A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables ?

**Exercice 47** [ 03291 ] [Correction]

- (a) Montrer que, pour  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  avec  $z_1 \neq 0$ , on a l'égalité

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

si, et seulement si, il existe  $n - 1$  réels positifs  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  tels que

$$\forall k \geq 2, z_k = \alpha_k z_1.$$

- (b) Déterminer toutes les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $M^n = I_n$  et  $\text{tr } M = n$

**Exercice 48** [ 02735 ] [Correction]

Calculer

$$\inf \left\{ \int_0^1 t^2 (\ln t - at - b)^2 dt, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

**Exercice 49** [01332] [Correction]

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (P, Q) \in E^2 \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- (a) Justifier la définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire. On pose  $F = \{P \in E, P(0) = 0\}$ . On cherche à déterminer  $d(1, F)$ . On note  $(P_0, \dots, P_n)$  l'orthonormalisée de Schmidt de  $(1, X, \dots, X^n)$ .
- (b) Calculer  $P_k(0)^2$ .
- (c) Déterminer une base de  $F^\perp$  que l'on exprimera dans la base  $(P_0, \dots, P_n)$ . En déduire  $d(1, F^\perp)$  et  $d(1, F)$ .

**Exercice 50** [01330] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tAA = A^tA$ . On suppose qu'il existe  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $A^p = 0$ .

- (a) Montrer que  ${}^tAA = 0$ .
- (b) En déduire que  $A = 0$ .

**Exercice 51** [02715] [Correction]

Trouver les  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  ${}^tM = M^2$  et que  $M$  n'ait aucune valeur propre réelle.

**Exercice 52** [02753] [Correction]

Soient  $E$  un espace euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  symétrique à valeurs propres strictement positives.

Montrer que, pour tout  $x \in E$ ,

$$\|x\|^4 \leq \langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

**Exercice 53** [03748] [Correction]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tA = -A$ .

- (a) Montrer que si  $n$  est impair alors  $A$  n'est pas inversible.
- (b) Montrer que si  $n$  est pair,  $\det A \geq 0$ . Sous quelle condition l'inégalité est-elle stricte?

**Exercice 54** [02744] [Correction]

Soit  $A \in O_n(\mathbb{R})$ . On suppose que 1 n'est pas valeur propre de  $A$ .

- (a) Étudier la convergence de

$$\frac{1}{p+1}(I_n + A + \dots + A^p)$$

lorsque  $p \rightarrow +\infty$ .

- (b) La suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente?

**Exercice 55** [02730] [Correction]

Soit  $E$  un espace euclidien. Quels sont les endomorphismes de  $E$  tels que pour tout sous-espace vectoriel  $V$  de  $E$

$$f(V^\perp) \subset (f(V))^\perp?$$

**Exercice 56** [03749] [Correction]

Montrer que  $A$  antisymétrique réelle d'ordre  $n$  est semblable à

$$B = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où  $C$  est une matrice inversible d'ordre pair.

**Exercice 57** [02731] [Correction]

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On note  $\mathcal{M}$  l'espace vectoriel réel  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On pose

$$\varphi : (A, B) \in \mathcal{M}^2 \mapsto \text{tr} {}^tAB.$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.
- (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur  $\Omega \in \mathcal{M}$  pour que  $M \mapsto \Omega M$  soit  $\varphi$ -orthogonale.

**Exercice 58** [02924] [Correction]

Soient  $E$  un espace vectoriel euclidien,  $u \in E$  non nul,  $g \in O(E)$ . On note  $\sigma$  la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan  $u^\perp$ . Décrire  $g \circ \sigma \circ g^{-1}$ .

**Exercice 59** [02746] [Correction]

Soit  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Quelles sont les  $A$  de  $O_n(\mathbb{R})$  telles que  $J + A$  soit inversible ?

**Exercice 60** [02740] [Correction]

Dans un espace euclidien  $E$ , soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que deux des trois propriétés suivantes entraînent la troisième :

- (i)  $f$  est une isométrie vectorielle;
- (ii)  $f^2 = -\text{Id}$ ;
- (iii)  $f(x)$  est orthogonal à  $x$  pour tout  $x$ .

**Exercice 61** [02750] [Correction]

Si  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  vérifie  $M^p = I_n$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ , que vaut  $M^2$  ?

**Exercice 62** [03752] [Correction]

Soient  $A$  une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives et  $U$  une matrice orthogonale de même taille. Comparer  $\text{tr}(AU)$  et  $\text{tr}(UA)$  à  $\text{tr} A$ .

**Exercice 63** [02759] [Correction]

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  du produit scalaire canonique. On note  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices antisymétriques de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices symétriques à valeurs propres positives.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $U \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$ .

- (a) Déterminer le supplémentaire orthogonal de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .
- (b) Soit  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\exp(xB) \in O_n(\mathbb{R})$ .
- (c) Montrer que  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .
- (d) Étudier la réciproque.
- (e) Montrer que pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  il existe  $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $U \in O_n(\mathbb{R})$  telles que  $M = SU$ .

**Exercice 64** [02751] [Correction]

Montrer que le rang de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est égal au nombre de valeurs propres non nulles (comptées avec leur ordre de multiplicité) de  ${}^tAA$ .

**Exercice 65** [02716] [Correction]

Résoudre dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  le système

$$\begin{cases} M^2 + M + I_n = 0 \\ {}^tMM = M^tM. \end{cases}$$

**Exercice 66** [02749] [Correction]

(Transformation de Cayley)

- (a) Si  $A$  est une matrice antisymétrique réelle, que peut-on dire des valeurs propres complexes de  $A$  ?
- (b) Soit

$$\varphi: A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \mapsto (I_n - A)(I_n + A)^{-1}.$$

Montrer que  $\varphi$  réalise une bijection de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sur

$$\{\Omega \in GO_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(\Omega)\}.$$

**Exercice 67** [02748] [Correction]

On note  $(\cdot | \cdot)$  le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ . Pour toute famille  $u = (u_1, \dots, u_p) \in (\mathbb{R}^n)^p$  on pose

$$M_u = ((u_i | u_j))_{1 \leq i, j \leq p}.$$

- (a) Montrer que la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est libre si, et seulement si,  $M_u$  est inversible.
- (b) On suppose qu'il existe  $u = (u_1, \dots, u_p)$  et  $v = (v_1, \dots, v_p)$  telles que  $M_u = M_v$ . Montrer qu'il existe  $f \in O(\mathbb{R}^n)$  telle que  $f(u_i) = v_i$  pour tout  $i$ .

**Exercice 68** [02757] [Correction]

Soit  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Trouver  $P \in O_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  diagonale telles que  ${}^tPJP = D$ .

**Exercice 69** [03927] [Correction]

Soient  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  avec  $\text{Sp} A \subset \mathbb{R}_+$  et  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On suppose

$$AB + BA = 0.$$

Montrer  $AB = BA = 0$ .

**Exercice 70** [03751] [[Correction](#)]

Soit  $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$  telle que  ${}^tA = A^2$ .

- (a) Montrer que  $A^3 = I_n$  et que  $A$  est orthogonale.
- (b) Soit  $f$  l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice  $A$ .  
Montrer que le noyau de  $f^2 + f + \text{Id}$  est de dimension paire et en déduire la forme de la matrice de  $f$  dans une base bien choisie.

**Exercice 71** [03762] [[Correction](#)]

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  symétrique. On pose

$$B = A^3 + A + I_n.$$

Montrer que  $A$  est un polynôme en  $B$ .

**Exercice 72** [03923] [[Correction](#)]

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant

$$A^3 = A^tA.$$

Montrer que la matrice  $A$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ .

## Corrections

### Exercice 1 : [énoncé]

- (a)  $G \subset \text{GL}_4(\mathbb{R})$ ,  $G$  est non vide, stable par passage à l'inverse et par produit car  $V$  l'est. Ainsi  $G$  est un sous-groupe de  $\text{GL}_4(\mathbb{R})$  donc un groupe.
- (b) Si  $M \in G$  alors  $\det M, \det M^{-1} \in \mathbb{Z}$  et  $\det M \times \det M^{-1} = \det I_4 = 1$  donc  $\det M = \pm 1$ .

Inversement si  $\det M = \pm 1$  alors  $M^{-1} = \pm {}^t \text{Com } M$  est à coefficients entiers. On peut remarquer que

$$E = \left\{ \left( \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  stable par produit et contenant  $I_n$ . L'application  $\varphi: X \mapsto MX$  y définit un endomorphisme injectif donc bijectif. On en déduit que  $M^{-1} = \varphi^{-1}(I_n)$  est élément de  $E$  donc de  $V$ . Par conséquent,  $M \in G$ .

(c)

$$\det M = ((a+c)^2 - (b+d)^2)((a-c)^2 + (b-d)^2)$$

donc

$$\det M = \pm 1 \iff \begin{cases} (a+c)^2 - (b+d)^2 = \pm 1 \\ (a-c)^2 + (b-d)^2 = \pm 1. \end{cases}$$

La résolution de ce système à coefficients entiers donne à l'ordre près :  $a, b, c, d = \pm 1, 0, 0, 0$ .

Posons  $J$  la matrice obtenue pour  $a = c = d = 0$  et  $b = 1$ . On vérifie  $J^4 = I_4$ . L'application  $\varphi: U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow G$  définie par  $\varphi(\varepsilon, n) = \varepsilon J^n$  est bien définie, c'est un morphisme de groupe, injectif et surjectif. Ainsi  $G$  est isomorphe à  $U_2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  ou plus élégamment à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

### Exercice 2 : [énoncé]

Le groupe  $(G, \cdot)$  est abélien. En effet, pour tout  $x \in G$ , on a  $x^{-1} = x$  donc, pour  $x, y \in G$ ,  $(xy)^{-1} = xy$ . Or  $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = yx$  donc  $xy = yx$ . Pour  $\bar{0}, \bar{1} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  et  $x \in G$ , posons

$$\bar{0}.x = e \text{ et } \bar{1}.x = x.$$

On vérifie qu'on définit alors un produit extérieur sur  $G$  munissant le groupe abélien  $(G, \cdot)$  d'une structure de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espace vectoriel. En effet, pour  $(x, y) \in G^2$  et  $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$  on a

$$(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x, \lambda.(x + y) = \lambda.x + \lambda.y, \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x \text{ et } \bar{1}.x = x.$$

De plus, cet espace est de dimension finie car  $\text{Card } G < +\infty$ , il est donc isomorphe à l'espace  $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +, \cdot)$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}^*$ . En particulier, le groupe  $(G, \cdot)$  est isomorphe à  $((\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, +)$ .

### Exercice 3 : [énoncé]

Supposons  $AH = H$ .

$$\forall a \in A, a = ae \in AH = H$$

donc  $A \subset H$ .

Supposons  $A \subset H$ . Pour  $x \in AH$ ,  $x = ah$  avec  $a \in A$ ,  $h \in H$ . Or  $a, h \in H$  donc  $x = ah \in H$ .

Ainsi  $AH \subset H$ .

Inversement, pour  $a \in A$  (il en existe car  $A \neq \emptyset$ ) et pour tout  $h \in H$ ,  $h = a(a^{-1}h)$  avec  $a^{-1}h \in H$  donc  $h \in AH$ . Ainsi  $H \subset AH$  puis =.

### Exercice 4 : [énoncé]

Il est facile de justifier que  $E$  est un  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel sous réserve de bien connaître la définition des espaces vectoriels et de souligner que qui peut le plus, peut le moins...

Soit  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$  une base du  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel  $\mathbb{K}$ .

Considérons la famille des  $(\lambda_j \vec{e}_i)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ . Il est facile de justifier que celle-ci est une famille libre et génératrice du  $\mathbb{L}$ -espace vectoriel  $E$ . Par suite  $E$  est de dimension finie  $q = np$ .

### Exercice 5 : [énoncé]

- (a) Il est clair que  $K$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}$  et que la famille  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$  est  $\mathbb{Q}$ -génératrice.

Montrons qu'elle est libre en raisonnant par l'absurde.

Supposons  $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  non tous nuls.

Quitte à réduire au même dénominateur, on peut supposer  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$  non tous nuls.

Quitte à factoriser, on peut aussi supposer  $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ .

On a  $(a + b\sqrt{2})^2 = (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})^2$  donc

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 3c^2 + 6cd\sqrt{2} + 6d^2.$$

Par l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  on parvient au système

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3c^2 + 6d^2 \\ ab = 3cd. \end{cases}$$

Par suite  $3 \mid ab$  et  $3 \mid a^2 + 2b^2$  donc  $3 \mid a$  et  $3 \mid b$ .

Ceci entraîne  $3 \mid cd$  et  $3 \mid c^2 + 2d^2$  donc  $3 \mid c$  et  $3 \mid d$ .

Ceci contredit  $\text{pgcd}(a, b, c, d) = 1$ .

Ainsi la famille  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$  est  $\mathbb{Q}$ -libre et c'est donc une  $\mathbb{Q}$ -base de  $K$ .

(b) Sans peine, on vérifie que  $\mathbb{K}$  est un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ .

Soit  $x = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} \in \mathbb{K}$  avec  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$  non tous nuls.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{1}{(a + b\sqrt{2}) + (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})} \\ &= \frac{a + b\sqrt{2} - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})}{(a^2 + 2b^2 - 3c^2 - 6d^2) + 2(ab - 3cd)\sqrt{2}} \\ &= \frac{a + b\sqrt{2} - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6})}{\alpha + \beta\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{x} = \frac{(a + b\sqrt{2} - (c\sqrt{3} + d\sqrt{6}))(\alpha - \beta\sqrt{2})}{\alpha^2 - 2\beta^2} \in K$$

et donc  $K$  est un sous-corps de  $\mathbb{R}$ .

Notons que les quantités conjuguées par lesquelles on a ci-dessus multiplié ne sont pas nuls car  $x$  est non nul et la famille  $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{6})$  est  $\mathbb{Q}$ -libre.

### Exercice 6 : [énoncé]

- (a) L'ensemble des inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  est un sous-groupe de cardinal  $\varphi(n)$ .
- (b)  $k \binom{p}{k} = p \binom{p-1}{k-1}$  donc  $p \mid k \binom{p}{k}$  or  $p \wedge k = 1$  donc  $p \mid \binom{p}{k}$ .
- (c) Posons  $d = (n-1) \wedge \varphi(n)$ .  $d = (n-1)u + \varphi(n)v$  donc  $a^d = 1 [n]$ . Or  $d \mid n-1$  donc nécessairement  $d = n-1$ . Par suite  $n-1 \mid \varphi(n)$  puis  $\varphi(n) = n-1$  ce qui entraîne que  $n$  est premier.

### Exercice 7 : [énoncé]

Si  $p = 2$  : il y a deux carrés dans  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Si  $p \geq 3$ , considérons l'application  $\varphi: x \mapsto x^2$  dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Dans le corps  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  :  $\varphi(x) = \varphi(y) \iff x = \pm y$ .

Dans  $\text{Im } \varphi$ , seul 0 possède un seul antécédent, les autres éléments possèdent deux antécédents distincts. Par suite  $\text{Card } \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = 1 + 2(\text{Card } \text{Im } \varphi - 1)$  donc il y a  $\frac{p+1}{2}$  carrés dans  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

### Exercice 8 : [énoncé]

(a) Les inversibles de  $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  sont les  $\bar{k}$  avec  $k \wedge 8 = 1$ . Ce sont donc les éléments  $\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}$  et  $\bar{7}$ .

L'ensemble des inversibles d'un anneau est un groupe multiplicatif.

(b) Le groupe  $(\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}, \times)$  vérifie la propriété  $x^2 = 1$  pour tout  $x$  élément de celui-ci. Ce groupe n'est donc pas isomorphe au groupe cyclique  $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$  qui constitue donc un autre exemple de groupe de cardinal 4. En fait le groupe  $(\{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}, \times)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$ .

### Exercice 9 : [énoncé]

Le polynôme caractéristique de  $M$  est

$$P = X^3 - zX - z.$$

Celui-ci admet trois racines complexes comptées avec multiplicité. Recherchons pour quel  $z$  le polynôme  $P$  admet une racine multiple.

Les racines multiples d'un polynôme sont les racines communes à celui-ci et à son polynôme dérivé.

On a  $P' = 3X^2 - z$ . Si  $x$  est une racine de  $P'$ , on a

$$P(x) = -\frac{2}{3}zx - z = 0 \iff x = -\frac{3}{2} \text{ ou } z = 0.$$

Notons que, pour  $x = -3/2$ , on obtient  $z = 3x^2 = 27/4$ .

Ceci conduit à distinguer trois cas :

Cas:  $z = 0$ . La matrice  $M$  n'est pas diagonalisable car 0 est sa seule valeur propre et ce n'est pas la matrice nulle

Cas:  $z = 27/4$ . La matrice  $M$  présente une valeur propre double :  $-3/2$ . Or

$$\text{rg} \left( M + \frac{3}{2} I_3 \right) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3/2 & 0 & 27/4 \\ 1 & 3/2 & 0 \\ 1 & 1 & 3/2 \end{pmatrix} = 2$$

(il y a clairement une matrice inversible de taille 2 incluse dans la matrice dont on calcule le rang qui, par ailleurs, est assurément non inversible).

On en déduit que l'espace propre associé à la valeur propre double est de dimension 1 : la matrice  $M$  n'est pas diagonalisable.

Cas:  $z \neq 0$  et  $z \neq 27/4$ . La matrice  $M$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  car comporte trois valeurs propres distinctes.

### Exercice 10 : [énoncé]

Une matrice complexe est nilpotente si, et seulement si, 0 est sa seule valeur propre.

La matrice complexe  $A$  est trigonalisable semblable à

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ , la matrice  $P(A)$  est semblable à

$$P(T) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & (*') \\ & \ddots & \\ (0) & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $P(A)$  sont donc les  $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$ . La matrice  $P(A)$  est donc nilpotente si, et seulement si, les valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont racines<sup>1</sup> de  $P$ . Les polynômes correspondants sont ceux pouvant s'écrire

$$P(X) = Q(X) \prod_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (X - \lambda) \quad \text{avec } Q \in \mathbb{C}[X].$$

### Exercice 11 : [énoncé]

Le polynôme  $P = X^3 - X - 1$  est annulateur de  $A$  et il suffit d'étudier ses variations pour affirmer que celui-ci ne possède qu'une seule racine réelle  $\lambda$  :

[Une figure]

Les deux autres racines de  $P$  sont complexes et conjuguées, on les note  $\mu$  et  $\bar{\mu}$ .

1. Non nécessairement comptées avec multiplicité.

Notons  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  les multiplicités de  $\lambda, \mu$  et  $\bar{\mu}$  en tant que valeur propre de la matrice  $A$ . La matrice  $A$  étant réelle, on sait  $\beta = \gamma$ . Aussi, la trace de  $A$  est la somme de ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité et donc

$$\text{tr}(A) = \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\bar{\mu} = \alpha\lambda + \beta(\mu + \bar{\mu}).$$

La somme et le produit des racines d'un polynôme sont liés à ses coefficients.

Les complexes  $\lambda, \mu, \bar{\mu}$  étant les trois racines du polynôme  $X^3 - X - 1$ , on peut écrire la factorisation

$$X^3 - X - 1 = (X - \lambda)(X - \mu)(X - \bar{\mu}). \quad (*)$$

En identifiant les coefficients de  $X^2$ , il vient  $\lambda + \mu + \bar{\mu} = 0$ . On en déduit

$$\text{tr}(A) = (\alpha - \beta)\lambda. \quad (\Delta)$$

On vérifie que la racine  $\lambda$  est irrationnelle.

Par l'absurde, si  $\lambda \in \mathbb{Q}$ , on peut écrire  $\lambda = p/q$  avec  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$ . Quitte à simplifier cette fraction, on peut supposer que  $p$  et  $q$  n'ont pas de facteurs premiers en commun<sup>2</sup>. Or l'équation  $\lambda^3 = \lambda + 1$  donne après réduction au même dénominateur  $p^3 = pq^2 + q^3$ . Tout facteur premier de  $q$  est alors facteur premier de  $p^3$ , donc de  $p^3$ , donc de  $p$ . Les nombres  $p$  et  $q$  n'ayant pas de facteurs premiers en commun, on a nécessairement  $q = 1$ . Un raisonnement symétrique donne  $p = \pm 1$  et donc  $\lambda = \pm 1$ . Ceci est absurde car ni 1, ni  $-1$ , ne sont racines de  $P$ .

Sachant  $\text{tr}(A) \in \mathbb{Q}$  et  $\lambda \notin \mathbb{Q}$ , l'égalité (??) donne  $\alpha - \beta = 0$ . Ainsi,  $\alpha = \beta = \gamma$  puis  $n = \alpha + \beta + \gamma = 3\alpha$  est un multiple de 3.

Enfin, le déterminant de  $A$  est le produit de ses valeurs propres complexes comptées avec multiplicité et donc

$$\det(A) = (\lambda\mu\bar{\mu})^\alpha = 1$$

car l'identification des coefficients constants de (??) donne  $\lambda\mu\bar{\mu} = 1$ .

### Exercice 12 : [énoncé]

Le polynôme caractéristique de  $M$  est

$$\chi_M = X^3 - 3X - \frac{a^2b^2 + c^2}{abc}.$$

On étudie les variations de  $\chi_M$  afin de déterminer le nombre de ses racines réelles.

Le polynôme dérivé  $\chi'_M = 3X^2 - 3$  s'annule en 1 et  $-1$  ce qui produit le tableau des variations suivant :

2. Le quotient  $p/q$  correspond alors au *représentant irréductible* du nombre rationnel  $\lambda$ .

[Une figure]

avec

$$\chi_M(-1) = -\frac{(ab-c)^2}{abc} \quad \text{et} \quad \chi_M(1) = -\frac{(ab+c)^2}{abc}.$$

Ces deux valeurs ont le même signe et, si elles ne sont pas nulles, le polynôme caractéristique ne s'annule qu'une seule fois. Cela conduit à la distinction de cas qui suit :

Cas:  $c \neq \pm ab$ . Le polynôme caractéristique ne possède qu'une seule racine réelle  $\lambda$  et la matrice  $M$  n'est alors pas diagonalisable. En effet, si elle l'était, elle serait semblable à  $\lambda I_3$ , donc égale à  $\lambda I_3$  ce qui n'est pas le cas.

Cas:  $c = ab$ . Le polynôme caractéristique admet une racine <sup>3</sup>  $\lambda > 1$  et  $-1$  pour racine double.

L'espace propre associé à la valeur propre simple  $\lambda$  est assurément de dimension 1.

Reste à étudier la dimension de l'espace propre associé à la valeur  $-1$ .

La dimension de l'espace propre associé à la valeur propre  $-1$  se déduit du calcul du rang de  $M + I_3$ .

On a

$$\text{rg}(M + I_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 1/a & 1 & b \\ 1/ab & 1/b & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{a}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{ab}L_1}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & a & ab \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

et donc, par la formule du rang,

$$\dim E_{-1}(M) = \dim \text{Ker}(M + I_3) = 3 - 1 = 2.$$

La matrice  $M$  est alors diagonalisable car la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à sa taille.

Cas:  $c = \pm ab$ . L'étude est analogue avec  $-1$  valeur propre double de  $M$ .

En résumé <sup>4</sup>, la matrice réelle  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $ab = \pm c$ .

### Exercice 13 : [énoncé]

(a) On factorise  $\chi_A(B)$  en produit de matrices inversibles.

Notons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité. Le polynôme caractéristique de  $A$  s'écrit alors

$$\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) \dots (X - \lambda_n)$$

3. En fait, la racine  $\lambda$  est simplement égale à 2.

4. En revanche, la matrice  $M$  est toujours diagonalisable si on la considère comme une matrice complexe.

et donc

$$\chi_A(B) = (B - \lambda_1 I_n)(B - \lambda_2 I_n) \dots (B - \lambda_n I_n)$$

Or les matrices  $B - \lambda_i I_n$  sont toutes inversibles car  $\lambda_i$  n'est pas valeur propre de  $B$ . Par produit de matrices inversibles, on obtient que  $\chi_A(B)$  est inversible.

(b) On établit que  $X \mapsto AX - XB$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Considérons l'application  $\Phi: \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définie par

$$\Phi(X) = AX - XB \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

On vérifie sans peine que l'application  $\Phi$  est linéaire et, puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est un espace de dimension finie, il suffit de vérifier que le noyau de  $\Phi$  est réduit à la matrice nulle pour conclure que  $\Phi$  est un automorphisme.

Soit  $X$  une matrice du noyau de  $\Phi$ . On a  $AX = XB$  et on vérifie par récurrence  $A^k X = X B^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  puis  $P(A)X = X P(B)$  pour tout polynôme  $P \in \mathbb{C}[X]$ . En particulier, ceci vaut pour  $P = \chi_A$  et, puisque le polynôme caractéristique est annulateur, on obtient  $X \chi_A(B) = O_n$ . Or la matrice  $\chi_A(B)$  est inversible et donc, en multipliant par son inverse, on obtient  $X = O_n$ .

Finalement, le noyau de  $\Phi$  est réduit à la matrice nulle et  $\Phi$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Sa bijectivité assure l'existence et l'unicité d'une solution  $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à l'équation  $AX - XB = M$  quelle que soit la matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

### Exercice 14 : [énoncé]

$\dim \text{Ker } A = n - 2$  donc 0 est valeur propre de  $A$  de multiplicité au moins  $n - 2$ .

Puisque  $\chi_A$  est scindé, la trace de  $A$  est la somme des valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité.

Si 0 est la seule valeur propre de  $A$  alors  $A$  est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte et alors  $A^n = O_n$  ce qui est exclu.

Sinon  $A$  possède alors une autre valeur propre, puis deux car la somme des valeurs propres est nulle. Par suite la somme des dimensions des sous-espaces propres de  $A$  est au moins  $n$  et donc  $A$  est diagonalisable.

### Exercice 15 : [énoncé]

Si  $A$  est solution alors  $P = X(X - 2)^2$  est annulateur de  $A$  et les valeurs propres de  $A$  figurent parmi  $\{0, 2\}$ . Par la trace, on peut alors affirmer que 2 est valeur propre de multiplicité 4.

Par le lemme de décomposition des noyaux,  $\text{Ker}(A - 2\text{Id})^2$  et  $\text{Ker } A$  sont supplémentaires.

Par multiplicité des valeurs propres, leurs dimensions respectives sont 4 et  $n - 4$ . Ainsi  $A$  est semblable à

$$\begin{pmatrix} 2I_4 + M & 0 \\ 0 & O_{n-4} \end{pmatrix}$$

avec  $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$  vérifiant  $M^2 = 0$ .

En raisonnant sur le rang, on montre que  $M$  est semblable à

$$O_4, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La réciproque est immédiate.

**Exercice 16 :** [énoncé]

Étudions la première matrice que nous noterons  $A$ .

Celle-ci est de rang 2 et on peut facilement déterminer une base de son noyau.

En posant le système  $AX = \lambda X$  avec  $\lambda \neq 0$ , on obtient une solution non nulle sous réserve que

$$\lambda^2 - \lambda - (n - 1) = 0.$$

En notant  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  les deux racines de cette équation, on obtient  $A = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & & (0) & 1 & 1 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots \\ (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ -1 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2).$$

En reprenant la même démarche avec la seconde matrice que nous noterons  $B$ , on obtient  $B = PDP^{-1}$  avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 1 & & (0) & 2 & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & (0) & & 1 & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \cdots & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ et } D = \text{diag}(0, \dots, 0, \lambda_1, \lambda_2)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2$  sont les deux racines de

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2(n - 2) = 0.$$

**Exercice 17 :** [énoncé]

En posant  $M = (a_i a_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ , on vérifie  $M^2 = \lambda M$  avec  $\lambda = \sum_{k=1}^n a_k^2$ .

Si  $\lambda \neq 0$  alors  $M$  annule un polynôme scindé simple, elle est donc diagonalisable.

Si  $\lambda = 0$  alors  $M^2 = 0$  et donc  $M$  est diagonalisable si, et seulement si,  $M = 0$  ce qui revient à  $(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Notons que la matrice  $M$  est symétrique mais pas nécessairement réelle : le théorème spectral ne s'applique pas.

**Exercice 18 :** [énoncé]

Le polynôme

$$X^3 - 4X^2 + 4X = X(X - 2)^2$$

est annulateur de  $M$ .

On en déduit  $\text{Sp } M \subset \{0, 2\}$  et  $M$  trigonalisable (car  $M$  annule un polynôme scindé).

Par suite  $\text{tr } M$  est la somme des valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité et puisque  $\text{tr } M = 0$ , seule 0 est valeur propre de  $M$ .

On en déduit que la matrice  $M - 2I_n$  est inversible et puisque

$$M(M - 2I_n)^2 = O_n$$

on obtient

$$M = O_n.$$

**Exercice 19 :** [énoncé]

(a) On vérifie  $f^k \circ g - g \circ f^k = k f^k$ .

Si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k \neq 0$  alors l'endomorphisme  $h \mapsto h \circ g - g \circ h$  admet une infinité de valeurs propres.

Ceci étant impossible en dimension finie, on peut affirmer que  $f$  est nilpotent.

(b)  $f^n = 0$  (car  $\dim E = n$ ) et  $f^{n-1} \neq 0$ . Pour  $x \notin \text{Ker } f^{n-1}$  et

$e' = (f^{n-1}(x), \dots, f(x), x)$ , on montre classiquement que  $e'$  est une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $f$  est telle que voulue.

$f(g(f^{n-1}(x))) = 0$  donc  $g(f^{n-1}(x)) = \lambda f^{n-1}(x)$  pour un certain  $\lambda \in \mathbb{R}$

Aussi  $f^k(g(f^{n-1-k}(x))) = (\lambda + k)f^{n-1}(x)$  et donc la matrice de  $g$  dans  $e'$  est triangulaire supérieure avec sur la diagonale  $\lambda, \lambda + 1, \dots, \lambda + n - 1$ . Ainsi

$$\text{Sp}(g) = \{\lambda, \dots, \lambda + n - 1\}.$$

Soit  $y$  vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda + n - 1$ .

Si  $y \in \text{Ker } f^{n-1}$  alors puisque  $\text{Ker } f^{n-1}$  est stable par  $g$ ,  $\lambda + n - 1$  est valeur propre de l'endomorphisme induit par  $g$  sur  $\text{Ker } f^{n-1}$ . Cela n'étant par le cas

$y \notin \text{Ker } f^{n-1}$ . On vérifie alors facilement que la famille

$e = (f^{n-1}(y), \dots, f(y), y)$  résout notre problème.

**Exercice 20 :** [énoncé]

$A$  est symétrique donc diagonalisable.

$$\chi_A = (X - (a + (n - 1)b)(X - (a - b))^{n-1}.$$

$$\text{Sp}(A) = \{a + (n - 1)b, a - b\} \text{ (si } n \geq 2).$$

$$\pi_A = (X - (a + (n - 1)b))(X - (a - b))$$

$A$  est inversible si, et seulement si,  $0 \notin \text{Sp}(A)$  i.e.  $a + (n - 1)b \neq 0$  et  $a \neq b$ .

$$\begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & & (y) \\ & \ddots & \\ (y) & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & & (\beta) \\ & \ddots & \\ (\beta) & & \alpha \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \alpha = ax + (n - 1)by \\ \beta = ay + bx + (n - 2)by. \end{cases}$$

Il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{cases} ax + (n - 1)by = 1 \\ bx + (a + (n - 2)b)y = 0 \end{cases}$$

pour expliciter  $A^{-1}$ .

**Exercice 21 :** [énoncé]

Il est classique d'établir  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$  en commençant par établir le résultat pour  $A$  inversible et le prolongeant par un argument de continuité et de densité.

**Exercice 22 :** [énoncé]

$A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(a + (n - 1)b, a - b, \dots, a - b)$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) \\ \vdots & -1 & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & (0) & & -1 \end{pmatrix}$$

$B = Q\Delta Q^{-1}$  avec

Si  $n$  est impair :  $\Delta = \text{diag}(a + (n - 1)b, b - a, \dots, b - a, a - b, \dots, a - b)$  et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & 1 \\ \vdots & 0 & \dots & 0 & -2 & \dots & -2 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}.$$

Si  $n$  pair :  $\Delta = \text{diag}(a + (n - 1)b, b - a, \dots, b - a, a - b, \dots, a - b)$  et

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & (0) & 1 & & (0) \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & & \ddots & 1 \\ \vdots & (0) & & 1 & (0) & & -1 \\ \vdots & (0) & & -1 & (0) & & -1 \\ \vdots & & \ddots & & & \ddots & 1 \\ \vdots & & \ddots & & -1 & \ddots & (0) \\ 1 & -1 & & (0) & 1 & & (0) \end{pmatrix}.$$

**Exercice 23 :** [énoncé]

La colonne  ${}^t(1 \ 1 \ 1)$  est vecteur propre associé à la valeur propre 6. Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique et celui-ci a pour racines

$$6, \quad \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Ces deux matrices sont semblables à

$$\text{diag}\left(6, \frac{-3 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-3 - i\sqrt{3}}{2}\right)$$

et donc *a fortiori* semblables entre elles dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , mais aussi, et c'est assez classique, dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 24 :** [énoncé]

Considérons  $T: P(X) \mapsto P(X+1)$ .  $T$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  qui est annulé par son polynôme caractéristique de la forme

$$\chi_T = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

Cela fournit directement la propriété voulue.

**Exercice 25 :** [énoncé]

- (a)  $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$  avec  $D(a, b) = \text{diag}((a+b)^2, (a-b)^2, a^2-b^2, a^2-b^2)$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (b)  $M(a, b)^n \rightarrow 0$  si, et seulement si,  $|a+b| < 1$ ,  $|a-b| < 1$  et  $|a^2-b^2| < 1$ .  
Or  $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$  donc la dernière condition l'est automatiquement si les deux premières le sont.  
L'étude graphique est alors simple.

**Exercice 26 :** [énoncé]

- (a) On peut écrire

$$T(f)(x) = \int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt.$$

L'application  $T(f)$  apparaît alors comme continue (et même dérivable).  
Ainsi, l'application  $T$  opère de  $E$  dans  $E$ , elle de surcroît évidemment linéaire.

- (b) Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $f \in E$  vérifiant

$$T(f) = \lambda f.$$

Cas  $\lambda = 0$   
On a  $T(f) = 0$  donc

$$\int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = 0.$$

En dérivant, on obtient

$$xf(x) - xf(x) + \int_x^1 f(t) dt = \int_x^1 f(t) dt = 0.$$

En dérivant à nouveau, on obtient  $f = 0$ . Ainsi 0 n'est pas valeur propre de  $T$ .

Cas  $\lambda \neq 0$   
On a  $T(f) = \lambda f$

$$\int_0^x tf(t) dt + x \int_x^1 f(t) dt = \lambda f.$$

En particulier, on peut affirmer que  $f(0) = 0$  car  $T(f)(0) = 0$ .  
Le premier membre de l'équation  $T(f) = \lambda f$  est dérivable donc la fonction  $f$  est également dérivable et, en dérivant, on obtient la relation

$$\int_x^1 f(t) dt = \lambda f'(x).$$

En particulier  $f'(1) = 0$ .  
Le premier membre de cette nouvelle équation étant dérivable, la fonction  $f$  est deux fois dérivable et on obtient en dérivant l'équation différentielle

$$\lambda f''(x) + f(x) = 0.$$

Sous cas  $\lambda < 0$   
Sachant  $f(0) = 0$ , la résolution de l'équation différentielle donne

$$f(x) = A \text{sh}\left(\frac{x}{\sqrt{|\lambda|}}\right).$$

La condition  $f'(1) = 0$  entraîne toujours  $f = 0$  et donc un tel  $\lambda$  n'est pas valeur propre de  $T$ .

Sous cas  $\lambda > 0$   
Sachant  $f(0) = 0$ , on obtient par résolution de l'équation différentielle

$$f(x) = A \sin\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

La condition  $f'(1) = 0$  n'entraînera pas  $f = 0$  que si

$$\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) = 0$$

c'est-à-dire si, et seulement si,

$$\lambda = \frac{4}{((2k+1)\pi)^2} \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.$$

Notons qu'alors il est possible de remonter les précédents calculs et d'affirmer que

$$f: x \mapsto \sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$$

est vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda = 4/((2k+1)\pi)^2$ .

**Exercice 27 :** [énoncé]

(a)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ \vdots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ et } U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ (0) & & 1 \end{pmatrix} = {}^t L.$$

(b)  $U = I + N + \cdots + N^{n-1}$ ,  $(I - N)U = I$  donc  $U^{-1} = I - N$ ,  
 $L^{-1} = {}^t(U^{-1}) = I - {}^t N$  donc  $A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = I - N - {}^t N + N {}^t N$ .

(c)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & 2 & 1 \\ (0) & & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posons  $\chi_n$  le polynôme caractéristique de  $A^{-1} \in M_n(\mathbb{R})$ .  
 On a  $\chi_{n+2}(\lambda) = (2 - \lambda)\chi_{n+1}(\lambda) - \chi_n(\lambda)$  avec  $\chi_0(\lambda) = 1$  et  $\chi_1(\lambda) = 1 - \lambda$ .  
 En écrivant  $\lambda = 2 + 2 \cos \theta$  avec  $\theta \in [0; \pi]$  et en posant  $f_n(\theta) = \chi_n(2 + 2 \cos \theta)$   
 on a la relation :  
 $f_{n+2}(\theta) + 2 \cos \theta f_{n+1}(\theta) + f_n(\theta) = 0$ ,  $f_0(\theta) = 1$  et  $f_1(\theta) = 2 \cos \theta - 1$ .  
 La résolution de cette récurrence linéaire d'ordre 2 donne

$$f_n(\theta) = \frac{\cos(n + \frac{1}{2})\theta}{\cos \frac{\theta}{2}}.$$

Ainsi,  $\chi_n$  admet  $n$  racines dans  $[0; 4]$  et puisque ce polynôme est de degré  $n$  il n'y en a pas ailleurs :  $\text{Sp } A^{-1} \subset [0; 4]$ .

**Exercice 28 :** [énoncé]

On écrit

$$B = \alpha(X - x_0) \dots (X - x_n).$$

Si  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  est vecteur propre de  $\Phi$  associé à la valeur propre  $\lambda$  alors  $B \mid (A - \lambda)P$ . Pour des raisons de degré,  $B$  et  $A - \lambda$  ne peuvent être premiers

entre eux, ces polynômes ont donc une racine commune. Ainsi il existe  $i \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $\lambda = A(x_i)$ . Inversement pour  $\lambda = A(x_i)$ ,  $P = \prod_{j=0, j \neq i}^n (X - x_j)$ ,  $\Phi(P) = \lambda P$  avec  $P \neq 0$ . Ainsi,

$$\text{Sp } \Phi = \{A(x_i) \mid i \in \llbracket 0; n \rrbracket\}.$$

Précisons le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda = A(x_i)$ .  
 Quitte à réindexer, on peut supposer que  $\lambda = A(x_0)$ .  
 S'il existe d'autres  $x_i$  tels que  $\lambda = A(x_i)$  on réindexe encore les  $x_1, \dots, x_n$  de sorte que  $\lambda = A(x_0) = \dots = A(x_p)$  et  $\lambda \neq A(x_{p+1}), \dots, A(x_n)$ . Ainsi  $x_0, \dots, x_p$  sont racines de  $A - \lambda$  alors que  $x_{p+1}, \dots, x_n$  ne le sont pas.  
 Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\Phi(P) = \lambda P$  si, et seulement si,  $B \mid (A - \lambda)P$ . Or  $A - \lambda = (X - x_0) \dots (X - x_p) \tilde{A}$  avec  $x_{p+1}, \dots, x_n$  non racines de  $\tilde{A}$ . Puisque  $(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \wedge \tilde{A} = 1$ ,

$$B \mid (A - \lambda)P \iff (X - x_{p+1}) \dots (X - x_n) \mid P.$$

Ainsi

$$E_\lambda(\Phi) = \{(X - x_{p+1}) \dots (X - x_n)Q \mid Q \in \mathbb{R}_p[X]\}.$$

La somme des dimensions des sous-espaces propres étant égale à la dimension de l'espace,  $\Phi$  est diagonalisable.

**Exercice 29 :** [énoncé]

Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que  $f(0) = 0$ , on peut écrire

$$f(t) = {}_{t \rightarrow 0} f'(0)t + o(t).$$

Ainsi la fonction  $\varphi: t \mapsto f(t)/t$  peut être prolongée par continuité en 0 et donc l'intégrale définissant  $T(f)(x)$  a un sens en tant qu'intégrale d'une fonction continue. De plus, la fonction  $T(f)$  apparaît alors comme la primitive s'annulant en 0 de cette fonction continue  $\varphi$ , c'est donc une fonction élément de  $E$ . Enfin, la linéarité de l'application  $T$  étant immédiate, on peut affirmer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$ .

Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Si  $T(f) = \lambda f$  alors pour tout  $x \in [0; +\infty[$ ,

$$T(f)(x) = \lambda f(x).$$

En dérivant cette relation, on obtient pour tout  $x \in [0; +\infty[$

$$f(x) = \lambda x f'(x).$$

Si  $\lambda = 0$  alors  $f$  est la fonction nulle et  $\lambda$  n'est pas valeur propre.  
 Si  $\lambda \neq 0$ ,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $\lambda xy' = y$ .  
 Cette dernière est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène dont la solution générale sur  $]0; +\infty[$  est

$$y(x) = Cx^{1/\lambda}.$$

Ainsi, il existe  $C \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = Cx^{1/\lambda}.$$

Or pour qu'une telle fonction puisse être prolongée en une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; +\infty[$ , il faut  $C = 0$  ou  $1/\lambda \geq 1$ . Ainsi les valeurs propres de  $T$  sont les éléments de l'intervalle  $]0; 1]$ .  
 Inversement, soient  $\lambda \in ]0; 1]$  et la fonction  $f_\lambda : x \mapsto x^{1/\lambda}$  prolongée par continuité en 0.  
 La fonction  $f_\lambda$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $[0; +\infty[$ , s'annule en 0 et vérifie  $T(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$  sans être la fonction nulle.  
 Finalement, les valeurs propres de  $T$  sont exactement les éléments de l'intervalle  $]0; 1]$ .

**Exercice 30 :** [énoncé]

Dans le cas où

$$A = J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la propriété est immédiate en écrivant

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ E & F \end{pmatrix}$$

avec  $C$  bloc carré de taille  $r$ .  
 Dans le cas général, on peut écrire  $A = QJ_rP$  avec  $r = \text{rg } A$  et  $P, Q$  inversibles.

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^q \chi_{Q^{-1}ABQ}(X) = X^q \chi_{J_rPBQ}(X)$$

donc

$$X^q \chi_{AB}(X) = X^p \chi_{PBQJ_r}(X) = X^p \chi_{BQJ_rP}(X) = X^p \chi_{BA}(X).$$

**Exercice 31 :** [énoncé]

Le polynôme

$$X^3 + X^2 + X = X(X - j)(X - j^2)$$

annule la matrice  $A$ . Ce polynôme étant scindé à racines simples dans  $\mathbb{C}$ , la matrice  $A$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . De plus

$$\text{Sp } A \subset \{0, j, j^2\}.$$

Puisque la matrice  $A$  est réelle, les valeurs propres  $j$  et  $j^2$  ont même multiplicité  $p \in \mathbb{N}$ . La diagonalisation complexe de  $A$  comporte alors  $p$  nombres  $j$  et  $p$  nombres  $j^2$  sur la diagonale, les éventuels autres coefficients diagonaux étant nuls. La matrice  $A$  est alors de même rang que cette matrice diagonale, c'est-à-dire  $2p$ .

**Exercice 32 :** [énoncé]

L'implication directe est immédiate : elle découle de la stabilité par produit de l'espace des matrices triangulaires supérieures. Inversement, supposons  $A^k$  triangulaire supérieure pour tout  $k \geq 2$ . Introduisons le polynôme caractéristique de  $A$

$$P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + \det(A).$$

Puisque celui-ci est annulateur de  $A$ , on peut écrire

$$a_n A^n + \dots + a_1 A + \det(A)I_n = O_n.$$

En multipliant la relation par  $A$  et en réorganisant

$$A = \frac{-1}{\det A} (a_1 A^2 + \dots + a_n A^{n+1})$$

et la matrice  $A$  est donc triangulaire supérieure.

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

nous obtenons un contre-exemple où  $A^k = O_2$  pour tout  $k \geq 2$ .

**Exercice 33 :** [énoncé]

- (a) Oui, un tel polynôme existe, il suffit de se référer aux matrices compagnons !  
 Pour  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ , la matrice compagnon associée est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & -a_1 \\ & \ddots & 0 \\ (0) & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} X & (0) & a_0 \\ -1 & \ddots & a_1 \\ & \ddots & X \\ (0) & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Il peut se calculer par la succession d'opérations élémentaires

$$L_i \leftarrow L_i + XL_{i+1} \text{ avec } i \text{ allant de } n-1 \text{ à } 1 \text{ dans cet ordre.}$$

On obtient alors

$$\chi_M(X) = \begin{vmatrix} 0 & (0) & \alpha \\ -1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & 0 & (a_{n-2} + a_{n-1}X + X^2) \\ (0) & -1 & X + a_{n-1}X \end{vmatrix}$$

avec

$$\alpha = (a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n).$$

En développant selon la première ligne, on obtient

$$\chi_M(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n.$$

Ainsi, pour  $P \in \mathbb{Z}[X]$  unitaire de degré  $n$ , on peut construire une matrice à coefficients entiers dont le polynôme caractéristique est  $(-1)^n P(X)$ .

- (b) Il existe une matrice  $A$  dont le polynôme caractéristique est  $P$ . Puisque toute matrice complexe est trigonalisable, la matrice  $A$  est en particulier semblable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  à une matrice triangulaire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

La matrice  $A^q$  est alors semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^q & & *' \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n^q \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique de  $A^q$  est alors  $P_q$ . Or  $A^q$  est une matrice à coefficients entiers et donc son polynôme caractéristique  $P_q$  est aussi à coefficients entiers.

- (c) Compte tenu des relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé, on peut majorer les coefficients de  $P$  et affirmer que, pour un degré fixé, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes  $P$  possibles car les coefficients de  $P$  sont entiers et bornés. Considérons un tel polynôme. L'application  $q \in \mathbb{N}^* \mapsto P_q$  n'est pas injective compte tenu à cause de l'argument de cardinalité précédent. Il existe donc  $q < r$  tel que  $P_q = P_r$ . Ainsi, il existe une permutation  $\sigma$  de  $\mathbb{N}_n$  vérifiant :

$$\forall i \in \mathbb{N}_n, \lambda_i^q = \lambda_{\sigma(i)}^r.$$

À l'aide d'une décomposition en cycles de  $\sigma$ , on peut affirmer qu'il existe une puissance de  $\sigma$  égale à l'identité et donc conclure que pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$  il existe  $q' > q$  tel que  $\lambda_i^q = \lambda_i^{q'}$ . On peut alors affirmer que  $\lambda_i$  est nul ou bien racine de l'unité.

**Exercice 34 : [énoncé]**

Posons  $\phi$  l'endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  étudié. On observe que  $\phi^3 = \phi$ . Par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que  $\phi$  est diagonalisable de seules valeurs propres possibles 0, 1 et -1.

En introduisant une base adaptée à la projection  $f$ , la matrice de cet endomorphisme est  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

En notant  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  la matrice de  $u$  dans cette base, on obtient :

$$\begin{aligned} \phi(u) = 0 &\iff B = 0 \text{ et } C = 0. \\ \phi(u) = u &\iff A = 0, C = 0 \text{ et } D = 0. \\ \phi(u) = -u &\iff A = 0, B = 0 \text{ et } D = 0. \end{aligned}$$

**Exercice 35 : [énoncé]**

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$u$  annule un polynôme scindé simple, l'endomorphisme  $u$  est donc diagonalisable. Tout sous-espace vectoriel possédant une base de vecteurs propres est stable et inversement.

Cas  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Par le lemme de décomposition des noyaux, on a

$$E = \text{Ker}(u - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}).$$

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel stable alors posons

$$F_1 = F \cap \text{Ker}(u - \text{Id})$$

et

$$F_2 = F \cap \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id}).$$

Montrons  $F = F_1 \oplus F_2$ .

Tout  $x \in F$  peut s'écrire  $x = a + b$  avec  $a \in \text{Ker}(u - \text{Id})$  et  $b \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ .

Puisque  $u(x) = a + u(b) \in F$  et  $u^2(x) = a + u^2(b) \in F$ , on a

$$a = \frac{1}{3}(x + u(x) + u^2(x)) \in F \text{ puis } b = x - a \in F.$$

Ainsi  $a \in F_1$ ,  $b \in F_2$  et on a donc  $F \subset F_1 + F_2$ .

Il est alors immédiat qu'on peut alors conclure  $F = F_1 \oplus F_2$ .

Puisque  $F_2 \subset \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ , pour  $x \in F_2$  non nul  $(x, u(x))$  est libre et

$\text{Vect}(x, u(x))$  est stable par  $u$ . Cela permet d'établir que  $F_2$  est la somme directe de sous-espaces vectoriels de la forme  $\text{Vect}(x, u(x))$  avec  $x \neq 0$ ,

$x \in \text{Ker}(u^2 + u + \text{Id})$ . Quant à  $F_1$ , il n'y a pas de condition à souligner puisque tout sous-espace vectoriel de  $\text{Ker}(u - \text{Id})$  est stable par  $u$ .

**Exercice 36 : [énoncé]**

$P = X(X^2 - 3aX + a^2)$  est annulateur de  $f$  donc par le théorème de décomposition des noyaux,  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Ker}(f^2 - 3af + a^2\text{Id})$  car  $X$  et  $X^2 - 3aX + a^2$  sont premiers entre eux. Or  $a$  étant non nul, on montre élémentairement  $\text{Ker}(f^2 - 3af + a^2\text{Id}) \subset \text{Im } f$  tandis que l'inclusion réciproque provient de ce que  $(f^2 - 3af + a^2\text{Id}) \circ f = 0$ . Il est donc vrai que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont supplémentaires.

**Exercice 37 : [énoncé]**

- (a) L'application  $T$  est évidemment linéaire et est à valeurs dans  $E$ .  
Soit  $g \in E$ . Montrons que l'équation  $Tf = g$  admet une solution unique.  
Unicité : Si  $Tf = g$  alors  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  est solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle linéaire  $y' + y = g$  vérifiant  $y(0) = 0$ . Par le théorème de Cauchy ceci détermine  $x \mapsto \int_0^x f(t) dt$  de façon unique et donc  $f$  aussi.  
Existence : La dérivée de la fonction solution  $y' + y = g$  vérifiant  $y(0) = 0$  est solution.
- (b) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie stable par  $T$ . Notons  $I$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $I(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ . Puisque  $F$  est stable par  $T$ ,  $F$  est aussi stable par  $I$ . L'endomorphisme induit par  $I$  sur le sous-espace vectoriel de dimension finie  $F$  admet un polynôme minimal  $\pi = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ . On a alors pour tout  $f \in F$  l'égalité  $y + a_{n-1}y' + \dots + a_n y^{(n)} = 0$  en notant  $y = I^n(f)$ . De plus, on a les conditions initiales  $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$  ce qui donne  $y = 0$  puis  $f = 0$ . Ainsi  $F = \{0\}$ . Finalement, l'espace nul est le seul espace de dimension finie stable par  $T$ . Quel intérêt au « impaire » ?

**Exercice 38 : [énoncé]**

- (a)  $\text{Sp } B = \text{Sp } {}^t B$  car  $\chi_B = \chi_{{}^t B}$ .
- (b) Pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $A(CX) = \lambda(CX)$  donc  $CX \in \text{Ker}(A - \lambda I_n)$ .
- (c) Soit  $X$  et  $Y$  des vecteurs propres de  $A$  et  ${}^t B$  associé à la valeur propre  $\lambda$ . La matrice  $C = X {}^t Y$  est solution.
- (d) On peut écrire  $C = QJ_r P$  avec  $P, Q$  inversibles. La relation  $AC = CB$  donne  $Q^{-1}AQJ_r = J_r PBP^{-1}$ .  
En écrivant les matrices  $Q^{-1}AQ$  et  $PBP^{-1}$  par blocs, l'égalité  $Q^{-1}AQJ_r = J_r PBP^{-1}$  impose une décomposition en blocs triangulaire puis permet d'observer que  $\chi_A = \chi_{Q^{-1}AQ}$  et  $\chi_B = \chi_{PBP^{-1}}$  ont un facteur commun de degré  $\geq r$ , à savoir le polynôme caractéristique du bloc commun en position  $(1,1)$ .
- (e) La réciproque est assurément fautive en toute généralité. Pour  $r = n$ , deux matrices ayant même polynôme caractéristique ne sont pas nécessairement semblables.

**Exercice 39 : [énoncé]**

$A = PDP^{-1}$  avec  $D = \text{diag}(a + b, \dots, a + b, a - b, \dots, a - b)$  et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & (0) & 0 & 1 & (0) \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & (0) & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ (0) & & 1 & 0 & (0) & & -1 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & (0) & 0 & -1 & (0) \end{pmatrix}.$$

Par suite

$$\pi_A = (X - (a + b))(X - (a - b))$$

et les polynômes annulateurs de  $A$  sont les multiples de  $\pi_A$ .

**Exercice 40 : [énoncé]**

Supposons  $f$  diagonalisable et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de vecteurs propres de  $f$ .

Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on pose  $g_{i,j}$  l'endomorphisme de  $E$  déterminé par

$$g_{i,j}(e_k) = \delta_{j,k} e_i.$$

La famille  $(g_{i,j})$  est une base de  $\mathcal{L}(E)$  et on observe

$$T(g_{i,j}) = (\lambda_i - \lambda_j)g_{i,j}$$

donc  $T$  est diagonalisable.

Supposons  $f$  nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  pour lequel  $f^n = 0$ .

Puisque  $T^p(g)$  est combinaison linéaire de termes de la forme  $f^k \circ g \circ f^{p-k}$ , il est assuré que  $T^{2n} = 0$  et donc que  $T$  est nilpotente.

**Exercice 41 :** [énoncé]

On peut écrire

$$\Pi_f = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(f)} (X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$$

et

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$$

décomposition en somme de sous-espaces vectoriels stables par  $f$ .

Pour chaque  $\lambda \in \text{Sp}(f)$ ,

$$\text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1} \neq \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$$

par minimalité de  $\Pi_f$  et donc il existe  $x_\lambda \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda} \setminus \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda - 1}$ .  
On peut alors établir que la famille  $((f - \lambda \text{Id})^k(x_\lambda))_{0 \leq k \leq \alpha_\lambda - 1}$  est libre.

Considérons maintenant  $x = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} x_\lambda$ .

Pour  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $P(f)(x) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} P(f)(x_\lambda)$  avec  $P(f)(x_\lambda) \in \text{Ker}(f - \lambda \text{Id})^{\alpha_\lambda}$  par stabilité.

Par décomposition en somme directe,

$$P(f)(x) = 0 \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f), P(f)(x_\lambda) = 0.$$

Par division euclidienne  $P = (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} Q + R$  avec  $\deg R < \alpha_\lambda$  de sorte qu'on puisse écrire  $R = \sum_{k=0}^{\alpha_\lambda - 1} a_k (X - \lambda)^k$ . On alors

$$P(f)(x_\lambda) = 0 \iff \forall 0 \leq k < \alpha_\lambda, a_k = 0.$$

Ainsi

$$P(f)(x) = 0 \iff \forall \lambda \in \text{Sp}(f), (X - \lambda)^{\alpha_\lambda} \mid P.$$

Enfin puisque les termes  $(X - \lambda)^{\alpha_\lambda}$  sont premiers entre eux, on peut conclure

$$P(f)(x) = 0 \iff \Pi_f \mid P.$$

**Exercice 42 :** [énoncé]

Rappelons qu'une matrice  $M$  carrée de taille  $n$  qui est nilpotente vérifie  $M^n = O_n$  (l'ordre de nilpotence est au plus égal à la taille de la matrice). On a

$$\forall k \in \{0, \dots, n\}, (A + 2^k B)^n = O_n.$$

Considérons alors la matrice

$$(A + XB)^n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}[X]).$$

Celle-ci est à coefficients polynomiaux de degrés inférieurs à  $n$ . Puisque  $1, 2, \dots, 2^n$  sont  $n + 1$  racines distinctes de ces coefficients, ceux-ci sont tous nuls. On en déduit

$$A^n = O_n$$

car les coefficients constants sont nuls, et

$$B^n = O_n$$

car les coefficients des termes  $X^n$  sont aussi nuls.

**Exercice 43 :** [énoncé]

- (a) Puisque  $u^3 = u$ , par annulation d'un polynôme scindé simple, on peut affirmer que  $u$  est diagonalisable de valeurs propres possibles  $0, 1, -1$ . Par les égalités  $\text{tr } u = 0$  et  $\text{tr } u^2 = 2n$  on peut affirmer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^{2n+1}$  dans laquelle la matrice de  $u$  est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & -I_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices commutant avec  $A$  étant celle de la forme

$$\begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

avec  $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on peut affirmer

$$\dim C(u) = 2n^2 + 1.$$

- (b)  $\Pi_u = X^3 - X$  donc  $\dim \mathbb{R}[u] = 3$  et par suite  $C(u) = \mathbb{R}[u]$  si, et seulement si,  $n = 1$ .

**Exercice 44 :** [énoncé]

- (a) Si  $A^2 = A$  alors  $f_A^2 = f_A$ .  $f_A$  est une projection donc diagonalisable.  
 (b) Pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ , on observe  $P(f_A): M \mapsto P(A)M$  de sorte que

$$P(f_A) = 0 \iff P(A) = 0.$$

Tout endomorphisme étant diagonalisable si, et seulement si, il annule un polynôme scindé simple, on peut conclure.

**Exercice 45 :** [énoncé]

- (a) Puisque  $H$  est un hyperplan et que  $I_n \notin H$ , on a

$$H \oplus \text{Vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

Soit  $A$  une matrice nilpotente. On peut l'écrire  $A = B + \lambda I_n$  avec  $B \in H$ . La matrice  $B$  n'étant pas inversible, il existe une colonne  $X$  non nulle telle que  $BX = 0$  et alors  $AX = \lambda X$ . Le scalaire  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $A$ . Or les seules valeurs propres d'une matrice nilpotente sont nulles. On en déduit  $\lambda = 0$  puis  $A = B \in H$ .

- (b) Les matrices élémentaires  $E_{i,j}$  avec  $i \neq j$  sont nilpotentes car de carrées nulles; elles sont donc toutes éléments de  $H$  et par combinaison linéaire la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (0) & \ddots & 1 \\ 1 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

appartient à  $H$ . Cependant celle-ci est notoirement inversible.

**Exercice 46 :** [énoncé]

On remarque

$$C^3 - C^2 = 3A + 3B = 3C.$$

La matrice  $C$  annule donc le polynôme

$$X^3 - X^2 - 3X.$$

On vérifie aisément que ce polynôme est scindé à racines simples et on peut donc affirmer que  $C$  est diagonalisable. Or

$$A = C^3 - 2C^2 \text{ et } B = C + 2C^2 - C^3$$

donc  $A$  et  $B$  sont diagonalisables.

**Exercice 47 :** [énoncé]

- (a) L'implication ( $\Leftarrow$ ) est immédiate  
 ( $\Rightarrow$ ) Par récurrence sur  $n \geq 2$ .  
 Cas  $n = 2$   
 Soient  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$  tels que

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|.$$

En posant  $u = z_2/z_1$ , on a alors (car  $z_1 \neq 0$ )

$$|1 + u| = 1 + |u|.$$

En écrivant  $u = a + ib$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  et en élevant au carré l'identité précédente, on obtient

$$(1 + a)^2 + b^2 = 1 + 2\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2$$

et cette identité est vérifiée si, et seulement si,  $a \in \mathbb{R}_+$  et  $b = 0$  ce qui permet d'écrire  $z_2 = \alpha_2 z_1$  avec  $\alpha_2 = a \in \mathbb{R}_+$ .

Supposons la propriété établie au rang  $n \geq 2$ .

Soient  $z_1, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathbb{C}$  avec  $z_1 \neq 0$  tels que

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|.$$

Par l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

et puisque les termes extrémaux sont égaux on a

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

donc par hypothèse de récurrence on peut écrire pour tout  $k \geq 2$

$$z_k = \alpha_k z_1 \text{ avec } \alpha_k \geq 0.$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^n z_k = (1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) z_1 \neq 0$$

et puisque

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k + z_{n+1} \right| = \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}|$$

l'étude du cas  $n = 2$  permet d'écrire

$$z_{n+1} = a \sum_{k=1}^n z_k = \alpha_{n+1} z_1 \text{ avec } \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}_+.$$

Réurrence établie.

- (b) Si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  vérifie  $M^n = I_n$  et  $\text{tr } M = n$  alors cette matrice est diagonalisable (car annule le polynôme scindé à racines simples  $X^n - 1$ ) et ses valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  vérifient

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_n = n.$$

Or les valeurs propres vérifient aussi

$$\forall 1 \leq k \leq n, \lambda_k^n = 1$$

et elles sont donc de module 1. Nous sommes donc dans la situation où

$$|\lambda_1 + \dots + \lambda_n| = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|.$$

Puisque  $\lambda_1 \neq 0$ , on peut écrire  $\lambda_k = \alpha_k \lambda_1$  pour tout  $k \geq 2$  avec  $\alpha_k \geq 0$ . Or tous les  $\lambda_k$  sont de module 1 donc les  $\alpha_k$  sont égaux à 1 et par suite

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n.$$

Enfin puisque la somme des valeurs propres vaut  $n$ , on peut conclure

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 1$$

et finalement  $M = I_n$  car la matrice  $M$  est semblable à  $I_n$ .

La réciproque est immédiate.

**Exercice 48 : [énoncé]**

En introduisant l'espace  $E$  des fonctions réelles  $f$  continues sur  $]0; 1]$  telles que  $t \mapsto (tf(t))^2$  soit intégrable et en munissant cet espace du produit scalaire

$$(f|g) = \int_0^1 t^2 f(t)g(t) dt$$

la quantité cherchée est :  $m = d(f, F)^2$  avec  $f : t \mapsto \ln t$  et  $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$  où  $f_0(t) = 1$  et  $f_1(t) = t$ .

$m = \|f - p(f)\|^2$  avec  $p$  la projection orthogonale sur  $F$ .

$p(f)(t) = a + bt$  avec  $(p(f)|f_0) = (f|f_0)$  et  $(p(f)|f_1) = (f|f_1)$ .

La résolution du système ainsi obtenu donne  $a = 5/3$  et  $b = -19/12$ .

$m = \|f - p(f)\|^2 = (f - p(f)|f) = 1/432$ .

**Exercice 49 : [énoncé]**

- (a) Pour  $P, Q \in E$ , la fonction  $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$  est définie et continue par morceaux sur  $[0; +\infty[$  et vérifie

$$t^2 P(t)Q(t)e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0.$$

On peut donc affirmer que cette fonction est intégrable sur  $[0; +\infty[$  ce qui assure la bonne définition de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On vérifie aisément que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique positive.

Si  $\langle P, P \rangle = 0$  alors par nullité de l'intégrale d'une fonction continue positive

$$\forall t \in [0; +\infty[, P(t)^2 e^{-t} = 0.$$

On en déduit que le polynôme  $P$  admet une infinité de racines et donc  $P = 0$ .

- (b) Pour  $k \geq 1$  ou  $k = 0$ , on peut affirmer que les polynômes  $P_k$  et  $P'_k$  sont orthogonaux car

$$P'_k \in \text{Vect}(P_1, \dots, P_{k-1}).$$

Par une intégration par parties

$$0 = \int_0^{+\infty} P'_k(t)P_k(t)e^{-t} dt = \frac{1}{2} [P_k(t)^2 e^{-t}]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} P_k(t)^2 e^{-t} dt.$$

On en déduit

$$P_k(0)^2 = \|P_k\|^2 = 1.$$

- (c)  $F$  est un hyperplan (car noyau de la forme linéaire non nulle  $P \mapsto P(0)$ ). Son orthogonal est donc une droite vectorielle. Soit  $Q$  un vecteur directeur de celle-ci. On peut écrire

$$Q = \sum_{k=0}^n \langle P_k, Q \rangle P_k.$$

Or

$$\langle P_k, Q \rangle = \langle P_k - P_k(0), Q \rangle + P_k(0) \langle 1, Q \rangle.$$

Puisque le polynôme  $P_k - P_k(0)$  est élément de  $F$ , il est orthogonal à  $Q$  et l'on obtient

$$\langle P_k, Q \rangle = P_k(0) \langle 1, Q \rangle$$

ce qui permet d'écrire

$$Q = \lambda \sum_{k=0}^n P_k(0) P_k \text{ avec } \lambda = \langle 1, Q \rangle \neq 0.$$

On en déduit

$$d(1, F) = \frac{|\langle 1, Q \rangle|}{\|Q\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{k=0}^n P_k(0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Enfin par Pythagore

$$\|1\|^2 = d(1, F)^2 + d(1, F^\perp)^2$$

et l'on obtient

$$d(1, F^\perp) = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

### Exercice 50 : [énoncé]

- (a) Puisque  $A$  et  ${}^tA$  commutent, on a  $({}^tAA)^p = ({}^tA)^p A^p = 0$  et donc  ${}^tAA$  est nilpotente.

D'autre part, la matrice  ${}^tAA$  est symétrique réelle donc diagonalisable. Étant nilpotente, sa seule valeur propre possible est 0 et donc  ${}^tAA$  est nulle car semblable à la matrice nulle.

- (b) En exploitant le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  on a

$$\|A\|^2 = (AA \mid \mid) \text{tr}({}^tAA) = 0$$

et donc  $A = 0$

### Exercice 51 : [énoncé]

Soit  $M$  solution.  $M^4 = {}^t(M^2) = M$  donc  $X^4 - X$  est annulateur de  $M$  et puisque 0 et 1 ne sont pas valeurs propres de  $M$ ,  $X^3 - 1$  puis  $X^2 + X + 1$  sont annulateurs de  $M$ .

Ainsi, on peut affirmer  $M^3 = {}^tMM = I$  (ainsi  $M \in \text{O}_n(\mathbb{R})$ ) et  $M^2 + M + I = 0$ . Pour  $X \neq 0$ ,  $P = \text{Vect}(X, MX)$  est un plan (car il n'y a pas de valeurs propres réelles) stable par  $M$  (car  $M^2 = -M - I$ ). La restriction de  $M$  à ce plan est un

automorphisme orthogonal sans valeur propre, c'est donc une rotation et celle-ci est d'angle  $\pm 2\pi/3$  car  $M^3 = I_n$ . De plus ce plan est aussi stable par  $M^2 = {}^tM$  donc  $P^\perp$  est stable par  $M$  ce qui permet de reprendre le raisonnement à partir d'un  $X' \in P^\perp \setminus \{0\}$ . Au final,  $M$  est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs et aux blocs diagonaux égaux à

$$\begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

La réciproque est immédiate.

### Exercice 52 : [énoncé]

Puisque les valeurs propres de  $u$  sont strictement positives, on montre par orthodiagonalisation

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \langle u(x), x \rangle > 0.$$

Soit  $x \in E$ .

Si  $x = 0_E$ , l'inégalité demandée est évidente et c'est même une égalité.

Si  $x \neq 0_E$ , considérons  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On a

$$\langle u(x + \lambda u^{-1}(x)), x + \lambda u^{-1}(x) \rangle \geq 0$$

donc en développant

$$\lambda^2 \langle x, u^{-1}(x) \rangle + 2\lambda \langle x, x \rangle + \langle u(x), x \rangle \geq 0.$$

Or  $\langle x, u^{-1}(x) \rangle = \langle u(u^{-1}(x)), u^{-1}(x) \rangle > 0$ , par suite, le discriminant

$$\Delta = 4\|x\|^4 - 4\langle u(x), x \rangle \langle u^{-1}(x), x \rangle$$

est négatif ou nul car sinon le trinôme en  $\lambda$  précédent posséderait deux racines et ne serait donc pas de signe constant.

On en déduit l'inégalité proposée.

De plus, il y a égalité si, et seulement si, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  vérifiant  $x + \lambda u^{-1}(x) = 0_E$  i.e. si, et seulement si,  $x$  est vecteur propre de  $u$ .

### Exercice 53 : [énoncé]

- (a)  ${}^tA = -A$  donne  $\det A = (-1)^n \det A$  donc  $\det A = 0$  si  $n$  est impair.  
 (b) Si  $\lambda$  est valeur propre réelle de  $A$  alors on peut écrire  $AX = \lambda X$  pour une certaine colonne  $X$  non nulle. On a alors  ${}^tXAX = \lambda {}^tXX$  mais aussi

${}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda{}^tXX$ . On en déduit que la seule valeur propre réelle de  $A$  possible est la valeur nulle.

Par l'absurde, si  $\det A < 0$  alors le théorème des valeurs intermédiaires assure que le polynôme caractéristique de  $A$  s'annule ailleurs qu'en 0. C'est contraire à l'affirmation qui précède.

Ainsi  $\det A \geq 0$  avec inégalité stricte si, et seulement si,  $A$  est inversible.

#### Exercice 54 : [énoncé]

(a) Posons

$$U_p = \frac{1}{p+1}(I_n + A + \dots + A^p).$$

On a

$$(I - A)U_p = \frac{1}{p+1}(I_n - A^{p+1}) \rightarrow 0$$

car pour la norme euclidienne

$$\forall M \in O_n(\mathbb{R}), \|M\| = \sqrt{n}.$$

Puisque  $1 \notin \text{Sp } A$ ,  $U_p \rightarrow 0$ .

- (b) Par l'absurde si  $A^p$  converge vers  $B$  alors pour tout  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $A^{p+1}X = AA^pX$  donne à la limite  $BX = ABX$ . Or  $1 \notin \text{Sp } A$  donc  $BX = 0$  et puisque ceci vaut pour tout  $X$ ,  $B = 0$ .  
Or  $\|A^p\| = \sqrt{n} \not\rightarrow 0$ . Absurde.  
La suite  $(A^p)_{p \in \mathbb{N}}$  est divergente.

#### Exercice 55 : [énoncé]

Un tel endomorphisme conserve l'orthogonalité. Pour tout  $x, y$  vérifiant  $\|x\| = \|y\|$ , on a  $x + y$  et  $x - y$  orthogonaux donc  $f(x) + f(y)$  et  $f(x) - f(y)$  aussi. Par suite  $\|f(x)\| = \|f(y)\|$ . Ainsi un tel endomorphisme transforme une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  en une famille orthogonale aux vecteurs isométriques. Par suite  $f = \lambda g$  avec  $g \in O(E)$ .  
La réciproque est immédiate.

#### Exercice 56 : [énoncé]

Soit  $Y \in \text{Ker } A \cap \text{Im } A$ . On peut écrire  $Y = AX$  pour une certaine colonne  $X$ .  
On a

$${}^tYY = {}^t(AX)Y = -{}^tXAY = 0$$

et donc  $Y = 0$ . En sus,

$$\text{rg } A + \dim \text{Ker } A = n$$

et donc les espaces  $\text{Im } A$  et  $\text{Ker } A$  sont supplémentaires. Puisque l'espace  $\text{Im } A$  est évidemment stable, on obtient que la matrice  $A$  est semblable à une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice  $A$  est égale par similitude au rang de la matrice  $C$  mais aussi par construction à la taille de  $C$ . On en déduit que la matrice  $C$  est inversible (On peut aussi établir que les espaces  $\text{Im } A$  et  $\text{Ker } A$  sont orthogonaux et, en considérant des bases orthonormées, observer que la matrice  $A$  est orthogonalement semblable à  $B$  avec un bloc  $C$  antisymétrique).

Enfin, si  $\lambda$  est valeur propre réelle de  $A$  de vecteur propre  $X \neq 0$  on a

$${}^tXAX = \lambda X \text{ et } {}^tXAX = -{}^t(AX)X = -\lambda{}^tXX.$$

On en déduit que seule 0 peut être valeur propre réelle de  $A$ . La matrice  $C$  n'a donc pas d'autre valeur propre que 0, or elle est inversible, elle n'admet donc pas de valeur propre. Elle est alors nécessairement de taille paire.

#### Exercice 57 : [énoncé]

- (a) On reconnaît le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .  
(b) Posons  $f: M \mapsto \Omega M$ .  $(f(M) | f(N)) = \text{tr}({}^tM^t\Omega\Omega N)$ .  
 $f$  est  $\varphi$ -orthogonale si, et seulement si, pour tout  $M, N \in \mathcal{M}$ ,  
 $(M | {}^t\Omega\Omega N) = (M | N)$  i.e. pour tout  $N \in \mathcal{M}$ ,  ${}^t\Omega\Omega N = N$  i.e.  ${}^t\Omega\Omega = I_n$ .  
Ainsi  $f$  est  $\varphi$ -orthogonale si, et seulement si,  $\Omega$  l'est.

#### Exercice 58 : [énoncé]

On a

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(u)) = -g(u)$$

et pour  $g(v) \perp g(u)$ ,

$$(g \circ \sigma \circ g^{-1})(g(v)) = g(v).$$

Ainsi  $g \circ \sigma \circ g^{-1}$  est la réflexion par rapport à  $g(u)^\perp$ .

**Exercice 59 :** [énoncé]

$J + A$  n'est pas inversible si, et seulement si, il existe une colonne non nulle vérifiant  $AX = -JX$ .

On a alors  ${}^tAJX = -X$  et donc  $-1 \in \text{Sp}({}^tAJ) = \text{Sp}(JA)$  avec une réciproque immédiate.

Le polynôme caractéristique de  $JA$  étant

$$X^{n-1}(X - \sum_{i,j} a_{i,j})$$

on obtient le critère

$$J + A \text{ est inversible si, et seulement si, } \sum_{i,j} a_{i,j} \neq -1.$$

**Exercice 60 :** [énoncé]

Supposons (i) et (ii).

Pour  $x \in E$ , on a

$$(f(x)|x) = -(f(x)|f^2(x)) = -(x|f(x))$$

et donc

$$(f(x)|x) = 0.$$

Supposons (ii) et (iii)

Le vecteur  $x + f(x)$  et son image par  $f$  sont orthogonaux donc

$$(x + f(x)|f(x + f(x))) = (x + f(x)|f(x) - x) = 0$$

puis  $\|f(x)\|^2 = \|x\|^2$ . Ainsi  $f$  est une isométrie.

Supposons (i) et (iii)

Pour tous vecteurs  $x$  et  $y$

$$(f^2(x) + x|f(y)) = (f(x)|y) + (x|f(y)).$$

Or

$$(f(x + y)|x + y) = (f(x)|y) + (f(y)|x) = 0$$

donc

$$(f^2(x) + x|f(y)) = 0.$$

Puisque  $f$  est surjective,  $f^2(x) + x = 0_E$ .

**Exercice 61 :** [énoncé]

$M$  est diagonalisable et ses valeurs propres sont racines de  $X^p - 1$ , elles ne peuvent donc qu'être 1 ou  $-1$ . Par suite  $M^2 = I_n$ .

**Exercice 62 :** [énoncé]

Si  $A$  est diagonale égale à  $\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$  alors

$$\text{tr}(AU) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{i,i}.$$

Or les coefficients d'une matrice orthogonale appartiennent à  $[-1; 1]$  donc

$$\text{tr}(AU) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A).$$

Plus généralement, si  $A$  est symétrique réelle à valeurs propres positives, on peut écrire  $A = {}^tVDV$  avec  $V$  orthogonale et  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  où  $\lambda_i \in \mathbb{R}_+$ . On a alors

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}({}^tVDVU) = \text{tr}(DW)$$

avec  $W = VU^tV$  orthogonale. On a alors

$$\text{tr}(AU) \leq \text{tr} D = \text{tr} A.$$

L'étude de  $\text{tr}(UA)$  est analogue.

**Exercice 63 :** [énoncé]

Le produit scalaire canonique sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est donné par

$$(A|B) = \text{tr}({}^tAB).$$

- (a) L'espace solution est  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ . En effet, les espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont orthogonaux car pour  $(A, B) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  on a

$$(A|B) = \text{tr}({}^tAB) = \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

et

$$(A|B) = (B|A) = \text{tr}({}^tBA) = -\text{tr}(BA)$$

donc  $(A|B) = 0$ .

Les espaces étant orthogonaux, ils sont donc en somme directe. Puisque de plus on peut écrire n'importe quelle matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sous la forme  $M = A + B$  avec

$$A = \frac{M + {}^tM}{2} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \text{ et } B = \frac{M - {}^tM}{2} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$$

les espaces  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont supplémentaires orthogonaux et donc chacun est l'orthogonale de l'autre.

car ces espaces sont évidemment orthogonaux et supplémentaires.

(b) On a

$${}^t\exp(xB) \exp(xB) = \exp({}^t(xB)) \exp(xB) = \exp(-xB) \exp(xB).$$

Or  $-xB$  et  $xB$  commutent donc

$${}^t\exp(xB) \exp(xB) = \exp(-xB + xB) = \exp(0) = I_n.$$

(c) La fonction dérivable  $f: x \mapsto \text{tr}(A \exp(xB))$  admet un maximum en 0 donc  $f'(0) = 0$  ce qui donne  $\text{tr}(AB) = 0$  pour tout  $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ . Ainsi  $A$  est une matrice symétrique car dans l'orthogonal de l'espace des matrices antisymétrique.

Par le théorème spectrale, on peut écrire  $A = {}^tPDP$  avec

$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  et  $P \in O_n(\mathbb{R})$ .

Posons  $V = \text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  avec  $\varepsilon_i = \pm 1$  et  $\varepsilon_i \lambda_i = |\lambda_i|$ .

Considérons alors  $U = {}^tPVP \in O_n(\mathbb{R})$ .

$$\text{tr}(AU) = \text{tr}(A {}^tPVP) = \text{tr}(P A {}^tPV) = \text{tr}(DV) = |\lambda_1| + \dots + |\lambda_n|$$

et

$$\text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n.$$

La propriété  $\text{tr}(AU) \leq \text{tr} A$  entraîne  $\lambda_i \geq 0$  pour tout  $i$ .

La matrice  $A$  est alors symétrique positive.

(d) Supposons  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . On peut écrire  $A = {}^tPDP$  avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ,  $\lambda_i \geq 0$  et  $P \in O_n(\mathbb{R})$ . Pour tout  $U \in O_n(\mathbb{R})$ ,  $\text{tr}(AU) = \text{tr}(DV)$  avec  $V = (v_{i,j}) = {}^tPUP \in O_n(\mathbb{R})$ .

On a alors

$$\text{tr}(DV) = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_{i,i} \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A)$$

car  $v_{i,i} \leq 1$ .

(e) L'application réelle  $f: V \rightarrow \text{tr}(MV)$  est continue sur le compact  $O_n(\mathbb{R})$ , elle y admet donc un maximum en un certain  $U \in O_n(\mathbb{R})$ . On a alors pour tout  $V \in O_n(\mathbb{R})$ ,

$$\text{tr}(MV) \leq \text{tr}(MU).$$

Posons alors  $A = MU$ . Pour tout  $W \in O_n(\mathbb{R})$ ,

$$\text{tr}(AW) \leq \text{tr} A$$

donc  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et ainsi  $M = AU^{-1}$  avec  $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  et  $U^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ .

#### Exercice 64 : [énoncé]

Par comparaison de noyau, il est facile d'obtenir :  $\text{rg} A = \text{rg} {}^tAA$ .

La matrice  ${}^tAA$  étant symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc son rang est égal au nombre de ses valeurs propres non nulles comptées avec multiplicité.

#### Exercice 65 : [énoncé]

Soit  $M$  solution,  $M$  est diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  avec pour valeurs propres  $j$  et  $j^2$ .

Puisque  $\text{tr} M$  est réel, les valeurs propres  $j$  et  $j^2$  ont même multiplicité. Par suite  $n$  est pair,  $n = 2p$ .

Nous allons montrer, en raisonnant par récurrence sur  $p$  qu'il existe une matrice orthogonale  $P$  tel que

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} J & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & J \end{pmatrix}$$

avec

$$J = R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ou } J = R_{-2\pi/3}.$$

Pour  $n = 2$  :  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$${}^tMM = M {}^tM \iff \begin{cases} ab + cd = ac + db \\ b^2 = c^2 \end{cases}$$

Si  $b = c$  alors  $M$  est symétrique donc diagonalisable sur  $\mathbb{R}$  ce qui n'est pas le cas.

Il reste  $b = -c$  et donc  $a = d$ .

Ainsi  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$  et la relation  $M^2 + M + I = 0$  donne

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + a + 1 = 0 \\ 2ab + b = 0 \end{cases}$$

puis

$$\begin{cases} a = -1/2 \\ b = \pm\sqrt{3}/2 \end{cases}$$

ce qui permet de conclure (car le cas  $b = 0$  est à exclure).

Supposons la propriété établie au rang  $n = 2p$  et étudions le rang  $n = 2p + 2$ .

Soit  $M$  une matrice solution.

La matrice  $S = {}^tM + M$  est symétrique et donc il existe  $X \neq 0$  tel que  $SX = \lambda X$ .

On observe alors que l'espace  $F = \text{Vect}(X, MX)$  est stable par  $M$  et par  ${}^tM$ . Par suite  $F^\perp$  est aussi stable par  $M$  et  ${}^tM$ . On peut alors appliquer l'étude menée pour  $n = 2$  à l'action de  $M$  sur  $F$  et l'hypothèse de récurrence à celle sur  $F^\perp$ .

Cela établit la récurrence. Il ne reste plus qu'à souligner que les matrices ainsi obtenues sont bien solutions.

### Exercice 66 : [énoncé]

- (a) Soit  $\lambda$  une valeur propre complexe de  $A$  et  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$  une colonne propre associée.

D'une part  ${}^t\bar{X}AX = \lambda{}^t\bar{X}X$ , d'autre part  ${}^t\bar{X}AX = {}^t\bar{A}\bar{X}X = -\bar{\lambda}{}^t\bar{X}X$ .

Puisque  ${}^t\bar{X}X \in \mathbb{R}_+^*$ , on obtient  $\bar{\lambda} = -\lambda$  donc  $\lambda \in i\mathbb{R}$ .

- (b) Pour tout  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ,  $\Omega = \varphi(A)$  est bien définie car  $-1 \notin \text{Sp} A$ .

${}^t\Omega\Omega = (\text{I}_n - A)^{-1}(\text{I}_n + A)(\text{I}_n - A)(\text{I}_n + A)^{-1}$  or  $\text{I}_n + A$  et  $\text{I}_n - A$  commutent donc  ${}^t\Omega\Omega = \text{I}_n$ .

De plus, si  $\Omega X = -X$  alors  $(\text{I}_n - A)X = -(\text{I}_n + A)X$  (car  $\text{I}_n - A$  et  $(\text{I}_n + A)^{-1}$  commutent) et donc  $X = 0$ .

Ainsi l'application  $\varphi: \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \{\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R}) \mid -1 \notin \text{Sp}(\Omega)\}$  est bien définie.

Si  $\varphi(A) = \varphi(B)$  alors  $(\text{I}_n - A)(\text{I}_n + B) = (\text{I}_n + A)(\text{I}_n - B)$ . En développant et en simplifiant on obtient  $A = B$  et donc l'application  $\varphi$  est injective.

Enfin soit  $\Omega \in \text{O}_n(\mathbb{R})$  tel que  $-1 \notin \text{Sp}(\Omega)$ .

Posons  $A = (\Omega + \text{I}_n)^{-1}(\text{I}_n - \Omega)$  qui est bien définie car  $-1 \notin \text{Sp} \Omega$ .

On a  ${}^tA = (\text{I}_n - \Omega^{-1})(\Omega^{-1} + \text{I}_n)^{-1} = (\Omega - \text{I}_n)\Omega^{-1}(\text{I}_n + \Omega)^{-1} =$

$(\Omega - \text{I}_n)(\text{I}_n + \Omega)^{-1} = -A$  et  $\varphi(A) = \Omega$ .

Finalement  $\varphi$  est bijective.

### Exercice 67 : [énoncé]

- (a) Notons  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $M_u$ .

Si  $(u_1, \dots, u_p)$  est liée alors il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E.$$

On a alors

$$\forall 1 \leq i \leq p, (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p | u_i) = 0$$

et donc

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0.$$

La matrice  $M_u$  n'est alors pas inversible.

Inversement, supposons la matrice  $M_u$  non inversible.

Il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  non tous nuls vérifiant

$$\lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_p C_p = 0$$

et donc

$$\forall 1 \leq i \leq p, (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p | u_i) = 0.$$

Ainsi

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)^\perp$$

or

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$$

donc

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_p u_p = 0_E$$

et la famille  $(u_1, \dots, u_p)$  est liée.

- (b) Posons  $r = \text{rg}(u_1, \dots, u_p)$  et quitte à permuter les vecteurs  $(u_1, \dots, u_p)$ , supposons que les  $r$  premiers vecteurs de la famille  $u$  sont indépendants. On permute de la même façon les vecteurs  $(v_1, \dots, v_p)$  et ainsi l'hypothèse  $M_u = M_v$  est conservée. Par l'étude qui précède, on peut affirmer que les  $r$  premiers vecteurs de la famille  $v$  sont indépendants et que les autres en sont combinaisons linéaires.

Considérons alors l'application linéaire  $h: \text{Vect}(u_1, \dots, u_r) \rightarrow \text{Vect}(v_1, \dots, v_r)$  déterminée par

$$\forall 1 \leq k \leq r, h(u_k) = v_k.$$

Pour tout  $x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r$ , on a par construction

$$h(x) = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r.$$

Or

$$\|x\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i \lambda_j (u_i | u_j) \text{ et } \|h(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^r \lambda_i \lambda_j (v_i | v_j)$$

et puisque  $(u_i | u_j) = (v_i | v_j)$ , on obtient

$$\|x\|^2 = \|h(x)\|^2.$$

L'application  $h$  conserve donc la norme

Pour tout  $k \in \{r+1, \dots, p\}$ ,  $u_k$  est combinaison linéaire des  $u_1, \dots, u_r$  ce qui permet d'écrire

$$u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r.$$

On a alors pour tout  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,

$$(u_k - (\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_r u_r) | u_i) = 0$$

et donc

$$(v_k - (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) | v_i) = 0.$$

On en déduit  $v_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$  puis  $v_k = h(u_k)$ .

Enfin, on prolonge  $h$  en un automorphisme orthogonal solution défini sur  $\mathbb{R}^n$  en introduisant une application linéaire transformant une base orthonormée de  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_r)^\perp$  en une base orthonormée de  $\text{Vect}(v_1, \dots, v_r)^\perp$

**Exercice 68 :** [énoncé]

$\text{Sp}(J) = \{0, n\}$ ,  $E_0(J): x_1 + \dots + x_n = 0$  et  $E_n(J): x_1 = \dots = x_n$ .  
Les matrices

$$D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0)$$

et

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{n} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ \vdots & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & -2/\sqrt{6} & \ddots & \vdots \\ 1/\sqrt{n} & (0) & & & 1/\sqrt{n^2-n} \\ & & & & -(n-1)/\sqrt{n^2-n} \end{pmatrix}$$

conviennent.

Les colonnes d'indices 2 à  $n$  de la matrice  $P$  sont formées de coefficients de  $a, \dots, a, b, 0, \dots, 0$  de somme nulle et de somme de carrés égale à 1.

**Exercice 69 :** [énoncé]

Cas  $A$  diagonale :

On écrit  $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ . On a

$$AB + BA = ((\lambda_i + \lambda_j) b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$$

et donc

$$\forall 1 \leq i, j \leq n, (\lambda_i + \lambda_j) b_{i,j} = 0.$$

Si  $\lambda_i \neq 0$  alors  $\lambda_i + \lambda_j > 0$  et donc  $b_{i,j} = 0$  puis  $\lambda_i b_{i,j} = 0$ .

Sinon, on a encore  $\lambda_i b_{i,j} = 0$ .

Ainsi  $AB = 0$  puis aussi  $BA = 0$ .

Cas général :

Par le théorème spectral, on peut écrire  $A = PDP^{-1}$  avec  $D$  diagonale à coefficients diagonaux positifs et  $P \in O_n(\mathbb{R})$ .

La relation  $AB + BA = 0$  donne alors  $DM + MD = 0$  avec  $M = P^{-1}BP$ . Comme au dessus, on obtient  $DM = 0$  puis

$$AB = PDP^{-1}PMP^{-1} = 0.$$

**Exercice 70 :** [énoncé]

(a)  ${}^t A = A^2$  donne aussi  $A = {}^t(A^2) = ({}^t A)^2 = A^4$ . Or  $A$  est inversible donc  $A^3 = I_n$ .

Enfin  ${}^t A A = A^3 = I_n$  et donc  $A$  est orthogonale.

(b) L'endomorphisme induit par  $f$  sur le noyau de  $f^2 + f + \text{Id}$  est représentable par une matrice  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  vérifiant  $M^2 + M + I_p = O_p$ . Cette matrice est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  avec les deux valeurs propres complexes  $j$  et  $j^2 = \bar{j}$ . Celles-ci ont même multiplicité  $m$  et donc  $p = \dim \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id}) = 2m$  est un entier pair. De plus  $M$  est alors semblable dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  à une matrice diagonale avec des blocs diagonaux  $\text{diag}(j, j^2)$ . Or la matrice de rotation

$$\Omega = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix}$$

est aussi semblable à la matrice  $\text{diag}(j, j^2)$  dans  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

En raisonnant par blocs, on obtient que la matrice  $M$  est semblable dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  à une matrice diagonale par blocs de blocs diagonaux  $\Omega$ . Or ces deux matrices sont réelles et il est « bien connu » que deux matrices réelles semblables sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  le sont aussi sur  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ .

Enfin, par le lemme de décomposition des noyaux

$$\mathbb{R}^n = \text{Ker}(f - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f^2 + f + \text{Id})$$

et dans une base adaptée à cette décomposition, on obtient que  $f$  peut être représenté par une matrice de la forme

$$\text{diag}(1, \dots, 1, \Omega, \dots, \Omega).$$

**Exercice 71 :** [\[énoncé\]](#)

La matrice  $A$  est diagonalisable semblable à

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Posons  $C = D^3 + D + I_n$ . En montrant que  $D$  est un polynôme en  $C$  i.e.

$D = P(C)$  on vérifie par similitude que  $A$  est un polynôme en  $B$  à savoir

$$A = P(B).$$

On a

$$C = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n) \text{ avec } \mu_i = \lambda_i^3 + \lambda_i + 1.$$

On vérifie aisément que la fonction  $x \mapsto x^3 + x + 1$  est injective sur  $\mathbb{R}$ . Ainsi les  $\mu_i$  égaux correspondent aux  $\lambda_i$  égaux et inversement ce qui permet de considérer un polynôme interpolateur construit de sorte que

$$\forall 1 \leq i \leq n, P(\mu_i) = \lambda_i.$$

On vérifie alors  $P(C) = D$  et l'on conclut.

**Exercice 72 :** [\[énoncé\]](#)

On a

$$A^7 = A^4 \times (A^t A) = A^{5t} A$$

puis

$$A^7 = A^3 ({}^t A)^2 = A ({}^t A)^3 = A^t (A^t A) = A^{2t} A = A^4.$$

Ainsi  $X^7 - X^4 = X^4(X^3 - 1)$  annule  $A$ .

Ce polynôme n'est pas à racines simples, mais en montrant

$$\text{Ker } A^4 = \text{Ker } A$$

on pourra affirmer que le polynôme  $X(X^3 - 1)$  annule aussi  $A$  et, ce dernier étant scindé à racines simples sur  $\mathbb{C}$ , cela sera décisif pour conclure.

Evidemment  $\text{Ker } A \subset \text{Ker } A^4$ . Inversement, soit  $X \in \text{Ker } A^4$ . On a

$$A^t A A X = A^4 X = 0$$

donc

$$\|{}^t A A X\|^2 = {}^t X^t A A^t A A X = 0$$

et par conséquent  ${}^t A A X = 0$ . Alors

$$\|A X\|^2 = {}^t X^t A A X = 0$$

et donc  $A X = 0$ . Ainsi  $\text{Ker } A^4 \subset \text{Ker } A$  puis l'égalité.