Exercice 1 [02796] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}.$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 2 [02797] [Correction]
Soit (u_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$, de limite 0. Pour $n \geq 1$, on pose

$$v_n = n^2 u_{n^2}.$$

Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Exercice 3 [02803] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1}.$$

Exercice 4 [02806] [Correction]
Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Exercice 5 [02790] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$$

où $a > 0$.

Exercice 6 [03879] [Correction]
On donne une suite réelle (a_n).
On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 7 [02791] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 8 [02793] [Correction]
Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

Exercice 9 [02802] [Correction]
Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha}.$$

(a) Pour quels couples (a, α) la suite (u_n) est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n - \ell.$$

(b) Nature des séries de termes généraux v_n et $(-1)^n v_n$.

Exercice 10 [02804] [Correction]
Convergence puis calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}.$$

Exercice 11 [02805] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Exercice 12 [02810] [Correction]
On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geq 1$ et $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

(a) Montrer que f' est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

(b) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.

(c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 13 [03882] [Correction]
Déterminer
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(3k-1)^{1/n}.$$

Exercice 14 [03881] [Correction]
Pour $a>0$, étudier la convergence de
$$\sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}.$$

Exercice 15 [02822] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ dérivable.

(a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Si $\left|f'(x)\right|\to+\infty$ quand $x\to+\infty$, montrer que f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16 [02812] [Correction]
Soit $f\colon]0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ telle que
$$\lim_{x\to 0} f(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(x/2)}{\sqrt{x}}=1.$$
Trouver un équivalent simple en 0 de f.

Exercice 17 [02813] [Correction]
Soient f et g des fonctions continues de $[0\,;1]$ dans $[0\,;1]$ telles que $f\circ g=g\circ f$.

(a) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.

(b) Montrer l'existence de $c\in[0\,;1]$ tel que $f(c)=g(c)$.

Exercice 18 [02819] [Correction]
On pose $f(x)=\mathrm{e}^{-1/x^2}$ pour x réel non nul et $f(0)=0$.

(a) Montrer l'existence pour tout $n\in\mathbb{N}$ d'un polynôme P_n tel que :
$$\forall x\in\mathbb{R}^*, f^{(n)}(x)=x^{-3n}P_n(x)f(x).$$
Quel est le degré de P_n ?

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, toutes ses dérivées étant nulles en 0.

(c) Montrer que toute racine de P_n est réelle.

Exercice 19 [02421] [Correction]
Convergence de
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20 [02826] [Correction]
Calculer
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t$$
où $a>0$.

Exercice 21 [02827] [Correction]
Trouver une expression simple de
$$\int_0^{\pi}\frac{\sin^2 t}{(1-2x\cos t+x^2)(1-2y\cos t+y^2)}\,\mathrm{d}t$$
où $x,y\in\,]-1\,;1[$.

Exercice 22 [02879] [Correction]

(a) Donner la nature de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$
On pose pour tout réel x
$$f(x)=\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée.

(c) Calculer
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 23 [02829] [Correction]
Donner un exemple de $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable et non bornée.

Exercice 24 [02824] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

Exercice 25 [02825] [Correction]
Existence et calcul éventuel de
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 26 [03884] [Correction]
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, étudier l'existence et déterminer l'éventuelle valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}.$$

Exercice 27 [02834] [Correction]
Si $x > 1$, on pose
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

(a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$?

(b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

(c) Si
$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$
montrer que F est continue sur $[-1\,;1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

(d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 28 [02839] [Correction]
On pose
$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$
pour tout réel $x \in [0\,;1]$ et tout entier naturel n.
Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 29 [02833] [Correction]
On note U l'ensemble des complexes de module 1 et on considère ω un complexe de module $\neq 1$.
Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction
$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$$
soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 30 [03754] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.
Montrer l'existence d'une fonction $g\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x).$$

Exercice 31 [02830] [Correction]
On pose, pour $x \geq 0$,
$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 32 [02835] [Correction]
Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit
$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

(a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(b) Montrer
$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

(c) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 33 [02836] [Correction]
Soit α un réel. Pour tout entier $n>0$ et tout réel x, on pose
$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}.$$
On note I le domaine de définition de
$$S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

(a) Déterminer I.

(b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

(d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$
ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?

(e) Étudier la continuité de S sur I.

Exercice 34 [02837] [Correction]
On pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}.$$
Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^-.

Exercice 35 [03203] [Correction]
Définition, continuité et dérivabilité de
$$S\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Exercice 36 [02728] [Correction]
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence de :

(i) toute valeur propre de M est de module strictement inférieur à 1 ;

(ii) la suite (M^k) tend vers 0 ;

(iii) la série de terme général M^k converge.

Exercice 37 [03925] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que dire de B ?

Exercice 38 [02766] [Correction]
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

(a) Montrer que pour tous $x, y \in E$
$$\|x\| + \|y\| \leq 2\max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}.$$

(b) Montrer que l'on peut avoir l'égalité avec $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Désormais la norme est euclidienne.

(c) Montrer que pour tous $x, y \in E$
$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\max\left\{\|x+y\|, \|x-y\|\right\}.$$

(d) Peut-on améliorer la constante$\sqrt{2}$?

Exercice 39 [02832] [Correction]
Soient d un entier naturel et (f_n) une suite de fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de degré au plus d. On suppose que cette suite converge simplement.
Montrer que la limite est polynomiale de degré au plus d, la convergence étant de plus uniforme sur tout segment.

Exercice 40 [02741] [Correction]
Soit $K \in \mathcal{C}\big([0\,;1]^2, \mathbb{R}\big)$ non nulle telle que

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, K(x,y) = K(y,x).$$

On note $E = \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, soit

$$\Phi(f)\colon x \in [0\,;1] \to \int_0^1 K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \in \mathbb{R}.$$

(a) Vérifier que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$.

(b) L'application Φ est-elle continue pour $\|\cdot\|_\infty$? pour $\|\cdot\|_1$?

(c) Montrer que

$$\forall f, g \in E, (\Phi(f) \mid g) = (f \mid \Phi(g)).$$

Soit

$$\Omega = \left(\max_{0 \le x \le 1} \int_0^1 \big|K(x,y)\big|\,\mathrm{d}y\right)^{-1}.$$

(d) Montrer

$$\forall \lambda \in \left]-\Omega\,;\Omega\right[, \forall h \in E, \exists! f \in E, h = f - \lambda\Phi(f).$$

(e) Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, montrer que :

$$\dim \mathrm{Ker}(\Phi - \lambda \mathrm{Id}) \le \frac{1}{\lambda^2} \iint_{[0;1]^2} K(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 41 [02828] [Correction]
Soit $f \in \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{R})$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(a) Montrer que la fonction f est nulle.

(b) Calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{i})x}\,\mathrm{d}x.$$

(c) En déduire qu'il existe f dans $\mathcal{C}([0\,;+\infty[, \mathbb{R})$ non nulle, telle que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, on ait

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 42 [02774] [Correction]

(a) Chercher les fonctions $f\colon [0\,;1] \to [0\,;1]$ continues vérifiant

$$f \circ f = f.$$

(b) Même question avec les fonctions dérivables.

Exercice 43 [02770] [Correction]
On munit l'espace des suites bornées réelles $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ de la norme $\|u\|_\infty = \sup_n(|u_n|)$.

(a) Montrer que l'ensemble des suites convergentes est un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

(b) Montrer que l'ensemble des suites (a_n) qui sont terme général d'une série absolument convergente n'est pas un fermé de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.

Exercice 44 [02780] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions réelles définies et continues sur $[0\,;+\infty[$ et dont le carré est intégrable. On admet que E est un espace vectoriel réel. On le munit de la norme

$$\|\,\|_2\colon f \mapsto \sqrt{\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t}.$$

On note E_0 l'ensemble des $f \in E$ telles que f est nulle hors d'un certain segment. On note F l'ensemble des fonctions de E du type $x \mapsto P(\mathrm{e}^{-x})\mathrm{e}^{-x^2/2}$ où P parcourt $\mathbb{R}[X]$. Montrer que E_0 est dense dans E puis que F est dense dans E.

Exercice 45 [02771] [Correction]
Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\ge0}$ de $\mathbb{C}$ telles que la série $\sum |a_n|$ converge. Si $a = (a_n)_{n\ge0}$ appartient à E, on pose

$$\|a\| = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,.$$

(a) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

(b) Soit

$$F = \left\{ a \in E \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}.$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 46 [02773] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, O_n désigne l'ensemble des polynômes réels de degré n scindés à racines simples et F_n l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ scindés à racines simples. Ces ensemble sont-ils ouverts dans $\mathbb{R}_n[X]$?

Exercice 47 [02772] [Correction]
Soient f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et

$$\Gamma_f = \left\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\right\}$$

son graphe.

(a) On suppose f continue. Montrer que Γ_f est fermé.
(b) On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que f est continue.
(c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 48 [02778] [Correction]
Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.

(a) Montrer
$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|\,.$$
(b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.
(c) Montrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \left\{x \in E \mid \|x\| \leq 1\right\}$ est une partie compacte.

Exercice 49 [02776] [Correction]
Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réels, f une application de E_1 dans E_2 telle que pour tout compact K de E_2, $f^{-1}(K)$ soit un compact de E_1. Montrer, si F est un fermé de E_1, que $f(F)$ est un fermé de E_2.

Exercice 50 [02853] [Correction]
On pose

$$a_n = \int_n^{+\infty} \frac{\operatorname{th} t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Étudier la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ entière pour x réel. On note $f(x)$ la somme de cette série entière.
(b) La fonction f est-elle continue en -1 ?
(c) Donner un équivalent simple de f en 1^-.

Exercice 51 [02852] [Correction]
Domaine de définition et étude aux bornes de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n.$$

Exercice 52 [02850] [Correction]
On pose $a_0 = 1$ puis pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k.$$

Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\frac{a_n}{n!} x^n$.

Exercice 53 [02845] [Correction]
Rayon de convergence et somme de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{3n+2}.$$

Exercice 54 [02844] [Correction]

(a) Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R. Déterminer les rayons de convergence de
$$\sum (a_n \ln n) x^n \text{ et } \sum \left(a_n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) x^n.$$
(b) Donner un équivalent simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n) x^n$ quand $x \to 1^-$.

Exercice 55 [02854] [Correction]
Soit une série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $f(z)$.

(a) Montrer que pour $0 < r < R$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta.$$

(b) Que dire de f si $|f|$ admet un maximum local en 0 ?

(c) On suppose maintenant que $R = +\infty$ et qu'il existe $P \in \mathbb{R}_N[X]$ tel que $\left|f(z)\right| \leq P(|z|)$ pour tout z complexe. Montrer que $f \in \mathbb{C}_N[X]$.

Exercice 56 [02856] [Correction]
Soient $B = \left\{z \in \mathbb{C}, |z| \leq 1\right\}$ et f une fonction continue de B dans $\mathbb{C}$ dont la restriction à B° est somme d'une série entière. Montrer qu'il existe une suite $(P_k)_{k\geq 0}$ de polynôme convergeant uniformément vers f sur B.

Exercice 57 [02848] [Correction]
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, établir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\alpha) = \arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}\right).$$

Exercice 58 [02857] [Correction]
Développer en série entière

$$x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

Exercice 59 [02422] [Correction]

(a) Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}$$

avec m, n deux entiers non nuls.

(b) Déterminer deux polynômes U et V tels que

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 60 [02858] [Correction]
Développer en série entière $f\colon x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}$ au voisinage de 0.

Exercice 61 [02859] [Correction]

(a) Montrer, si $t \in \mathbb{R}$:

$$\left|e^{it} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!}\right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} |t^n|\left|f(t)\right| dt\right)_{n\geq 0}$ soit bornée.

Montrer que $F\colon x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t)$ est développable en série entière en 0.

Exercice 62 [03747] [Correction]

(a) Donner l'ensemble de définition de

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n.$$

(b) Calculer $f(-1)$ et $\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,dx$ où E est la fonction partie entière.

(c) Donner un équivalent de f en $x = 1$

Exercice 63 [02865] [Correction]
Étudier la limite de la suite de terme général

$$I_n = n\int_0^1 \ln(1+t^n)\,dt.$$

Exercice 64 [02841] [Correction]
On note a_n la n-ième décimale de $\sqrt{3}$.
Quel est l'intervalle de définition de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 65 [02808] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n+2)\times 3^n}.$$

Exercice 66 [02847] [Correction]

(a) Déterminer le rayon de convergence R de

$$\sum_{n\geq 0}\frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}x^n.$$

(b) Pour $x\in\left]-R\,;R\right[$ calculer la somme précédente.

Exercice 67 [02842] [Correction]

Quel est le rayon de convergence de $\sum \pi^{\sqrt{n^2+2n}}x^{2n}$?

Exercice 68 [02843] [Correction]

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Quel est le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n\alpha)}{n}x^n$?

Exercice 69 [02855] [Correction]

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$I_n=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^n}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Déterminer la limite de (I_n).

(b) Donner un équivalent de (I_n).

(c) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général I_nx^n. Étudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 70 [02874] [Correction]

Étudier

$$f\colon x\mapsto\int_0^1\frac{t-1}{\ln t}t^x\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 71 [02863] [Correction]

(a) Établir pour $a,b>0$ l'égalité

$$\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nb}.$$

(b) Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 72 [02873] [Correction]

Pour tout x réel, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\text{ et }g(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Existence et calcul de ces deux intégrales.

Exercice 73 [00933] [Correction]

Établir

$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}.$$

Exercice 74 [02862] [Correction]

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 75 [00150] [Correction]

Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ bornée. On pose, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$I_n=\int_0^{+\infty}nf(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer la limite de I_n quand $n\to+\infty$.

Exercice 76 [02871] [Correction]

Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Définition de f.

(b) Continuité et dérivabilité de f.

(c) Écrire $f(1)$ comme somme de série.

Exercice 77 [02875] [Correction]
Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > -1\}$. Si $z \in \Omega$, on pose

$$f(z) = \int_0^1 \frac{t^z}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est définie et continue sur Ω.

(b) Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers -1.

(c) Donner un équivalent de $f(z)$ quand $\operatorname{Re}(z) \to +\infty$.

Exercice 78 [02881] [Correction]
Existence et calcul de

$$\int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 79 [02880] [Correction]
Montrer que, pour tout x réel positif,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\ln t}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 80 [02882] [Correction]
On pose, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et trouver des équivalents simples de f en 0 et en $+\infty$.

Exercice 81 [02876] [Correction]
Existence et calcul de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 82 [02807] [Correction]

(a) Pour $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, calculer

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x.$$

Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer l'existence de

$$S_p = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^p}{\binom{2n}{n}}.$$

(b) Calculer S_0 et S_{-1}.

(c) Si $p \in \mathbb{N}$, proposer une méthode de calcul de S_p.

Exercice 83 [02872] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

(a) Justifier la définition de $f(x)$.

(b) Montrer que f est classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Calculer $f(x)$ si $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(d) Montrer que f est continue en 0. Qu'en déduit-on ?

Exercice 84 [02840] [Correction]

(a) Si $(s,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$, quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\lambda^n}{s(s+1)\dots(s+n)}$$

pour $n \geq 0$? À λ fixé, on note Δ_λ l'ensemble des $s > 0$ tels que la série converge, et on note $F_\lambda(s)$ la somme de cette série.

(b) Calculer $\lim_{s\to\sup\Delta_\lambda} F_\lambda(s)$.

(c) Donner un équivalent de $F_\lambda(s)$ quand $s \to \inf \Delta_\lambda$.

(d) Si $n \geq 1$, calculer :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1}y^n\,\mathrm{d}y.$$

(e) En déduire une expression intégrale de $F_\lambda(s)$.

Exercice 85 [02864] [Correction]
Existence et calcul de
$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$
Le résultat est à exprimer à l'aide de $\zeta(2)$.

Exercice 86 [02866] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2t}\left(\sum_{p=n}^{+\infty}a_p\frac{t^p}{p!}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 87 [02869] [Correction]
Montrer
$$\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-n}=\int_0^1 t^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 88 [02870] [Correction]
Si $x>1$, on pose $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$. Montrer
$$\int_2^{+\infty}(\zeta(x)-1)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2\ln n}.$$

Exercice 89 [00118] [Correction]
Soit, pour $n\in\mathbb{N}$,
$$u_n=\int_0^{\pi/2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n\mathrm{d}x.$$
(a) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

(b) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

Exercice 90 [03287] [Correction]
Donner la nature de la série de terme général
$$u_n=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\cos^{2n}t\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 91 [02893] [Correction]
Résoudre sur $]0\,;\pi[$
$$y''+y=\cot x.$$

Exercice 92 [02894] [Correction]

(a) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ par variation des constantes l'équation différentielle
$$y''+y=1/x.$$
(b) En déduire une expression de
$$f(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$
valable pour $x>0$.

(c) Calculer
$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 93 [02896] [Correction]
Soit $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique. Existe-t-il $y\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ 2π-périodique et solution de
$$y''+y=f\,?.$$

Exercice 94 [02895] [Correction]
Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$ monotone ayant une limite finie en $+\infty$.
Montrer que les solutions de l'équation $y''+y=f$ sont bornées.

Exercice 95 [02890] [Correction]
Trouver les fonctions $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que pour tout x réel
$$f(x)-2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t=1.$$

Exercice 96 [02892] [Correction]
Déterminer les fonctions $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f(1/x).$$

Exercice 97 [02889] [Correction]
Résoudre

$$x \ln x y' - (3 \ln x + 1) y = 0.$$

Exercice 98 [02709] [Correction]
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $A^4 = I_n$. Déterminer $\exp(A)$.

Exercice 99 [02742] [Correction]
Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Que peut-on dire de $\exp A$?

Exercice 100 [00391] [Correction]
Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' = y + z \\ y' = x \\ z' = x + y + z. \end{cases}$$

Exercice 101 [02710] [Correction]
On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sans diagonaliser la matrice A, déterminer son polynôme caractéristique, son polynôme minimal et calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
Évaluer $\exp(A)$.

Exercice 102 [02902] [Correction]
Résoudre le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x + y + z \\ z' = -x - y + z. \end{cases}$$

Exercice 103 [02701] [Correction]
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & a^2 \\ 1/a & 0 & a \\ 1/a^2 & 1/a & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer le polynôme minimal de A.

(b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.

(c) Calculer e^A.

Exercice 104 [02711] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de A. Calculer $\exp A$ et $\exp(A) \exp({}^t A)$.

Exercice 105 [02712] [Correction]
Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j^2 & 1 \\ j^2 & 1 & j \end{pmatrix}.$$

Étudier la diagonalisabilité de A, déterminer les polynômes minimal et caractéristique de A, calculer $\exp A$. Proposer une généralisation en dimension n.

Exercice 106 [02907] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n : (x, y) \mapsto \frac{\cos(ny)}{\sqrt{n}} x^n.$$

On note D l'ensemble des $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que la série de terme général $u_n(x, y)$ converge. On pose

$$f : (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, y).$$

(a) Déterminer D.

(b) Montrer que $f_{\upharpoonright D^\circ}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 107 [02905] [Correction]
On pose

$$f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

pour x,y réels non tous deux nuls.
La fonction f admet-elle un prolongement continue à $\mathbb{R}^2$? Un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 108 [02906] [Correction]
Soit $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose

$$f(x,y) = \frac{g(x)-g(y)}{x-y} \text{ pour } x\neq y \text{ et } f(x,x) = g'(x).$$

(a) Exprimer $f(x,y)$ à l'aide d'une intégrale sur l'intervalle $[0\,;1]$.

(b) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 109 [02912] [Correction]

(a) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Trouver les $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f.$$

(b) Trouver toutes les $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3}.$$

Exercice 110 [02910] [Correction]
Trouver les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = x^4+y^4-2(x-y)^2.$$

Exercice 111 [02913] [Correction]
On note U l'ensemble des (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $x>0$ et $E=\mathcal{C}^\infty(U,\mathbb{R})$. Soit $f\colon U\to\mathbb{R}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$; on dit que f est homogène de degré α si $f(tx,ty)=t^\alpha f(x,y)$ pour tous $t\in\mathbb{R}_+^*$, $(x,y)\in U$. On pose :

$$\forall f\in E, \forall (x,y)\in U, \Phi(f)(x,y) = x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

(a) Déterminer $\operatorname{Ker}\Phi$.

(b) Soit $f\in E$. Montrer que f est homogène de degré α si, et seulement si, $\Phi(f)=\alpha f$.

(c) Résoudre l'équation d'inconnue $f\in E$, $\Phi(f)=h$, h étant la fonction qui à (x,y) associe $(x^2+y^2)^{3/2}xy$.

Exercice 112 [02911] [Correction]
Calculer l'aire maximale d'un triangle inscrit dans un cercle de rayon r.

Exercice 113 [00071] [Correction]
Soit $a>0$. On pose, pour $x>0$ et $y>0$,

$$f(x,y) = x^2+y^2+\frac{a}{xy}.$$

Montrer que f admet un minimum absolu et calculer ce dernier.

Exercice 114 [02904] [Correction]
Si $p\in\mathbb{N}$, soit

$$f_p\colon (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\mapsto (x+y)^p\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

(a) Condition nécessaire et suffisante pour que f_p se prolonge par continuité en $(0,0)$?

(b) La condition de a) étant remplie, condition nécessaire et suffisante pour que le prolongement obtenu soit différentiable en $(0,0)$?

Exercice 115 [02903] [Correction]
Soient $(x_1,\dots,x_n,h_1,\dots,h_n)\in\mathbb{R}^{2n}$, $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ et, si $t\in\mathbb{R}$,

$$g(t) = f(x_1+th_1,\dots,x_n+th_n).$$

Calculer $g'(t)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
On remarque
$$v_n \geq u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$
de sorte que
$$\sum_{k=0}^{n} v_k \geq \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k.$$
Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.
Aussi
$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \geq \frac{1}{2} v_{n+1}$$
donc
$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_k.$$
Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 2 : [énoncé]
Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2$,
$$0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{v_n}{n^2}$$
donc
$$0 \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$
ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.
Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 3 : [énoncé]
Pour $t = -1$,
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$
ce qui permet de conclure.
Pour $t \neq -1$,
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i t^{i+1}\frac{1-(-t)^{m+1}}{1+t}.$$
Quand $m \to +\infty$,
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}t^{i+j+1} \to \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$
si $|t| < 1$ et diverge sinon. Aussi, quand $|t| < 1$
$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t\frac{1-(-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$
et quand $n \to +\infty$,
$$t\frac{1-(-t)^{n+1}}{(1+t)^2} \to \frac{t}{(1+t)^2}.$$
On conclut
$$\lim_{n\to+\infty}\lim_{m\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}(-1)^{i+j}t^{i+j+1} = \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Exercice 4 : [énoncé]
Le terme
$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$$
est bien défini en tant que reste d'une série alternée satisfaisant au critère spécial.
Pour $N \leq K$ entiers,
$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=n}^{K}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$
D'une part
$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{k}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k}.$$
D'autre part
$$\sum_{k=N+1}^{K}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} = N\sum_{k=N+1}^{K}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

En passant à la limite quand $K \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ainsi $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.$$

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente.
Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$.
Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

Exercice 6 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}).$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne (sachant $S_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_n.$$

La suite (S_n) converge, elle est donc bornée par un certain réel M.
D'une part $a_n \to 0$ et donc $a_{n+1} S_n \to 0$.
D'autre part $\left|(a_k - a_{k+1}) S_k\right| \leq M \left|a_k - a_{k+1}\right|$ et donc la série $\sum (a_n - a_{n+1}) S_n$ converge absolument.
Par addition de convergence, on peut conclure que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 7 : [énoncé]
On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

Exercice 8 : [énoncé]
$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n \pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Si $\alpha \leq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \to 0$ si $a \in [0\,;1[$, $u_n \to 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.

Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.

(b) Cas $\alpha \leq 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.
Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0\,;1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = \mathrm{e}^{2\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \ln a} \to 0$ car

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0\,;1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = \mathrm{e}^{(\ln n + \gamma + \mathrm{o}(1))\ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ *i.e.* $a < -1/\mathrm{e}$.
Cas $\alpha > 1$: $\ell = a^{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}$,

$$v_n = \ell(\mathrm{e}^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum(-1)^n v_n$ converge.

Exercice 10 : [énoncé]
On a

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et donc

$$\frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} \sim \frac{3}{n^3}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum \frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ converge
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{6}{n} + \frac{6}{n+1} - \frac{24}{2n+1}.$$

En introduisant la constante d'Euler γ, on sait

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{N+1} \frac{1}{n} = \ln(N+1) + \gamma - 1 + \mathrm{o}(1)$$

et en introduisant dans la somme les inverses des nombres pairs absents, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} = \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} = \ln(2N+1) - \frac{1}{2}\ln N + \frac{1}{2}\gamma - 1 + \mathrm{o}(1).$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = \ln \frac{N^{18}(N+1)^6}{(2N+1)^{24}} + 18 + \mathrm{o}(1)$$

puis à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2} = 18 - 24\ln 2.$$

Exercice 11 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^{N} \int_0^1 (-t^4)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1 - (-t^4)^{N+1}}{1+t^4} \,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left| \int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4} \,\mathrm{d}t \right| \leq \int_0^1 t^{4N+4} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{4N+5} \to 0$$

donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$

Enfin

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \left(\ln \frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi \right).$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) La fonction f' est bien définie et continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$.
On a

$$f'(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x^2}$$

et donc
$$\left|f'(x)\right| \leq \frac{2}{x^2}.$$
La fonction $x \mapsto 1/x^2$ étant intégrable sur $[1\,;+\infty[$, il en est de même de f' par domination.

(b) Par intégration par parties
$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[(t-(n-1)f(t)\Big]_{n-1}^{n} - \int_{n-1}^{n} (t-(n-1))f'(t)\,\mathrm{d}t$$
donc
$$|u_n| \leq \int_{n-1}^{n} (t-(n-1))\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t \leq \int_{n-1}^{n} \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t.$$
L'intégrabilité de f' permet d'introduire $\int_1^{+\infty}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$ et d'affirmer que les sommes partielles de la série $\sum |u_n|$ sont majorées via
$$\sum_{n=1}^{N} |u_n| \leq |u_1| + \int_1^N \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t \leq |u_1| + \int_1^{+\infty} \left|f'(t)\right|\mathrm{d}t.$$
La série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

(c) Par l'absurde, supposons que la suite $(\cos(\ln n))$ converge. La suite extraite $\big(\cos(\ln 2^n)\big) = \big(\cos(n\ln 2)\big)$ aussi. Notons ℓ sa limite.
Puisque
$$\cos((n+1)\ln 2) + \cos((n-1)\ln 2) = 2\cos(n\ln 2)\cos(\ln 2)$$
on obtient à la limite $2\ell = 2\ell\cos(\ln 2)$ et donc $\ell = 0$.
Puisque
$$\cos(2n\ln 2) = 2\cos^2(n\ln 2) - 1$$
on obtient aussi à la limite $\ell = 2\ell^2 - 1$ ce qui est incompatible avec $\ell = 0$.

(d) Puisque
$$\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t = -\cos(\ln n) + \cos(\ln(n-1)).$$
La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série $\sum \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$.
Enfin, puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut alors affirmer que la série $\sum f(n)$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]
Posons
$$P_n = \frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(3k-1)^{1/n} > 0.$$
On a
$$\ln(P_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1) - \ln n.$$
Par comparaison série-intégrale
$$\ln 2 + \int_1^n \ln(3t-1)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1) \leq \int_1^{n+1}\ln(3t-1)\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_1^n \ln(3t-1)\,\mathrm{d}t = \frac{3n-1}{3}\ln(3n-1) - n + C = n\ln n + (\ln 3 - 1)n + \mathrm{O}(\ln n)$$
et donc
$$\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1) = n\ln n + (\ln 3 - 1)n + \mathrm{O}(\ln n).$$
On en déduit
$$\ln P_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 3 - 1$$
puis
$$P_n \to \frac{3}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 14 : [énoncé]
On sait
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$
et donc
$$a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} = \mathrm{e}^{\ln a\ln n + \gamma\ln a + \mathrm{o}(1)} \sim \frac{\mathrm{e}^{\gamma\ln a}}{n^{-\ln a}}.$$
Par équivalence de séries à termes positifs
$$\sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}} \text{ converge } \iff -\ln a > 1$$
ce qui fournit la condition $a < \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) Si f' est bornée sur $\mathbb{R}_+$, l'inégalité des accroissements finis assure que f est lipschitzienne donc uniformément continue.

(b) Supposons que f soit uniformément continue. Pour $\varepsilon = 1 > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ vérifiant $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|y - x| \le \alpha \implies \left|f(y) - f(x)\right| \le 1$. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left|f(x+\alpha) - f(x)\right| \le 1$. Or par le théorème des accroissements finis, il existe $\xi_x \in \left]x\,;x+\alpha\right[$ vérifiant $\left|f(x+\alpha) - f(x)\right| = \alpha\left|f'(\xi_x)\right|$ et donc $\left|f'(\xi_x)\right| \le 1/\alpha$. Cette propriété est incompatible avec $\left|f'(x)\right| \to +\infty$.

Exercice 16 : [énoncé]

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \left]0\,;\alpha\right], (1-\varepsilon)\sqrt{x} \le f(x) - f(x/2) \le (1+\varepsilon)\sqrt{x}.$$

Pour $x \in \left]0\,;\alpha\right]$, $x/2^n \in \left]0\,;\alpha\right]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x/2^n} \le f(x/2^n) - f(x/2^{n+1}) \le (1+\varepsilon)\sqrt{x/2^{n+1}}.$$

En sommant ces inégalités et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient :

$$(1-\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}} \le f(x) \le (1+\varepsilon)\sqrt{x}\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}.$$

La phrase quantifiée ainsi obtenue permet d'affirmer

$$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{1-1/\sqrt{2}}.$$

Exercice 17 : [énoncé]

(a) L'ensemble des points fixes de f est $(f - \mathrm{Id})^{-1}\{0\}$, c'est donc une partie fermée de $[0\,;1]$. Étant fermée et bornée c'est une partie compacte. Étant de plus non vide, cette partie admet un plus petit et un plus grand élément.

(b) Soient $a \le b$ les deux éléments précédents. L'égalité $f \circ g = g \circ f$ donne $f(g(a)) = g(a)$ et $f(g(b)) = g(b)$.
Les réels $g(a)$ et $g(b)$ étant points fixes de f, on a l'encadrement

$$a \le g(a), g(b) \le b.$$

Considérons alors la fonction continue $\varphi = f - g$.
On a $\varphi(a) = a - g(a) \le 0$ et $\varphi(b) = b - g(b) \ge 0$.
Par application du théorème des valeurs intermédiaires, la fonction φ s'annule.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Il suffit de raisonner par récurrence. On obtient $P_0(x) = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = (2 - 3nX^2)P_n + X^3P_n'.$$

Par récurrence, pour $n > 0$, $\deg P_n = 2(n-1)$.

(b) f est continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ dont par le théorème « limite de la dérivée », on peut conclure.

(c) $P_1 = 2$ a toutes ses racines réelles.
$f'(0) = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 0$ donc par une généralisation du théorème de Rolle, on peut affirmer que f'' s'annule sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et $\left]-\infty\,;0\right[$. Ses annulations sont aussi des zéros de P_2 qui est de degré 2, donc P_2 a toutes ses racines réelles.
f'' s'annule aussi en 0 et en $\pm\infty$. Par la généralisation du théorème de Rolle, on obtient 2 annulations sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et 2 annulations sur $\left]-\infty\,;0\right[$ qui seront toutes quatre zéros de P_3 qui est un polynôme de degré 4,... on peut itérer la démarche.

Exercice 19 : [énoncé]

Par un argument de parité, il suffit d'établir la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Formellement

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{2\mathrm{i}t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

où la primitive de $2t\mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}$ a été choisie de sorte de s'annuler en 0.
Puisque les deux termes en second membre sont convergents, le théorème d'intégration par parties s'applique et assure la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 20 : [énoncé]

L'intégrabilité est entendue.

Par le changement de variable $u = a^2/t$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2\ln a - \ln u}{a^2+u^2}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2+a^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a}\ln a.$$

Exercice 21 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$ on parvient à l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{8u^2\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)((1-x)^2+(1+x)^2u^2)((1-y)^2+(1+y)^2u^2)}.$$

On peut réaliser une décomposition en éléments simples réelles de la fraction rationnelle intégrée qui pour des raisons de parité sera de la forme

$$\frac{a}{1+u^2} + \frac{b}{(1-x)^2+(1+x)^2u^2} + \frac{c}{(1-y)^2+(1+y)^2u^2}$$

avec

$$a = -\frac{1}{2xy}, b = -\frac{(1-x)^2(1+x)^2}{2x(x-y)(1-xy)} \text{ et } c = -\frac{(1-y)^2(1+y)^2}{2y(y-x)(1-xy)}$$

sous réserve que $x \neq y$ et $xy \neq 0$.
Puisque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\alpha^2+\beta^2u^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\frac{\pi}{2}$$

on parvient à

$$I = \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2xy} - \frac{1-x^2}{2x(x-y)(1-xy)} + \frac{1-y^2}{2y(x-y)(1-xy)}\right) = \frac{\pi}{2(1-xy)}.$$

Les cas exclus $x \neq y$ et $xy \neq 0$ peuvent être récupérés par continuité.
Il m'a peut-être échappé une démarche plus simple...

Exercice 22 : [énoncé]

(a) La fonction $t \mapsto \sin(t)/t$ est définie et continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$. On peut la prolonger par continuité en 0 en y posant la valeur 1. Par intégration par parties où l'on intègre l'expression $\sin t$ en $1-\cos t$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1-\cos t}{t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Quand $x \to +\infty$, on a

$$\frac{1-\cos x}{x} \to 0$$

et

$$\int_0^x \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

cette dernière intégrale étant convergente car la fonction peut être prolongée par continuité en 0 et est dominée par la fonction intégrable $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.

(b) Soit F la primitive s'annulant en 0 du prolongement par continuité de $t \mapsto \sin(t)/t$. On a

$$f(x) = \lim_{+\infty} F - F(x).$$

Puisque la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = -F'(x) = -\frac{\sin x}{x}.$$

(c) Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[tf(t)\Big]_0^x - \int_0^x tf'(t)\,\mathrm{d}t = xf(x) + \int_0^x \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos t}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

donc

$$xf(x) = \cos x - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Mais par intégration par parties on établit encore

$$\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin t}{t^2}\right]_x^{+\infty} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^{+\infty} 2\frac{\sin t}{t^3}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{t^3} = \frac{1}{x^2}$$

ce qui permet d'affirmer

$$x\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

Finalement $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

Exercice 23 : [énoncé]
On peut prendre f nulle sur $[0\,;1]$, puis pour chaque intervalle $[n\,;n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f affine par morceaux définie par les nœuds $f(n) = 0$, $f(n + \frac{1}{n^3}) = n$, $f(n + \frac{2}{n^3}) = 0$ et $f(n+1) = 0$ ce qui définit une fonction f positive continue vérifiant $\int_n^{n+1} f = \frac{1}{n^2}$ et donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$ bien que non bornée.

Exercice 24 : [énoncé]
On a

$$\sqrt{\tan\theta} \underset{\theta=\pi/2-h}{=} \sqrt{\frac{\sin(\pi/2-h)}{\cos(\pi/2-h)}} = \sqrt{\frac{\cos h}{\sin h}} \sim \frac{1}{\sqrt{h}}$$

donc l'intégrale est bien définie.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan\theta}\,\mathrm{d}\theta \underset{u=\sqrt{\tan\theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

après calculs...

Exercice 25 : [énoncé]
On peut écrire

$$1 + (t+\mathrm{i}b)^2 = (t + \mathrm{i}(b+1))(t+\mathrm{i}(b-1)).$$

Si $b = \pm 1$ la fonction n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ à cause d'une singularité en 0.
Si $b \neq \pm 1$ alors la fonction $f\colon t \mapsto \frac{1}{1+(t+\mathrm{i}b)^2}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et $f(t) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $t \to \pm\infty$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
En procédant à une décomposition en éléments simples :

$$\int_{-A}^{A} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2} = \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b+1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b+1}\right)\right]_{-A}^{A} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\frac{1}{2}\ln(t^2+(b-1)^2) + \arctan\left(\frac{t}{b-1}\right)\right]_{-A}^{A}$$

Si $|b| > 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2} = 0.$$

Si $|b| < 1$ alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(t+\mathrm{i}b)^2} = \pi.$$

Exercice 26 : [énoncé]
Le discriminant du trinôme $x^2 + \alpha x + 1$ vaut $\Delta = \alpha^2 - 4$.
Cas $|\alpha| < 2$
On a $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas et la fonction $x \mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est définie et continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$. La fonction est intégrable car équivalente à $1/x^2$ en $+\infty$.
Cas $\alpha \geq 2$, le trinôme ne s'annule pas sur $[0\,;+\infty[$ car il est somme de termes positifs. À nouveau la fonction $x \mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Cas $\alpha \leq 2$, le trinôme $x^2+\alpha x+1$ présente deux racines positives et la fonction $x \mapsto 1/(x^2+\alpha x+1)$ n'est pas définie sur l'intégralité de l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Même en découpant l'intégrale aux points singuliers, on peut observer que les intégrales introduites ne sont pas définies. On ne parvient donc pas à donner un sens à l'intégrale étudiée dans ce cas.
Reste à calculer l'intégrale.
Cas $|\alpha| < 2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ s'écrit peut se réécrire

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + a^2 \text{ avec } a = \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{4}}.$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1} = \left[\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{2x+\alpha}{a}\right)\right]_0^{+\infty}$$

puis

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1} = \frac{1}{a}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right).$$

Cas $\alpha = 2$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+1} = \left[-\frac{1}{x+1}\right]_0^{+\infty} = 1.$$

Cas $\alpha > 2$
Le trinôme $x^2+\alpha x+1$ à deux racines x_0, x_1 distinctes strictement négatives.

$$x_0 = \frac{-\alpha - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } x_1 = \frac{-\alpha+\sqrt{\Delta}}{2}.$$

Par décomposition en éléments

$$\frac{1}{x^2+\alpha x+1} = \frac{a}{x-x_0} + \frac{b}{x-x_1}$$

avec

$$a = \frac{1}{x_1 - x_0} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \text{ et } b = \frac{1}{x_0 - x_1} = -a.$$

On a alors

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+\alpha x+1}=\frac{1}{x_1-x_0}\left[\ln\left(\frac{x-x_0}{x-x_1}\right)\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\ln\frac{\alpha+\sqrt{\Delta}}{\alpha-\sqrt{\Delta}}.$$

Exercice 27 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(x)=1/n^x$ définie sur $]1\,;+\infty[$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.
Plus précisément, pour $a>1$, on a

$$\sup_{x\in[a;+\infty[}\left|u_n(x)\right|=u_n(a)\text{ avec }\sum u_n(a)\text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a\,;+\infty[$.
Puisque

$$u_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\begin{cases}1 & \text{si } n=1\\ 0 & \text{si } n\geq 2\end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$

(b) Posons $v_n(x)=\zeta(n)x^n/n$. Pour $x\neq 0$, on a

$$\left|\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}|x|\,.$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x|<1$ et diverge pour $|x|>1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).
Pour $x=1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n}\sim\frac{1}{n}.$$

Pour $x=-1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\left((-1)^n\zeta(n)/n\right)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1)\leq\zeta(n)$.

(c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction F est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1\,;1[$.
Les fonctions v_n sont continues sur $[-1\,;0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x\in[-1\,;0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}v_k(x)\right|\leq\left|v_{n+1}(x)\right|\leq\frac{\zeta(n)}{n}.$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1\,;0]$ et sa somme F est donc continue.

(d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x\in\,]-1\,;1[$,

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\zeta(n+1)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}}.$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p\geq 1}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|\text{ et }\sum_{n\geq 1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|.$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x)=\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x}{p(p-x)}=\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-x}-\frac{1}{p}\right).$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de $]-1\,;1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$F(x)=F(0)+\int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-t}-\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^x\frac{1}{p-t}-\frac{1}{p}\,\mathrm{d}t=\sum_{p=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{p}{p-x}\right)-\frac{x}{p}.$$

Exercice 28 : [énoncé]
Remarquons que pour tout $t\in[0\,;1]$,

$$t-t^2\in[0\,;1/4].$$

Pour $x \in [0\,;1/4]$,

$$\left|u_{n+1}(x)\right| \leq x \left\|u_n\right\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4}\left\|u_n\right\|_{\infty,[0;1/4]}.$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\left\|u_n\right\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\left|u_{n+1}(x)\right| \leq \left\|u_n\right\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\left\|u_{n+1}\right\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 29 : [énoncé]
Si $|\omega| > 1$ alors

$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\omega^n}$$

et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers

$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}.$$

Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\omega^n\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors

$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega\right|^2} \neq 0.$$

Or par le calcul précédent, on peut affirmer

$$\int_0^{2\pi}\overline{P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$

On conclut à une absurdité.
La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

Exercice 30 : [énoncé]
Puisque la fonction f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction f est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction f est positive.
Par télescopage, on observe

$$g(x+N) - g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x+k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à g en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k).$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \geq 1$

$$0 \leq f(x+k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|f(x+k)\right| \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégrabilité de f, il y a convergence de la série

$$\sum\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k\geq 1} f(x+k).$$

L'adjonction du terme d'indice $k=0$ ne change rien et l'on peut conclure.
On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

Exercice 31 : [énoncé]
Quand $p \to +\infty$,

$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \to \frac{1}{1+x} = f(x).$$

On a

$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$

Or, pour $\alpha \in \left]0\,;1\right]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer

$$0 \le (1+x)^\alpha \le 1 + \alpha x$$

pour tout $x \ge 0$ et donc

$$\left|f(x) - f_p(x)\right| \le \frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \le \frac{1}{p}\frac{x}{1+x} \le \frac{1}{p}.$$

Puisque $\|f - f_p\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \le \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln k - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n + \sum_{k=1}^{n}\ln k - \sum_{k=0}^{n}\ln(x+k) = x\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Or la série $\sum\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $\mathrm{O}(1/n^2)$ et

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = x\ln n + \gamma x + \mathrm{o}(1) - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

(c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x > 0$ et $n \ge 1$. f_n est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Pour $x < 0$, $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Pour $x = 0$, $u_n(x) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge
Pour $x > 0$, $u_n(x) = \mathrm{o}(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.
On conclut $I = \mathbb{R}_+$

(b) Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{x\in[a;b]}\left|u_n(x)\right| \le \frac{n^\alpha b\mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Sa somme est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|u_n(x)\right| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}.$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^\alpha \mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \ge \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \ge \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n}.$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \to +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ alors

$$0 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \le \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si S est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 34 : [énoncé]
Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.
La fonction S est définie sur $]-1\,;1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0\,;1[$,

$$\|u_n'\|_{\infty,[-a;a]} \leq n\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1\,;1[$.
Par suite la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Pour $x \in [0\,;1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}.$$

Puisque $\sum_{p\geq 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0\,;1[$.
La fonction u_p est continue sur $[0\,;1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty}(-1)^k u_k(x)\right\|_{\infty} \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}.$$

Exercice 35 : [énoncé]
Posons

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Sachant

$$2\,|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}.$$

Soit $a > 0$. Pour $|x| \geq a$,

$$\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
La somme S est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}\big(S(x)-S(0)\big)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}\big(S(x)-S(0)\big)\geq\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}.$$

Par le changement de variable $u=tx$

$$\frac{1}{x}\big(S(x)-S(0)\big)\geq\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$$

car la fonction positive $u\mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

Exercice 36 : [énoncé]
(i) $\Longrightarrow$ (ii) Le plus simple est sans doute d'utiliser la décomposition de Dunford : $M=D+N$ avec D diagonalisable et N nilpotente commutant entre elles. Par la formule du binôme de Newton, on peut calculer M^k et tronquer la somme par la nilpotence de N, on parvient alors à une somme finie de termes qui tendent vers 0 par croissance comparée. Une autre méthode, techniquement plus lourde, consiste à introduire $\rho_\ell^k=\max\left\{\left|(M^k)_{1,\ell+1}\right|,\dots,\left|(M^k)_{n-\ell,n}\right|\right\}$ qui majorent les coefficients de M^k situés sur la diagonale (pour $\ell=0$), sur la sur-diagonale (pour $\ell=1$) etc. En notant que $\rho=\rho_0^1<1$, on montre par récurrence sur k que $\rho_\ell^k\leq k^\ell\left\|M\right\|_\infty^{\ell+1}\rho^{k-\ell}$ ce qui permet de conclure.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Supposons que $M^k\to0$. On peut alors affirmer que 1 n'est pas valeur propre de M car $MX=X\implies M^kX=X$ et donc à la limite $MX=X\implies X=0$. Par suite la matrice $I-M$ est inversible et puisque $(I-M)\sum_{k=0}^m M^k=I-M^{m+1}$, $\sum_{k=0}^m M^k=(I-M)^{-1}(I-M^{m+1})$ d'où la convergence de la série des M^k.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Soit $\lambda\in\mathrm{Sp}(M)$ et $X\neq0$ tel que $MX=\lambda X$. Puisque $\sum_{k=0}^m M^k$ converge quand $\mathrm{rg}\,C\geq r$, on a $\sum_{k=0}^m M^kX$ converge, puis $\sum_{k=0}^n\lambda^kX$ converge et donc $|\lambda|<1$ (car $X\neq0$).

Exercice 37 : [énoncé]
D'une part

$${}^t(A^k)\to{}^tB$$

et d'autre part

$${}^t(A^k)=(-1)^kA^k$$

de sorte que

$${}^t(A^{2p})=(-1)^{2p}A^{2p}\to B$$

et

$${}^t(A^{2p+1})=(-1)^{2p+1}A^{2p+1}\to -B.$$

Par unicité de la limite, on obtient

$$B={}^tB=-B.$$

On en déduit que la matrice B est nulle.

Exercice 38 : [énoncé]
(a) $x=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$ donc

$$\|x\|\leq\max\big\{\|x+y\|,\|x-y\|\big\}.$$

Aussi $\|y\|\leq\max\big\{\|x+y\|,\|x-y\|\big\}$ donc

$$\|x\|+\|y\|\leq2\max\big\{\|x+y\|,\|x-y\|\big\}.$$

(b) Sur $\mathbb{R}^2$ avec $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$, il y a égalité pour $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$.
(c) On a déjà

$$\big(\|x\|+\|y\|\big)^2\leq2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Or $x=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(x-y)$ donne

$$\|x\|^2=\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2+2\|x\|^2-2\|y\|^2\big)$$

aussi

$$\|y\|^2=\frac{1}{4}\big(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2-2\|x\|^2+2\|y\|^2\big)$$

donc

$$\|x\|^2+\|y\|^2\leq\frac{1}{2}\big(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\big)$$

puis

$$\big(\|x\|+\|y\|\big)^2\leq2\max\big\{\|x+y\|,\|x-y\|\big\}^2$$

qui permet de conclure.

(d) Non, sur $\mathbb{R}^2$, il y a égalité pour $x=(1,0)$ et $y=(0,1)$.

Exercice 39 : [énoncé]
Considérons $\alpha_0,\dots,\alpha_d$ des réels deux à deux distincts et $\varphi\colon \mathbb{R}_d[X]\to\mathbb{R}^{d+1}$ définie par
$$\varphi(P)=(P(\alpha_0),\dots,P(\alpha_d)).$$
L'application φ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, c'est aussi une application linéaire continue car les espaces engagés sont de dimensions finies et il en est de même de φ^{-1}.
En notant f la limite simple de (f_n), on a $\varphi(f_n)\to(f(\alpha_0),\dots,f(\alpha_d))$. En notant P l'élément de $\mathbb{R}_d[X]$ déterminé par $\varphi(P)=(f(\alpha_0),\dots,f(\alpha_d))$, on peut écrire $\varphi(f_n)\to\varphi(P)$. Par continuité de l'application φ^{-1}, on a donc $f_n\to P$ dans $\mathbb{R}_d[X]$. En choisissant sur $\mathbb{R}_d[X]$, la norme équivalente $\|\cdot\|_{\infty,[a;b]}$, on peut affirmer que (f_n) converge uniformément vers P sur le segment $[a\,;b]$.
En particulier (f_n) converge simplement vers P et en substance $P=f$.

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Pour $f\in E$, $\Phi(f)\in E$ car $(x,y)\mapsto K(x,y)f(y)$ est continue et on intègre sur un segment. La linéarité de Φ est évidente.

(b) On a
$$\left\|\Phi(f)\right\|_\infty\le\|K\|_\infty\|f\|_\infty$$
et
$$\left\|\Phi(f)\right\|_1\le\iint_{[0;1]^2}\left|K(x,y)f(y)\right|\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\le\|K\|_\infty\|f\|_1$$
donc Φ est continue pour $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$.

(c) On a
$$(\Phi(f)\,|\,g)=\iint_{[0;1]^2}K(x,y)f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=(f\,|\,\Phi(g))$$
car
$$\forall(x,y)\in[0\,;1]^2, K(x,y)=K(y,x).$$

(d) Rappelons que l'espace normé $(E,\|\cdot\|_\infty)$ est complet.
Avec plus de finesse que dans les inégalités du b), on peut affirmer $\left\|\Phi(f)\right\|_\infty\le\Omega^{-1}\|f\|_\infty$.
Pour $h\in E$ et $|\lambda|<\Omega$, L'application $T\colon f\mapsto\lambda\Phi(f)+h$ est $\lambda\Omega$-lipschitzienne avec $|\lambda\Omega|<1$. Par le théorème du point fixe dans un espace complet, l'application T admet un unique point fixe et donc il existe un unique $f\in E$ vérifiant $h=f-\lambda\Phi(f)$.

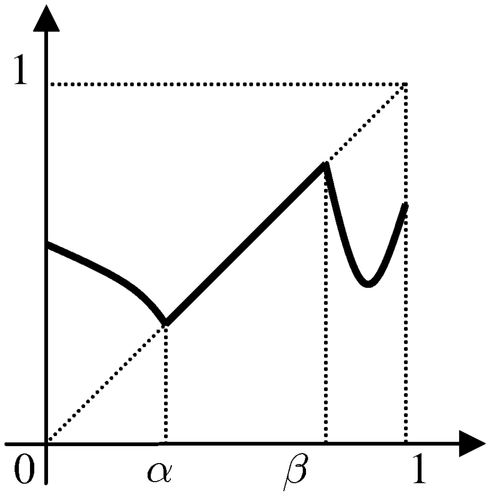
(e) Soit $(f_1,\dots,f_p)$ une famille orthonormée d'éléments de $\operatorname{Ker}(\Phi-\lambda\mathrm{Id})$. Soit $y\in[0\,;1]$ fixé et $\varphi\colon x\mapsto K(x,y)$. On peut écrire $\varphi=\sum_{j=1}^p\mu_jf_j+\psi$ avec $\psi\in\operatorname{Vect}(f_1,\dots,f_p)^\perp$ et
$$\mu_j=(f_j\,|\,\varphi)=\int_0^1K(x,y)f_j(x)\,\mathrm{d}x=\lambda f_j(y).$$
Par orthogonalité
$$\int_0^1\varphi^2(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^p\mu_j^2+\|\psi\|_2^2\ge\sum_{j=1}^p\mu_j^2.$$
En intégrant on obtient
$$\iint_{[0;1]^2}K(x,y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ge\sum_{j=1}^p\int_0^1\lambda^2f_j^2(y)\,\mathrm{d}y=\lambda^2p$$
car les f_j sont unitaires. Par suite $\operatorname{Ker}(\Phi-\lambda\mathrm{Id})$ est de dimension finie et sa dimension vérifie l'inégalité proposée.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon>0$, il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que $\|f-P\|_\infty\le\varepsilon$.
$$0\le\int_a^bf^2=\int_a^bf(f-P)+\int_a^bfP=\int_a^bf(f-P)\le(b-a)\|f\|_\infty\varepsilon.$$
En faisant $\varepsilon\to0$, on obtient $\int_a^bf^2=0$ et donc $f=0$.

(b) L'intégrale étudiée est bien définie. Par intégration par parties,
$$(n+1)I_n=(1-\mathrm{i})I_{n+1}.$$
Or $I_0=\frac{1+\mathrm{i}}{2}$ donc
$$I_n=\frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{2^{n+1}}n!$$

(c) $I_{4p+3}\in\mathbb{R}$ donc
$$\int_0^{+\infty}x^{4p+3}\sin(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=0$$
puis
$$\int_0^{+\infty}u^p\sin(u^{1/4})\mathrm{e}^{-u^{1/4}}\,\mathrm{d}u=0$$
pour tout $p\in\mathbb{N}$.



Exercice 42 : [énoncé]

(a) Soit f solution. Formons

$$A = \{x \in [0\,;1] \mid f(x) = x\}.$$

On a évidemment $A \subset \operatorname{Im} f$, mais inversement, pour $x \in \operatorname{Im} f$, on peut écrire $x = f(a)$ et alors

$$f(x) = f(f(a)) = f(a) = x.$$

Ainsi $\operatorname{Im} f \subset A$, puis, par double inclusion, $A = \operatorname{Im} f$.
On en déduit que A est un segment de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha\,;\beta]$ car c'est l'image d'un segment par une fonction réelle continue.
Pour tout $x \in [\alpha\,;\beta]$, $f(x) = x$ et pour tout $x \in [0\,;\alpha[\cup]\beta\,;1]$, $f(x) \in [\alpha\,;\beta]$.
Inversement, une fonction continue vérifiant les deux conditions précédente est solution.
Cela peut apparaître sous la forme d'une fonction ayant l'allure suivante

(b) Soit f solution dérivable.
Si $\alpha = \beta$ alors f est constante égale à cette valeur commune.
Si $\alpha < \beta$ alors $f'(\alpha) = f'_d(\alpha) = 1$ car $f(x) = x$ sur $[\alpha\,;\beta]$.
Par suite, si $\alpha > 0$, f prend des valeurs strictement inférieur à α ce qui est contradictoire avec l'étude qui précède. On en déduit $\alpha = 0$.
De même on obtient $\beta = 1$ et on conclut $f\colon x \in [0\,;1] \mapsto x$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Notons C l'espace des suites convergentes de $\mathcal{B}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$.
Soit (u^n) une suite convergente d'éléments de C de limite u^∞.
Pour chaque n, posons $\ell^n = \lim u^n = \lim_{p\to+\infty} u_p^n$.
Par le théorème de la double limite appliquée à la suite des fonctions u^n, on peut affirmer que la suite (ℓ^n) converge et que la suite u^∞ converge vers la limite de (ℓ^n). En particulier $u^\infty \in C$.

(b) Notons A l'espace des suites dont le terme général est terme général d'une série absolument convergente.
Soit (u^n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}, u_p^n = \frac{1}{(p+1)^{1+1/n}}.$$

La suite (u^n) est une suite d'éléments de A et une étude en norme $\|\cdot\|_\infty$ permet d'établir que $u^n \to u^\infty$ avec $u_p^\infty = \frac{1}{p+1}$. La suite u^∞ n'étant pas élément de A, la partie A n'est pas fermée.

Exercice 44 : [énoncé]

Soit f une fonction élément de E. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un réel A vérifiant

$$\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t \le \varepsilon.$$

Considérons alors la fonction $\varphi\colon [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = 1$ pour $t \in [0\,;A]$, $\varphi(t) = 0$ pour $t \ge A+1$ et $\varphi(t) = 1-(t-A)$ pour $t \in [A\,;A+1]$. La fonction $f\varphi$ est éléments de E_0 et

$$\|f - f\varphi\|_2 \le \sqrt{\int_A^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t} \le \varepsilon.$$

Ainsi E_0 est dense dans E.
Pour montrer maintenant que F est dense dans E, nous allons établir que F est dense dans E_0.
Soit f une fonction élément de E_0. Remarquons

$$\int_0^{+\infty} \left(f(t) - P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}\right)^2 \mathrm{d}t \underset{u=\mathrm{e}^{-t}}{=} \int_0^1 \left(f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2} - P(u)\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $u \mapsto \frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ car $\sqrt{u}\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 0$.

La fonction $g\colon u\mapsto f(-\ln u)\mathrm{e}^{(\ln u)^2/2}$ peut-être prolongée par continuité en 0 car f est nulle en dehors d'un segment. Par le théorème de Weierstrass, pour tout $\varepsilon>0$, il existe un polynôme $P\in\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\|g-P\|_{\infty,[0;1]}\leq\varepsilon$ et pour
$\varphi\colon t\mapsto P(\mathrm{e}^{-t})\mathrm{e}^{-t^2/2}$ on a alors

$$\|f-\varphi\|_2\leq\lambda\varepsilon \text{ avec } \lambda=\sqrt{\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{-(\ln u)^2}}{u}\,\mathrm{d}u}.$$

Cela permet de conclure à la densité proposée.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) Par définition de l'ensemble E, l'application $\|\cdot\|:E\to\mathbb{R}_+$ est bien définie. Soient $(a_n)_{n\geq0}$, $(b_n)_{n\geq0}$ éléments de E et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\|a+b\|=\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n+b_n|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(|a_n|+|b_n|\bigr)=\|a\|+\|b\|$$

avec convergence des séries écrites, et

$$\|\lambda.a\|=\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda a_n|=\sum_{n=0}^{+\infty}|\lambda|\,|a_n|=|\lambda|\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|=|\lambda|\,\|a\|\,.$$

Enfin, si $\|a\|=0$ alors

$$\forall n\in\mathbb{N},|a_n|\leq\|a\|=0$$

donne $(a_n)_{n\geq0}=(0)_{n\geq0}$

(b) Considérons la forme linéaire

$$\varphi\colon(a_n)_{n\geq0}\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_n.$$

On vérifie

$$\forall a=(a_n)_{n\geq0}\in E,\bigl|\varphi(a)\bigr|=\left|\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\right|\leq\sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|=\|a\|\,.$$

La forme linéaire φ est donc continue.
Puisque $F=\varphi^{-1}(\{1\})$ avec $\{1\}$, la partie F est fermée en tant qu'image réciproque d'une partie fermée par une application continue..
Posons $e=(1,0,0,\ldots)$ et un élément de F et

$$\forall\alpha>0,e+\alpha e\notin F \text{ et } \bigl\|e-(e+\alpha e)\bigr\|=\alpha.$$

On en déduit que F n'est pas un voisinage de son élément e et par conséquent la partie F n'est pas ouverte.
Posons $\alpha^p=e+p.(1,-1,0,0,\ldots)$.

$$\forall p\in\mathbb{N},\alpha^p\in F \text{ et } \bigl\|\alpha^p\bigr\|\xrightarrow[p\to+\infty]{}+\infty.$$

La partie F n'est donc pas bornée.

Exercice 46 : [énoncé]
Soit $P\in O_n$. En notant $x_1<\ldots<x_n$ ses racines, on peut écrire

$$P=\alpha(X-x_1)\ldots(X-x_n)$$

avec $\alpha\neq0$.
Posons $y_1,\ldots,y_{n-1}$ les milieux des segments $[x_1\,;x_2],\ldots,[x_{n-1}\,;x_n]$.
Posons aussi $y_0\in\,]-\infty\,;x_1[$ et $y_n\in\,]x_n\,;+\infty[$.
$P(y_0)$ est du signe de $(-1)^n\alpha$, $P(y_1)$ est du signe de $(-1)^{n-1}\alpha,\ldots$, $P(y_{n-1})$ est du signe de $(-1)\alpha$, $P(y_n)$ du signe de α. Pour simplifier l'exposé de ce qui suit, on va supposer $\alpha>0$. La résolution se transposera aisément au cas $\alpha<0$.
Considérons l'application

$$f_i\colon Q\in\mathbb{R}_n[X]\mapsto Q(y_i).$$

L'application f_i est continue et donc $f_j^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ et $f_j^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}_n[X]$.
Considérons U l'intersection des ouverts

$$f_0^{-1}\bigl((-1)^n\mathbb{R}_+^*\bigr),f_1^{-2}\bigl((-1)^{n-1}\mathbb{R}_+^*\bigr),\ldots,f_n^{-1}(\mathbb{R}_+^*).$$

Les éléments de U sont des polynômes réels alternant de signe entre $y_0<y_1<\ldots<y_n$. Par application du théorème des valeurs intermédiaires, un tel polynôme admet n racines distinctes et donc est scindé à racines simples. Ainsi $U\subset O_n$. Or $P\in U$ et U est ouvert donc U est voisinage de P puis O_n est voisinage de P.
Au final O_n est ouvert car voisinage de chacun de ses éléments.
Dans le cas $n=1$: $F_n=O_n$ et donc F_n est ouvert.
Dans le cas $n=2$: F_n réunit les polynômes $P=aX^2+bX+c$ avec $b^2-4ac>0$ (que a soit égal à 0 ou non). L'application $P\mapsto b^2-4ac$ étant continue, on peut affirmer que F_n est encore ouvert car image réciproque d'un ouvert pas une application continue.
Dans le cas $n\geq3$: $P_n=X(1+X^2/n)$ est une suite de polynômes non scindés convergeant vers X scindé à racines simples. Par suite F_n n'est pas ouvert.

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Soit $\big((x_n,y_n)\big)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de Γ_f. On suppose que la suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\geq 0}$ converge vers (x_∞,y_∞). Puisque $y_n=f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty=f(x_\infty)$ car f est continue.
La partie Γ_f est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Soit $(x_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a\in\mathbb{R}$ et $(y_n)=\big(f(x_n)\big)$ son image.
Soit b une valeur d'adhérence de (y_n). Il existe $\varphi\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$y_{\varphi(n)}\to b.$$

On a alors

$$(x_{\varphi(n)},y_{\varphi(n)})\to(a,b).$$

Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a,b)\in\Gamma_f$ et donc $b=f(a)$.
Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.
Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a.

(c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par

$$f(x)=\begin{cases}1/x & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés

$$\big\{(x,y)\bigm| xy=1\big\}\cup\big\{(0,0)\big\}$$

mais cette fonction n'est pas continue.

Exercice 48 : [énoncé]

(a) Par définition

$$d(x,F)=\inf\big\{\|x-y\|\bigm| y\in F\big\}.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Le réel $d(x,F)+1/(n+1)$ ne minore par l'ensemble $\big\{\|x-y\|\bigm| y\in F\big\}$ et donc il existe $y_n\in F$ tel que

$$d(x,F)\leq\|x-y_n\|<d(x,F)+\frac{1}{n+1}.$$

En faisant varier n, cela détermine une suite (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$\|x-y_n\|\to d(x,F).$$

Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence y dans F pour laquelle on obtient

$$d(x,F)=\|x-y\|\,.$$

(b) Puisque $F\neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F. On vérifie aisément

$$d(\lambda x,F)=|\lambda|\,d(x,F)$$

car pour $\lambda\neq 0$

$$\big\{\|\lambda x-y\|\bigm| y\in F\big\}=\Big\{\big\|\lambda(x-y')\big\|\Bigm| y'\in F\Big\}.$$

Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x,F)=1$.
Pour tout vecteur $y\in F$, on a aussi $d(x-y,F)=1$ car

$$\big\{\|x-z\|\bigm| z\in F\big\}=\big\{\|x-y-z'\|\bigm| z'\in F\big\}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver $y\in F$ tel que $\|x-y\|=1$. Le vecteur $y\in F$ vérifiant $d(x,F)=\|x-y\|$ convient. Le vecteur $u=x-y$ est alors solution.

(c) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie.
Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois $u_0,\dots,u_n$ déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que

$$d(u_{n+1},\mathrm{Vect}(u_0,\dots,u_n))=\|u_{n+1}\|=1.$$

Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie.
La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B, on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge

$$\big\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\big\|\to 0$$

or

$$\big\|u_{\varphi(n+1)}-u_{\varphi(n)}\big\|\geq d(u_{\varphi(n+1)},\mathrm{Vect}(u_0,\dots,u_{\varphi(n+1)-1}))\geq 1.$$

C'est absurde.

Exercice 49 : [énoncé]
Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite y_∞. On veut établir que $y_\infty \in f(F)$. Si y_∞ est l'un des éléments de la suite (y_n) l'affaire est entendue. Sans perte de généralités, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq y_\infty$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = f(x_n)$. L'ensemble $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ est un compact de E_2 donc $f^{-1}(K)$ est un compact de E_1. La suite (x_n) apparaît comme étant une suite d'éléments du compacte $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergeant dans la partie $x_{\varphi(n)} \to x_\infty \in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé F, on peut affirmer $x_\infty \in F$. On va maintenant établir $y_\infty = f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $K_N = \{y_n \mid n \geq N\} \cup \{y_\infty\}$. K_N est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty \in f^{-1}(K_N)$. Ainsi, $x_\infty \in \bigcap_{N\in\mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1}\left(\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N\right)$. Or $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} K_N = \{y_\infty\}$ donc $f(x_\infty) = y_\infty$.

Exercice 50 : [énoncé]
Notons que l'intégrale définissant a_n converge car $|\operatorname{th} t| \leq 1$.

(a) Pour $t \geq n$,
$$\frac{\operatorname{th} n}{t^2} \leq \frac{\operatorname{th} t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}.$$
En intégrant et en exploitant $\operatorname{th} n \to 1$, on obtient $a_n \sim \frac{1}{n}$.
On en déduit que $R = 1$. Pour $x = -1$, $\sum a_n x^n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées car (a_n) décroît vers 0.
Pour $x = 1$, $\sum a_n x^n$ diverge par l'équivalent précédent. La fonction somme est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Pour $x \in [-1\,;0]$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série $\sum a_n x^n$ et affirmer
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k\right| \leq a_{n+1}\,|x|^{n+1} \leq a_{n+1}$$
ce qui assure la convergence uniforme de la série. Par suite la fonction somme est continue en -1.

(c) On a
$$\left|a_n - \frac{1}{n}\right| \leq \frac{1 - \operatorname{th} n}{n}$$
donc pour $x \in [0\,;1[$,
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \operatorname{th} n}{n} x^n.$$
Or
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x) \to +\infty \text{ et } n^2 \frac{1 - \operatorname{th} n}{n} \sim 2n\mathrm{e}^{-2n} \to 0$$
donc $\sum \frac{1-\operatorname{th} n}{n}$ est absolument convergente et la somme de la série entière $\sum \frac{1-\operatorname{th} n}{n} x^n$ est définie et continue en 1. On en déduit
$$f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 51 : [énoncé]
$R = 1$, il y a divergence en $x = 1$ et convergence par le CSSA en $x = -1$.
La fonction somme est définie sur $[-1\,;1[$.
Par application du critère spécial des séries alternées sur $[-1\,;0]$,
$$\left\|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) x^k\right\|_{\infty,[-1;0]} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \to 0$$
il y a donc convergence uniforme sur $[-1\,;0]$ et donc continuité de la somme en -1 puis finalement sur $[-1\,;1[$.
Pour étudier la fonction en 1^-, on peut exploiter l'encadrement
$$\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln(n+1) - \ln n = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{n}.$$
On en déduit pour $x \in [0\,;1[$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) x^n \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$
Or
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$
$$\text{et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x}\big(-\ln(1-x) - x\big) \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Finalement
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 52 : [énoncé]
Posons $b_n=\frac{a_n}{n!}$, on a $b_0=1$ et
$$(n+1)b_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}b_{n-k}b_k.$$
Notons S la somme de la série entière $\sum b_nx^n$ et posons R son rayon de convergence.
Par récurrence, on peut affirmer $|b_n|\leq 1$ et donc $R>0$.
Sur $]-R\,;R[$, la relation précédente donne a
$$S'(x)=S^2(x).$$
Après résolution, sachant que $S(0)=1$, on obtient
$$S(x)=\frac{1}{1-x}$$
d'où l'on tire $a_n=n!$.

Exercice 53 : [énoncé]
Pour $x\neq 0$, posons $u_n=\frac{x^{2n+1}}{3n+2}$. $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to x^2$ donc $R=1$.
La fonction somme S est impaire, on se limite alors à $x>0$.
$$\sqrt{x}S(x^{3/2})=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$
or
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{+\infty}t^{3n+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$$
donc $S(x)=\frac{1}{x^{4/3}}\int_0^{x^{2/3}}\frac{t}{1-t^3}\,\mathrm{d}t$ et il ne reste plus qu'à décomposer en éléments simples etc.
$$S(x)=\frac{1}{6x^{4/3}}\ln\frac{x^{4/3}+x^{2/3}+1}{x^{4/3}-2x^{2/3}+1}-\frac{1}{x^{4/3}\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{2x^{2/3}+1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{\pi}{6}\right).$$

Exercice 54 : [énoncé]

(a) On sait que les séries entières $\sum a_nx^n$ et $\sum na_nx^n$ ont le même rayon de convergence R (notamment car une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence). Puisque $a_n=\mathrm{o}(a_n\ln n)$ et $a_n\ln n=\mathrm{o}(na_n)$ on peut affirmer par encadrement que la série entière $\sum(a_n\ln n)x^n$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus
$$a_n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim a_n\ln n$$
donc la série entière $\sum\left(a_n\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}\right)x^n$ a encore pour rayon de convergence R.

(b) Notons que $\sum\ln nx^n$ a pour rayon de convergence $R=1$. On sait
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
donc le terme générale
$$\ln n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$
est borné par un certain M.
Par suite
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n-\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n\right|\leq\sum_{n=1}^{+\infty}Mx^n=\frac{Mx}{1-x}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{1-x}\right)$$
quand $x\to 1^-$.
Or par produit de Cauchy
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}x^n=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$
donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(n)x^n\underset{x\to 1^-}{\sim}-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Pour $0 < r < R$, il y a absolument convergence de $\sum a_n r^n$. On a

$$\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} r^n e^{-in\theta}.$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes, on obtient

$$\left|f(re^{i\theta})\right|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n.$$

Puisque $\sum\left|a_n r^n\right|$ et $\sum\left|\overline{a_n} r^n\right|$ sont absolument convergentes, par produit de Cauchy, on peut affirmer que $\sum\sum_{k=0}^{n}|a_k|\left|\overline{a_{n-k}}\right| r^n$ converge. On en déduit que la série des fonctions continues $\theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n$ est normalement convergente et donc on peut permuter somme et intégration :

$$\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n} a_k\overline{a_{n-k}} e^{i(2k-n)\theta} r^n\, d\theta.$$

Or $\int_0^{2\pi} e^{ip\theta}\, d\theta = 0$ pour tout $p \in \mathbb{Z}^*$ donc, après simplification des termes nuls,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 d\theta = \sum_{m=0}^{+\infty}|a_m|^2 r^{2m}.$$

(b) Pour $0 < r < R$ suffisamment petit

$$\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n| r^{2n} - |a_0|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2 - \left|f(0)\right|^2 d\theta.$$

Par intégration, d'une fonction négative, on obtient $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} \leq 0$. Or il s'agit d'une somme de termes positifs, ils sont donc tous nuls et on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0.$$

La fonction f est alors constante.

(c) Posons

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n.$$

Pour tout $r > 0$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2n} - \sum_{n=0}^{N}|a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2 d\theta.$$

Pour $p \geq N+1$, on obtient

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\, d\theta.$$

Or

$$0 \leq \int_0^{2\pi}\frac{\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\, d\theta \leq 2\pi\frac{\left(P(r)\right)^2 + \left(\sum_{n=0}^{N}|a_n| r^n\right)^2}{r^{2p}} = \frac{O(r^{2N})}{r^{2p}}$$

donc

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\left|f(re^{i\theta}) - f_N(re^{i\theta})\right|^2}{r^{2p}}\, d\theta \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

Pour $p = N+1$,

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty}|a_n|^2\frac{r^{2n}}{r^{2p}} = |a_{N+1}|^2 + \sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2(n-N-1)}$$

avec

$$0 \leq \sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 r^{2(n-N-1)} \leq \frac{1}{r^2}\sum_{n=N+2}^{+\infty}|a_n|^2 \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $a_{N+1} = 0$ puis, en reprenant la démarche avec $p = N+2, \ldots$, on obtient successivement $a_{N+2} = 0, \ldots$ et finalement $f = f_N \in \mathbb{C}_N[X]$

Exercice 56 : [énoncé]

Notons $\sum a_n z^n$ la série entière dont la somme est égale à f sur $B°$.
La fonction f est continue sur un compact donc uniformément continue.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ vérifiant

$$\forall z, z' \in B, |z - z'| \leq \delta \implies \left|f(z) - f(z')\right| \leq \varepsilon.$$

Considérons alors $r = 1 - \delta$ et $g_r : z \mapsto f(rz)$.
Pour tout $z \in B$, $|z - rz| = \delta|z| \leq \delta$ donc $\left|f(z) - g(z)\right| \leq \varepsilon$. Ainsi $\|f - g\|_{\infty,B} \leq \varepsilon$
Puisque la série entière $\sum a_n z^n$ converge uniformément vers f sur tout compact inclus dans $B°$, la série entière $\sum a_n r^n z^n$ converge uniformément vers g sur B. Il existe donc un polynôme P vérifiant $\|P - g\|_{\infty,B} \leq \varepsilon$ puis $\|f - P\|_{\infty,B} \leq 2\varepsilon$ ce qui permet de conclure.

Exercice 57 : [énoncé]
Pour $|x|<1$, on a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right)=\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}.$$

Par décomposition en éléments simples

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-x}-\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}-x}\right).$$

On reconnaît une écriture en $\left(Z-\overline{Z}\right)/2\mathrm{i}$, c'est donc une partie imaginaire

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha}-x}\right)=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}\right).$$

Par sommation géométrique

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}{1-x\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}}=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\alpha}x^n$$

et donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\left(\frac{x\sin\alpha}{1-x\cos\alpha}\right)\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\sin((n+1)\alpha)x^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin(n\alpha)x^{n-1}.$$

Par intégration de série entière, on obtient alors la relation proposée.

Exercice 58 : [énoncé]
Posons

$$f(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}.$$

On vérifie aisément la convergence de cette intégrale et la fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$f'(x)=\frac{1}{1+x+x^2}.$$

Pour $|x|<1$,

$$f'(x)=\frac{1-x}{1-x^3}=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n}=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$$

avec

$$a_{3n}=1, a_{3n+1}=-1 \text{ et } a_{3n+2}=0.$$

En intégrant,

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

avec

$$f(0)=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}.$$

Pour calculer cette intégrale, on écrit

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}t}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right]_{-\infty}^{0}.$$

Après calculs

$$f(0)=\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 59 : [énoncé]
(a) En posant $Y=X-1$,

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n}=\frac{1}{Y^n(Y+2)^m}.$$

Pour $Y\in\left]-1/2\,;1/2\right[$,

$$\frac{1}{(Y+2)^m}=\frac{1}{2^m}\frac{1}{\left(1+\frac{Y}{2}\right)^m}=\frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{-m(-m-1)\dots(-m-k+1)}{k!}\frac{Y^k}{2^k}.$$

Après simplifications

$$\frac{1}{(Y+2)^m}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}Y^k.$$

On en déduit que la partie polaire relative au pôle 1 est

$$\frac{a_0}{(X-1)^n}+\dots+\frac{a_{n-1}}{X-1}=\frac{a_0}{Y^n}+\dots+\frac{a_{n-1}}{Y}$$

avec

$$a_k=\frac{(-1)^k}{2^{m+k}}\binom{m+k-1}{k}.$$

De même, en posant $Z=X+1$, la partie polaire relative au pôle -1 est

$$\frac{b_0}{(X+1)^m}+\dots+\frac{b_{m-1}}{X+1}=\frac{b_0}{Z^m}+\dots+\frac{b_{m-1}}{Z}.$$

avec

$$b_k = \frac{(-1)^n}{2^{n+k}}\binom{n+k-1}{k}.$$

Enfin, puisque de partie entière nulle, la fraction rationnelle étudiée est la somme des deux parties polaires proposées.

(b) En réduisant chaque partie polaire au même dénominateur, on obtient

$$\frac{1}{(X+1)^m(X-1)^n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k}{(X-1)^n} + \frac{\sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k}{(X+1)^m}.$$

Par conséquent, on posant

$$U(X) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(X-1)^k \text{ et } V(X) = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(X+1)^k$$

la poursuite de la réduction au même dénominateur du calcul précédent donne

$$(X+1)^m U(X) + (X-1)^n V(X) = 1.$$

Exercice 60 : [énoncé]

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 avec

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f(x)$$

et

$$f''(x) = \frac{-x}{2(1+x^2)^{3/2}} f(x) + \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} f'(x).$$

La fonction f est donc solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0$$

avec les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$.

Analyse :

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ dont la somme S est solution de l'équation différentielle précédente. Pour tout $x \in \left]-R\,;R\right[$, on a

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

et

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n.$$

La relation $(1+x^2)S''(x) + xS'(x) - S(x)/4 = 0$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + (n^2 - 1/4)a_n\right)x^n = 0.$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on obtient la relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = -\frac{1}{4}\frac{(2n+1)(2n-1)}{(n+2)(n+1)}a_n.$$

En adjoignant les conditions initiales $S(0) = 1$ et $S'(0) = 1/2$, on parvient à

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^{4p-1}}\frac{(4p-2)!}{((2p)!)((2p-1)!)} \text{ et } a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2^{4p}}\frac{(4p-1)!}{(2p+1)!(2p-1)!}.$$

Synthèse :

Considérons la série entière déterminée au terme de l'analyse. Celle-ci se comprend comme la somme de deux séries entières $\sum a_{2p}x^{2p}$ et $\sum a_{2p+1}x^{2p+1}$ chacune de rayon de convergence 1 car

$$\left|\frac{a_{n+2}}{a_n}\right| = \frac{(2n+1)(2n-1)}{4(n+2)(n+1)} \to 1.$$

Cette série entière est donc de rayon de convergence $R \geq 1$ et, compte tenu des calculs de l'analyse, sa somme est solution de l'équation différentielle

$$(1+x^2)y''(x) + xy'(x) - \frac{1}{4}y(x) = 0.$$

Elle vérifie de plus les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1/2$. Puisque la fonction f est aussi solution de ce problème de Cauchy et que ce dernier possède une solution unique, on peut identifier f et la somme de la série entière.

Exercice 61 : [énoncé]

(a) Appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $t \mapsto e^{it}$ qui est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

(b) La convergence de l'intégrale définissant F provient de la convergence supposée de $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$.
On a

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k f(t)}{k!}\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

et

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{1}{(n+1)!} \int_{-\infty}^{+\infty} |t|^{n+1} |f(t)|\,\mathrm{d}t \to 0$$

compte tenu des hypothèses.
On peut alors affirmer

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^k}{k!} f(t)\,\mathrm{d}t\right) x^k$$

avec convergence sur $\mathbb{R}$ de la série entière considérée.

Exercice 62 : [énoncé]

(a) f est la somme d'une série entière de rayon de convergence $R = 1$.
Puisque $\ln(1 + 1/n) \sim 1/n$, la série n'est pas définie pour $x = 1$. En revanche, on vérifie aisément la convergence de la série en $x = -1$ en vertu du critère spécial des séries alternées. Finalement f est définie sur $[-1\,;1[$.

(b) Calculons la somme partielle

$$\sum_{n=1}^{2N} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)(-1)^n = \sum_{p=1}^{N} \ln\left(\frac{2p+1}{2p}\right) - \ln\left(\frac{2p}{2p-1}\right) = \ln\left(\frac{(2N+1)((2N)!)^2}{(2^N N!)^4}\right).$$

Par la formule de Stirling

$$f(1) = \ln\frac{2}{\pi}.$$

Par le changement de variable $u = 1/x$ $\mathcal{C}^1$ bijectif, on ne modifie par la nature de l'intégrale et on a

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

Puisque

$$\left|\int_{E(x)}^{x} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u\right| \le \int_{E(x)}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{u} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

la nature de l'intégrale et sa valeur sont données par la limite de

$$\int_1^{n+1} \frac{(-1)^{E(u)}}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{(-1)^k}{u}\,\mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \ln\left(1+\frac{1}{k}\right).$$

On peut conclure

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{E(1/x)}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2}{\pi}.$$

(c) On peut écrire

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \varepsilon_n \text{ avec } \varepsilon_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On a alors

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} + \sum_{n=1}^{n} \varepsilon_n x^n.$$

D'une part

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \xrightarrow[x\to1^-]{} +\infty$$

et d'autre part

$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n x^n\right| \le \sum_{n=1}^{+\infty} |\varepsilon_n| < +\infty.$$

On peut donc conclure

$$f(x) \underset{x\to1^-}{\sim} -\ln(1-x).$$

Exercice 63 : [énoncé]

Par développement en série entière

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \int_{[0;1[} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} t^{nk}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n \ge 1$, il y a convergence de la série des intégrales des valeurs absolues donc on peut donc intégrer terme à terme par le théorème de Fubini

$$\int_0^1 \ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}.$$

On a alors
$$n\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}$$
avec
$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2(nk+1)}\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\to 0$$
donc
$$n\int_0^1\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t\to\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$
avec
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$$
car on sait
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 64 : [énoncé]
La suite (a_n) est bornée mais ne tend par vers 0 (car $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre décimal).
Par conséquent, pour tout $|x|<1$, la série numérique $\sum a_n x^n$ converge car son terme est dominé par le terme sommable x^n.
En revanche $\sum a_n 1^n$ diverge car (a_n) ne tend par 0.
On peut conclure que le rayon de convergence de la série entière vaut 1.
On vient de voir que la série diverge grossièrement pour $x=1$, il en est de même pour $x=-1$.
On conclut que l'intervalle cherché est
$$]-1\,;1[.$$

Exercice 65 : [énoncé]
Soit
$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{3n+2}}{3n+2}$$
somme de série entière définie sur $]-1\,;1[$.
$$S'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}x^{3n+1}=\frac{x}{1-x^3}$$
donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(3n+2)\times 3^n}=\sqrt[3]{9}S\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)=\sqrt[3]{9}\int_0^{1/\sqrt[3]{3}}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1-t^3}$$
ce qui donne un résultat assez monstrueux :
$$9^{(1/3)}(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\arctan((\frac{2}{9}3^{(2/3)}+\frac{1}{3})\sqrt{3})+\frac{1}{6}ln(3)+\frac{1}{6}ln(3+3^{(1/3)}+3^{(2/3)})-\frac{1}{3}ln(-3^{(2/3)}+3)+\frac{1}{18}$$
fourni par Maple.

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Posons $a_n=\frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}\neq 0$. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n+1}{2n+3}\to\frac{1}{2}$. $R=2$.

(b) On sait que
$$\int_0^{\pi/2}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\frac{2^n n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}$$
donc
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Par convergence uniforme,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\sin^{2n+1}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin t}{2-x\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$
Ainsi
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin t}{(2-x)+x\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{(2-x)+xu^2}$$
puis
si $x>0$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\frac{2}{\sqrt{x(2-x)}}\arctan\sqrt{\frac{x}{2-x}}.$$
Si $x<0$ alors
$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n x^n=\frac{2}{\sqrt{-x(2-x)}}\operatorname{argth}\sqrt{\frac{-x}{2-x}}.$$

Exercice 67 : [énoncé]
Pour $x \neq 0$, posons $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^{2n}$. Après calculs

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi x^2$$

donc $R = 1/\sqrt{\pi}$.

Exercice 68 : [énoncé]
Série entière et série entière dérivée ont même rayon de convergence. Étudions alors le rayon de convergence de $\sum \cos((n+1)\alpha)x^n$. $(\cos((n+1)\alpha))$ est bornée donc $R \geq 1$ et ne tend pas vers 0 donc $R \leq 1$ et finalement $R = 1$.

Exercice 69 : [énoncé]

(a) Pour $t > 1$, $\mathrm{e}^{-t^n} \to 0$ avec $0 \leq \mathrm{e}^{-t^n} \leq \mathrm{e}^{-t}$. Par convergence dominée $I_n \to 0$.

(b) Par le changement de variable $u = t^n$ qui est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,

$$I_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Par convergence dominée,

$$\int_1^{+\infty} u^{\frac{1-n}{n}} \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

donc

$$I_n \sim \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

(c) Par l'équivalent précédent $R = 1$ et la série entière diverge en 1. Par application du critère spécial des séries alternées, la série entière converge en -1.

Exercice 70 : [énoncé]
Posons

$$u(x,t) = \frac{t-1}{\ln t} t^x$$

définie et continue par morceaux sur $\mathbb{R} \times]0\,;1[$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;1[$.
Puisque

$$u(x,t) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{t^x}{\ln t} \text{ et } u(x,t) \xrightarrow[t\to 1^-]{} 1$$

la fonction $t \mapsto u(x,t)$ est intégrable sur $]0\,;1[$ si, et seulement si, $x > -1$.
De plus, cette fonction est positive et donc la convergence de l'intégrale équivaut à l'intégrabilité de la fonction intégrande.
On en déduit que la fonction f est définie sur $]-1\,;+\infty[$.
La fonction u admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (t-1)t^x.$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en t.
Pour $[a\,;b] \subset]-1\,;+\infty[$, on a

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;1[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| \leq (1-t)t^a.$$

Par domination sur tout segment, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^1 (t-1)t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

On en déduit

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1} + C.$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$$

est continue sur $]0\,;1[$ et se prolonge par continuité en 0 et 1, elle est donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ et alors

$$\left|f(x)\right| \leq \int_0^1 M t^x\,\mathrm{d}t = \frac{M}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit $C = 0$ puis finalement

$$f(x) = \ln\frac{x+2}{x+1}.$$

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Pour $t \in]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{t^{a-1}}{1+t^b} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{a+nb-1}.$$

Posons

$$S_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{a+kb-1} = t^{a-1} \frac{1-(-1)^{n+1} t^{(n+1)b}}{1+t^b}.$$

Les fonctions S_n sont continues par morceaux et la suite (S_n) converge simplement sur $]0\,;1[$ vers la fonction

$$S : t \mapsto \frac{t^{a-1}}{1+t^b}$$

elle-même continue par morceaux.
De plus

$$\left|S_n(t)\right| \le \frac{2t^{a-1}}{1+t^b} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;1[$.
Par convergence dominée, on obtient

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de l'intégrale introduite.
Or

$$\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k t^{a+kb-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{a+kb}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb} = \int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b}\,\mathrm{d}t$$

avec convergence de la série introduite..

(b) Après calculs

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Exercice 72 : [énoncé]
La fonction $u(x,t) = \mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}/\sqrt{t}$ définie sur $\mathbb{R} \times]0\,;+\infty[$.
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$u(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ et } t^2 u(x,t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que la fonction donnée par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = f(x) + \mathrm{i}g(x)$$

est définie sur $\mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}\sqrt{t}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$,
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \sqrt{t}\mathrm{e}^{-t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car prolongeable par continuité en 0 et vérifiant $t^2\varphi(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.
Par domination, on peut affirmer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{t}\mathrm{e}^{(\mathrm{i}x-1)t}\,\mathrm{d}t.$$

À l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$F'(x) = -\frac{1}{2(x+\mathrm{i})}F(x).$$

La résolution de cette équation différentielle donne

$$F(x) = F(0)\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}.$$

Enfin, sachant

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

on parvient à
$$F(x) = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\arctan x)/2}}{(x^2+1)^{1/4}}$$
d'où les expressions de $f(x)$ et de $g(x)$.
$$f(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) \text{ et } g(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(x^2+1)^{1/4}}\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right).$$
On peut encore éventuellement « simplifier » en exploitant
$$\cos x = \sqrt{\frac{1+\cos(2x)}{2}} \text{ pour } x \in [-\pi/2\,;\pi/2]$$
ce qui donne
$$\cos\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}$$
et aussi
$$\sin\left(\frac{\arctan x}{2}\right) = \operatorname{signe}(x)\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}}.$$

Exercice 73 : [énoncé]
Pour $x > 0$,
$$x^x = \mathrm{e}^{x\ln x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$$
donc
$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \int_{]0;1]}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$
avec
$$f_n(x) = \frac{(x\ln x)^n}{n!}.$$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux, $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction continue par morceaux sur $]0\,;1]$.
Les fonctions f_n sont intégrables et
$$\int_{]0;1]}|f_n| = \int_{]0;1[}\frac{(-1)^n x^n(\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x.$$
Or
$$\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1}\int_\varepsilon^1 x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$$
donc quand $\varepsilon \to 0$
$$\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1}\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^{n-1}\,\mathrm{d}x.$$
Ainsi
$$\int_{]0;1]} x^n(\ln x)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{n-1}{n+1}\cdots\frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$
Par suite
$$\int_0^1 |f_n|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$
et il y a convergence de la série $\sum\int_0^1|f_n|$
Par le théorème d'intégration terme à terme, on obtient que l'intégrale $\int_{]0;1]} x^x\,\mathrm{d}x$ est définie et
$$\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}$$
puis le résultat voulu.

Exercice 74 : [énoncé]
On a
$$\left|\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\right| \leq \frac{1\times 2}{(x+1)(x+2)}\times 1 = \varphi(x)$$
avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
Quand $n \to +\infty$,
$$\ln\left(\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\right) = -\sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right) \to -\infty$$
car $\ln(1+x/k) \sim x/k$ terme général d'une série à termes positifs divergente.
Par suite
$$\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)} \to 0$$
puis par le théorème de convergence dominée
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n!}{\prod_{k=1}^n(k+x)}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 75 : [énoncé]
Par le changement de variable $u = nt$

$$I_n = \int_0^{+\infty} f(u/n)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u.$$

Par convergence dominée, sachant

$$\left|f(u/n)\right| \leq \|f\|_\infty \mathrm{e}^{-u} = \varphi(u)$$

avec φ intégrable, on obtient

$$I_n \to \int_0^{+\infty} f(0)\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = f(0).$$

Exercice 76 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$,

$$\frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \text{ et } \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1} \underset{t\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc $f(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(b) Posons $g(x,t) = \frac{\sin(xt)}{\mathrm{e}^t-1}$.
g admet une dérivée partielle $\frac{\partial g}{\partial x}$ avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{\mathrm{e}^t-1}\cos(xt)$$

$x \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$.
Enfin $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{t}{\mathrm{e}^t-1} = \varphi(t)$ avec φ intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
Par domination, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, *a fortiori* continue et dérivable.

(c) La décomposition

$$\frac{1}{\mathrm{e}^t-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-nt}$$

permet d'écrire

$$f(1) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

Par la majoration $\left|\sin(u)\right| \leq |u|$, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right| \leq \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum \int_{[0;+\infty[} \left|\sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\right|\mathrm{d}t$ converge, on peut intégrer terme à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

On calcule l'intégrale sommée en considérant la partie imaginaire de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\mathrm{e}^{-nt}\,\mathrm{d}t.$$

On obtient à terme

$$f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 77 : [énoncé]

(a) Pour $a > -1$, on note $\Omega_a = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \geq a\right\}$.
$t \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue par morceaux sur $]0\,;1]$, $z \mapsto \frac{t^z}{1+t}$ est continue sur Ω et pour $z \in \Omega_a$,

$$\left|\frac{t^z}{1+t}\right| \leq \frac{t^a}{1+t} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $]0\,;1]$ car $\varphi(t) \sim t^a$ quand $t \to 0^+$.
Par domination, on peut affirmer que f est définie et continue sur Ω_a.
Ceci valant pour tout $a > -1$, on peut encore affirmer que f est définie et continue sur Ω.

(b) On observe

$$f(x) + f(x+1) = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$$

et par continuité

$$f(x+1) \xrightarrow[x\to-1]{} f(0)$$

donc

$$f(x) \underset{x\to-1}{\sim} \frac{1}{x+1}.$$

(c) Par intégration par parties

$$(z+1)f(z) = \frac{1}{2} + \int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 \left|t^{z+1}\right|\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|t^{z+1}\right| = \left|\exp((z+1)\ln t\right| = \exp\big((\mathrm{Re}(z)+1)\ln t\big) = t^{\mathrm{Re}(z)+1}$$

car les exponentielles imaginaires sont de module 1.
On a alors

$$\left|\int_0^1 \frac{t^{z+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^1 t^{\mathrm{Re}(z)+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{Re}(z)+2} \xrightarrow[\mathrm{Re}(z)\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi

$$(z+1)f(z) \xrightarrow[\mathrm{Re}(z)\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

puis

$$f(z) \underset{\mathrm{Re}(z)\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2z}.$$

Exercice 78 : [énoncé]
Posons

$$f(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $|x| > 1$, l'intégrale ne peut pas être définie.
Pour $|x| \leq 1$
En $t = \pi/2$ et $t = 3\pi/2$, il est possible de prolonger par continuité la fonction intégrée.
Pour $x = -1$:
Quand $t \to 0^+$, $\ln(1-\cos t) \sim 2\ln t$
Quand $t \to 2\pi^-$, $t = 2\pi - h$, $\ln(1-\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$
Pour $x = 1$, quand $t \to \pi$,$t = \pi + h$, $\ln(1+\cos t) = \ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$.
Finalement f est définie sur $[-1\,;1]$.
Pour des raisons de symétrie,

$$f(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\ln(1+x\cos t)}{\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

Par domination sur $[-a\,;a]$ avec $a < 1$, f est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$ et

$$f'(x) = 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+x\cos t}.$$

Par le changement de variable $u = \tan\frac{t}{2}$,

$$f'(x) = 4\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)+x(1-u^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Puisque $f(0) = 0$, on en déduit $f(x) = 2\pi\arcsin x$.

Exercice 79 : [énoncé]
Étudions la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}.$$

Notons $u(x,t) = \frac{\arctan(x/t)}{1+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+ \times]0\,;+\infty[$
$t \mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur$]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+$
$x \mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\left|u(x,t)\right| \leq \frac{\pi/2}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ fonction intégrable sur $]0\,;+\infty[$.
On en déduit que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
$x \mapsto u(x,t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$ et

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}$$

$x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ pour chaque $t \in]0\,;+\infty[$
$t \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x \in \mathbb{R}_+^*$ et

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2x}\frac{1}{(1+t^2)}$$

car $2tx \leq x^2+t^2$.
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$

$$\forall (x,t) \in [a\,;b] \times]0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{1}{2a}\frac{1}{(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ fonction intégrable.
Par domination sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ avec

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(t^2+x^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $x \neq 1$, on peut décomposer la fraction rationnelle définissant l'intégrande

$$\frac{t}{(1+t^2)(x^2+t^2)} = \frac{t}{(x^2-1)(1+t^2)} - \frac{t}{(x^2-1)(x^2+t^2)}$$

et on obtient alors

$$f'(x) = \frac{1}{x^2-1}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+t^2}{x^2+t^2}\right)\right]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{(x^2-1)}.$$

Cette identité se prolonge en $x=1$ par un argument de continuité.
On a alors

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0} f(x) - f(\varepsilon).$$

Or $f(0)=0$ et par continuité on parvient à

$$\int_0^x \frac{\ln t}{(t^2-1)}\,\mathrm{d}t = f(x).$$

Exercice 80 : [énoncé]
La fonction f est bien définie sur $]0\,;+\infty[$ et

$$xf(x) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$u(x,t) = \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}$$

définie sur $]0\,;+\infty[\times[0\,;+\infty[$.
u admet deux dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = -\frac{t}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{e}^{-tx}.$$

Pour chaque $x>0$, les fonctions u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ sont intégrables et pour tout $[a\,;b]\subset\,]0\,;+\infty[$, on a la domination

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \le \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. On en déduit que la fonction

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

est définie et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$. Il en est de même pour f par opérations sur de telles fonctions.
Quand $x\to+\infty$,

$$0 \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc $xf(x) \to \frac{\pi}{2}$ puis

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

Étudions maintenant $f(x)$ quand $x\to 0^+$.
Par le changement de variable $u=tx$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{x^2+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \frac{u}{x^2+u^2}\,\frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u$$

avec

$$\varphi\colon u \mapsto \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u}.$$

Par intégration par parties,

$$f(x) = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+u^2)\varphi(u)\right]_0^{+\infty} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \ln(x^2+u^2)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

Pour $x\in\,]0\,;1]$,

$$\left|\ln(x^2+u^2)\right| \le \left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|$$

et la fonction

$$u \mapsto \Big(\left|\ln(u^2)\right| + \left|\ln(1+u^2)\right|\Big)\varphi'(u)$$

est intégrable sur $]0\,;+\infty[$ car φ' peut être prolongée par continuité en 0 et

$$\varphi'(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}.$$

On en déduit

$$f(x) = -\ln x + \mathrm{O}(1) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\ln x.$$

Exercice 81 : [énoncé]
$t \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x \mapsto \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [-a\,;a]$

$$\left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{\left|\ln(a^2+t^2)\right| + \left|\ln(t^2)\right|}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par suite f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Il est immédiat que f est paire. Poursuivons, en étudiant f sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right) = \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$$

$t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $[0\,;+\infty[$,
$x \mapsto t \mapsto \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in [a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\left|\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\right| \leq \frac{2b}{(a^2+t^2)(1+t^2)} = \psi(t)$$

avec ψ intégrable. Par suite f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $x \neq 1$,

$$\frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)} = \frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{x^2+t^2}\right)$$

donc

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2x}{(x^2+t^2)(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{x+1}$$

et cette relation vaut aussi pour $x = 1$ par continuité.
En procédant au changement de variable $u = 1/t$, on obtient $f(0) = 0$ et donc on peut conclure

$$f(x) = \pi\ln(x+1)$$

pour $x \in \mathbb{R}_+$ en exploitant un argument de continuité.

Exercice 82 : [énoncé]

(a) Par intégration par parties on obtient une relation de récurrence qui conduit à

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x = \frac{n!m!}{(n+m+1)!}.$$

En posant u_n le terme général de la série étudiée, on observe $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{1}{4}$ ce qui assure la convergence de la série.

(b) $S_{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^1 x^n(1-x)^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut permuter et obtenir

$$S_{-1} = \int_0^1 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1-x(1-x)} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Puisque

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{4n+2}{n+1}\binom{2n}{n}$$

on observe

$$\frac{4}{\binom{2n+2}{n+1}} - \frac{2}{n+1}\frac{1}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \quad (*).$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient

$$4\left(S_0 - \frac{1}{2}\right) - 2\left(S_{-1} - \frac{1}{2}\right) = S_0$$

puis

$$S_0 = \frac{1+2S_{-1}}{3}.$$

(c) On multiplie la relation$(*)$ par $(n+1)^p$ et on développe le $(n+1)^p$ du second membre et en sommant comme ci-dessus, on saura exprimer $3S_p$ en fonction des S_q avec $q < p$.

Exercice 83 : [énoncé]

(a) Pour $x > 0$, $t^2\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donne l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}$.

Pour $x = 0$, il est connu que l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente bien que $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ ne soit pas intégrable.

(b) Pour $x \in [a\,;b] \subset]0\,;+\infty[$,

$$\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\sin t}{t}\mathrm{e}^{-tx}\right)\right| \leq \mathrm{e}^{-ax} = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Pour $x > 0$,

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} -\sin(t)\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(-x+i)t}\,\mathrm{d}t\right) = -\frac{1}{x^2+1}$$

donc $f(x) = C - \arctan x$.
Or

$$\left|f(x)\right| \leq \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

donc

$$C = \frac{\pi}{2}.$$

(d) En découpant l'intégrale, on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

Posons

$$u_n(t) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t.$$

Par application du critère spécial des séries alternées, on établir que la série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$, on en déduit que sa somme, à savoir la fonction f, est continue en 0. On peut conclure que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 84 : [énoncé]

(a) Par la règle de d'Alembert la série converge pour tout $(s,\lambda) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{C}$.
$\Delta_\lambda\colon\ ]0;+\infty[$.

(b)

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{s}\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right).$$

Or

$$\left|1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\lambda|^n}{n!} = \mathrm{e}^{|\lambda|}$$

donc $F_\lambda(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$.

(c) Puisque

$$\left|\frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}\right| \leq \frac{\lambda^n}{n!}$$

il y a converge normale sur $\mathbb{R}_+$ de la série des fonctions continues $s \mapsto \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)}$. Ceci permet d'affirmer

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(s+1)\dots(s+n)} \xrightarrow[s\to0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^\lambda$$

et donc

$$F_\lambda(s) \underset{s\to0^+}{\sim} \frac{\mathrm{e}^\lambda}{s}.$$

(d) Par intégrations par parties successives :

$$\int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n\,\mathrm{d}y = \frac{n!}{s(s+1)\dots(s+n)}.$$

(e)

$$F_\lambda(s) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 (1-y)^{s-1} y^n\,\mathrm{d}y.$$

Par convergence de la série des intégrales des valeurs absolues, on peut échanger somme et intégrale :

$$F_\lambda(s) = \int_0^1 \mathrm{e}^{\lambda y}(1-y)^{s-1}\,\mathrm{d}y.$$

Exercice 85 : [énoncé]
Pour $t \in\ ]0\,;1[$, on peut écrire

$$\frac{\ln t}{1-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \ln t.$$

Or

$$\int_0^1 t^{2n} \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{(2n+1)^2}.$$

Sachant que la série des intégrales des valeurs absolues converge, le théorème d'intégration terme à terme de Fubini donne

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = -\frac{3\zeta(2)}{4}$$

avec en substance la convergence de l'intégrale étudiée.

Exercice 86 : [énoncé]
La série $\sum a_p \frac{t^p}{p!}$ est convergente car

$$\left|a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leq \left\|(a_n)\right\|_\infty \frac{t^p}{p!}.$$

De plus sa somme est continue car on peut aisément établir la convergence normale sur tout segment.
Enfin

$$\left|\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right| \leq \left\|(a_n)\right\|_\infty \mathrm{e}^t$$

permet d'assurer l'existence de l'intégrale étudiée.
Posons

$$f_p(t) = a_p \frac{t^p}{p!} \mathrm{e}^{-2t}.$$

La série de fonction $\sum f_p$ convergence simplement.
Les fonctions f_p et $\sum_{p=n}^{+\infty} f_p$ sont continues par morceaux.
Les fonctions f_p sont intégrables sur $[0\,;+\infty[$ et

$$\int_0^{+\infty} \left|f_p(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{|a_p|}{2^{p+1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{p+1}}\right)$$

est terme générale d'une série convergente.
Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t} \left(\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \frac{t^p}{p!}\right) \mathrm{d}t = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{a_p}{2^{p+1}}.$$

Enfin, cette expression tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente.

Exercice 87 : [énoncé]
Par la série exponentielle, on peut écrire pour $t > 0$,

$$t^{-t} = \exp(-t \ln t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(t \ln t)^n}{n!}.$$

Pour procéder à une intégration terme à terme, posons $u_n(t) = (-1)^n (t \ln t)^n / n!$ pour $t \in]0\,;1]$.
Les fonctions u_n sont continues par morceaux et la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0\,;1]$ vers la fonction $t \mapsto t^{-t}$ elle-même continue par morceaux.
Les fonctions u_n sont intégrables sur $]0\,;1]$ car on peut les prolonger par continuité en 0 et

$$\int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t = (-1)^n \int_0^1 u_n(t) \,\mathrm{d}t.$$

Par intégration par parties

$$\int_\varepsilon^1 (t \ln t)^n \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} (\ln t)^n\right]_\varepsilon^1 - \frac{n}{n+1} \int_\varepsilon^1 t^n (\ln t)^{n-1} \,\mathrm{d}t.$$

En passant à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n \,\mathrm{d}t = -\frac{n}{n+1} \int_0^1 t^n (\ln t)^{n-1} \,\mathrm{d}t.$$

En itérant le procédé on obtient

$$\int_0^1 (t \ln t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$$

et ainsi

$$\int_0^1 \left|u_n(t)\right| \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \int_0^1 |u_n|$ étant convergente, on peut intégrer terme à terme et l'on obtient

$$\int_0^1 t^{-t} \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{(n+1)}}$$

avec existence de l'intégrale en premier membre.

Exercice 88 : [énoncé]
On sait que la fonction ζ est continue.

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \,\mathrm{d}x = \int_2^{+\infty} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \,\mathrm{d}x$$

avec

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{n^x} = \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

La convergence de la série des intégrales des valeurs absolues assure la convergence de l'intégrale du premier membre et permet de permuter intégrale et somme. On obtient alors

$$\int_2^{+\infty} (\zeta(x) - 1) \,\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}.$$

Exercice 89 : [énoncé]

(a) Posons
$$f_n(x) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)\right)^n.$$
Les fonctions f_n sont continues par morceaux et la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0\,;\pi/2[$, elle-même continue par morceaux. Enfin, on a la domination
$$\left|f_n(x)\right| \le 1 = \varphi(x)$$
avec φ évidemment intégrable sur $[0\,;\pi/2[$. Par convergence dominée, on obtient
$$u_n \to 0.$$

(b) Par l'absurde, si $\sum u_n$ converge alors, on peut appliquer un théorème d'intégration terme à terme à la série de fonctions $\sum f_n$. En effet, les fonctions f_n sont continues par morceaux, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0\,;\pi/2[$ vers la fonction
$$f\colon x \mapsto \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}$$
elle-même continue par morceaux. Enfin les fonctions f_n sont intégrables sur $[0\,;\pi/2[$ et l'hypothèse de travail absurde signifie la convergence de la série $\sum \int_{[0;\pi/2[} |f_n|$.
Par théorème d'intégration terme à terme, on obtient
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)}\,\mathrm{d}x$$
avec convergence de l'intégrale. Or, quand $x \to 0^+$
$$\frac{1}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)} \sim \frac{8}{\pi^2 x^2}$$
et donc l'intégrale introduite diverge. C'est absurde.
On en déduit que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 90 : [énoncé]

On a $u_n \ge v_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$.
Si la série numérique $\sum u_n$ converge alors, par comparaison de série à termes positifs, la série $\sum v_n$ converge aussi. Par le théorème d'intégration terme à terme de Fubini, il y a alors intégrabilité sur $]0\,;\pi/2]$ de la fonction
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos^{2n} t = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1-\cos^2 t} = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t}.$$
Or quand $t \to 0^+$
$$\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sin^2 t} \sim \frac{1}{t^2}$$
qui n'est pas intégrable sur $]0\,;\pi/2]$.
C'est absurde, on en conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 91 : [énoncé]

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 de solution homogène :
$y = A\cos x + B\sin x$.
Méthode de variation des constantes
$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = \cot x. \end{cases}$$
Après résolution et intégration
$$y(x) = -\frac{1}{2}\sin x\ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x} + A\cos x + B\sin x.$$

Exercice 92 : [énoncé]

(a) C'est une équation différentielle linéaire d'ordre à 2 à coefficients constants de solution homogène
$$y = A\cos x + B\sin x.$$
La méthode de variation des constantes propose une solution particulière de la forme
$$y(x) = A(x)\cos x + B(x)\sin x$$
avec A et B fonctions dérivables solutions du système
$$\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = 1/x. \end{cases}$$

En faisant $\cos(x)\times(1)-\sin(x)\times(2)$, on détermine $A'(x)$ et $B'(x)$ s'obtient de façon analogue

$$\begin{cases} A'(x) = -\sin x/x \\ B'(x) = \cos x/x. \end{cases}$$

On peut alors proposer

$$A(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \text{ et } B(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

où les intégrales introduites ont le bon goût de converger...
La solution générale de l'équation différentielle est alors

$$y(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

(b) Posons $u(x,t) = \mathrm{e}^{-tx}/(1+t^2)$ définie sur $\mathbb{R}_+\times[0\,;+\infty[$.
$x\mapsto u(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t\in[0\,;+\infty[$
$t\mapsto u(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$ pour chaque $x\in\mathbb{R}_+$ et

$$\left|u(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+t^2} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable sur $[0\,;+\infty[$. Par domination f est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.
De plus, $x\mapsto u(x,t)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ pour chaque $t\in[0\,;+\infty[$ avec

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{-t\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2\mathrm{e}^{-tx}}{1+t^2}.$$

La dérivée partielle $\frac{\partial u}{\partial x}$ est continue par morceaux et intégrable sur $[0\,;+\infty[$.
La dérivée partielle $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est continue en x et continue par morceaux en t.
Soit $[a\,;b]\subset\,]0\,;+\infty[$. On a

$$\forall (x,t)\in[a\,;b]\times[0\,;+\infty[, \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right| \leq \frac{t^2\mathrm{e}^{-at}}{1+t^2} \leq \mathrm{e}^{-at} = \varphi(t)$$

avec φ intégrable. Par domination sur tout segment, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx}\frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

On vérifie alors

$$f''(x) + f(x) = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

de sorte que f est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

Ainsi, il existe $A,B\in\mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = A\cos x + B\sin x + \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On observe

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}$$

donc par encadrement $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$ ce qui entraîne $A = B = 0$.
Ainsi

$$\forall x>0, f(x) = \cos x\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Séparément, on calcule $f(0)$

$$f(0) = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \Big[\arctan t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(c) Par convergence de l'intégrale, quand $x\to 0^+$

$$\int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \to \int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

De plus

$$\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t + \int_x^1\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t = C^{te} + \int_x^1\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\left|\int_x^1\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_x^1\frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x$$

donc

$$\sin x\int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t \to 0.$$

Ainsi en passant à la limite en 0 l'expression précédente de $f(x)$, on obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = f(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 93 : [énoncé]
Les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ car f l'est.
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette solution est 2π-périodique si, et seulement si,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

i.e. $\int_x^{x+2\pi} f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
En développant le sinus et en exploitant la liberté de la famille $(\sin,\cos)$ ainsi que la 2π-périodicité de f, cela équivaut à la condition

$$\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos t\,\mathrm{d}t = 0.$$

Exercice 94 : [énoncé]
Par application de la méthode de variation des constantes, la solution générale de l'équation $y'' + y = f$ est

$$y(x) = \lambda\cos x + \mu\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour conclure, il suffit de justifier que $x\mapsto \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$ est bornée.
Par intégration par parties,

$$\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t = f(x) - f(0)\cos x - \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

Quitte à passer à l'opposé, on peut supposer f croissante et donc $f'(t)\ge 0$.
Puisque $-1\le\cos(x-t)\le 1$,

$$f(0) - f(x) \le \int_0^x f'(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t \le f(x) - f(0)$$

puis

$$f(0)(1-\cos x) \le \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t \le 2f(x) - f(0)(1+\cos x).$$

La fonction f étant bornée (car convergente en $+\infty$), il en est de même de $x\mapsto\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 95 : [énoncé]
Remarquons

$$\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t = \cos x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + \sin x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t.$$

Si f est solution alors

$$f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x-t)\,\mathrm{d}t$$

et donc $f(0) = 1$.
f est dérivable car somme de fonctions dérivables.

$$f'(x) = -2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,\mathrm{d}t + 2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t + 2f(x)$$

et $f'(0) = 2$.
f est alors deux fois dérivable et

$$f''(x) = 1 - f(x) + 2f'(x).$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle

$$y'' - 2y' + y = 1$$

vérifiant les conditions initiales $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$.
La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 est

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^x + 1.$$

Cela conduit à $f(x) = 2x\mathrm{e}^x + 1$.
Inversement, soit par calculs, soit en remontant le raisonnement, on peut affirmer que la fonction proposée est solution.

Exercice 96 : [énoncé]
Soit f une fonction solution. f est dérivable et

$$f'(x) = f(1/x)$$

donc f' est encore dérivable. La fonction f est donc deux fois dérivable avec

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}f'(1/x) = -\frac{1}{x^2}f(x).$$

La fonction f apparaît alors comme étant solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$E\colon x^2y'' + y = 0$$

E est une équation différentielle d'Euler. Réalisons le changement de variable $t = \ln x$.
Soient $y\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$z(t) = y(\mathrm{e}^t)$$

z est deux fois dérivable et

$$y(x) = z(\ln x).$$

$$y'(x) = \frac{1}{x}z'(\ln x).$$

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2}z'(\ln x) + \frac{1}{x^2}z''(\ln x)$$

y est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de E si, et seulement si, z est solution sur $\mathbb{R}$ de

$$F\colon z'' - z' + z = 0$$

F est un équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants homogène de solution générale

$$z(x) = \left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\mathrm{e}^{x/2}.$$

La solution générale de E sur $\mathbb{R}_+^*$ est donc

$$y(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right).$$

Revenons à la fonction f. Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) = \sqrt{x}\left(\lambda\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + \mu\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right).$$

On a alors

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left((\lambda + \mu\sqrt{3})\cos\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} + (\mu - \lambda\sqrt{3})\sin\frac{\sqrt{3}\ln x}{2}\right)$$

et donc

$$f'(x) = f(1/x) \iff \begin{cases}\lambda + \mu\sqrt{3} = 2\lambda\\ \lambda\sqrt{3} - \mu = 2\mu\end{cases} \iff \lambda = \mu\sqrt{3}.$$

Finalement, les solutions sont les fonctions f données par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = C\sqrt{x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}\ln x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

Exercice 97 : [énoncé]
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 définie sur $]0\,;+\infty[$.
Sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$,

$$\int \frac{3\ln x + 1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = 3\ln x + \ln|\ln x| + C^{te}.$$

Solution générale sur $]0\,;1[$ ou $]1\,;+\infty[$

$$y(x) = \lambda x^3 |\ln x|\,.$$

Solution sur $]0\,;+\infty[$.
Soient $y\colon]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ solution de l'équation sur $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $y(x) = \lambda x^3\ln x$ sur $]0\,;1[$ et $y(x) = \mu x^3 \ln x$ sur $]1\,;+\infty[$.
La continuité en 1 donne $y(1) = 0$ sans conditions sur λ et μ.
La dérivabilité en 1 donne $\lambda = \mu$.
Ainsi $y(x) = \lambda x^3 \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ qui est évidement solution.

Exercice 98 : [énoncé]
Par convergence absolue, on peut écrire

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k)!}I_n + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+1)!}A + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+2)!}A^2 + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(4k+3)!}A^3$$

ce qui donne

$$\exp(A) = \frac{\cos(1)+\mathrm{ch}(1)}{2}I_n + \frac{\sin(1)+\mathrm{sh}(1)}{2}A + \frac{\mathrm{ch}(1)-\cos(1)}{2}A^2 + \frac{\mathrm{sh}(1)-\sin(1)}{2}A^3.$$

Exercice 99 : [énoncé]
On a

$${}^t\left(\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^k\right) = \sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left({}^tA\right)^k.$$

En passant à la limite et par continuité de l'application de transposition, on a

$${}^t(\exp A) = \exp({}^tA).$$

Puisque les matrices A et $-A$ commutent, on a

$${}^t(\exp A)\exp A = \exp(-A)\exp(A) = \exp(-A+A) = \exp(\mathrm{O}_n) = \mathrm{I}_n.$$

Ainsi la matrice $\exp A$ est orthogonale.

Exercice 100 : [énoncé]
C'est un système différentiel linéaire d'ordre 1 homogène d'équation matricielle $X' = AX$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2, 0\}$,

$$E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, E_0(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

On a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En posant $Y = P^{-1}X$, on obtient

$$X' = AX \iff Y' = DY$$

or

$$Y' = DY \iff Y(t) = \begin{pmatrix} \lambda \mathrm{e}^{-t} \\ \mu \mathrm{e}^{2t} \\ \nu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$$

donc

$$X' = AX \iff X(t) = \lambda \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^{2t} \\ \mathrm{e}^{2t} \\ 3\mathrm{e}^{2t} \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}.$$

Exercice 101 : [énoncé]
$\chi_A = X^3 - 2X$, $\pi_A = \chi_A$. On a donc

$$A^3 = 2A, A^{2k+1} = 2^k A \text{ et } A^{2k+2} = 2^k A^2 \text{ pour } k > 0$$

avec

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\exp(A) = I_3 + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!} A + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k-1}}{(2k)!} A^2 = I_3 + \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} A + \frac{1}{2}(\mathrm{ch}(\sqrt{2}) - 1) A^2.$$

Exercice 102 : [énoncé]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = -(X-2)(X^2 - X + 1)$.

La résolution complexe est alors facile puisque la matrice A est diagonalisable.
La résolution réelle est en revanche plus délicate à obtenir, détaillons-la :
$X_1 = {}^t(1, 0, -1)$ est vecteur propre de A, complétons-le avec deux vecteurs d'un plan stable.
Les plans stables s'obtiennent en étudiant les éléments propres de ${}^tA$.
$\mathrm{Sp}({}^tA) = \mathrm{Sp}\, A = \{2\}$ et $E_2({}^tA) = \mathrm{Vect}\, {}^t(2, 1, -1)$. Ainsi le plan d'équation $2x + y - z = 0$ est stable par ${}^tA$.
Prenons $X_2 = {}^t(0, 1, 1)$ et $X_3 = AX_2 = {}^t(-1, 2, 0)$. On vérifie $AX_3 = X_3 - X_2$.

Ainsi pour $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B$.

Pour $X = {}^t(x, y, z)$ et $Y = {}^t(y_1, y_2, y_3) = P^{-1}X$, on a $X' = AX \iff Y' = BY$.
Ceci nous conduit à la résolution suivante :

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_3' = y_2 + y_3 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -y_3 \\ y_2'' - y_2' + y_2 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} y_1(t) = \alpha \mathrm{e}^{2t} \\ y_2(t) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t}(\lambda \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + \mu \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ y_3(t) = -y_2'(t) \end{cases}$$

Et on peut conclure via $X = PY$.

Exercice 103 : [énoncé]

(a) $\chi_A = (X-2)(X+1)^2$,

$$E_2(A) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a^2 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } E_{-1}(A) = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice A est diagonalisable, $P^{-1}AP = D$ avec

$$P = \begin{pmatrix} a^2 & -a^2 & -a \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit $\mu_A = (X-2)(X+1)$.

(b) Ci-dessus.

(c) Par division euclidienne $X^n = (X+1)(X-2)Q(X) + \alpha X + \beta$ avec

$$\alpha = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ et } \beta = \frac{2(-1)^n + 2^n}{3}$$

donc

$$A^n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} A + \frac{2(-1)^n + 2^n}{3} I_3$$

puis

$$\mathrm{e}^A = \frac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-1}}{3} A + \frac{2\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^2}{3} I_3.$$

Exercice 104 : [énoncé]
$\chi_A = X(X^2+1)$, $\pi_A = X(X^2+1)$, $\exp(A)\exp({}^tA) = \exp(A)\exp(-A) = I_3$.
En calculant $A^2, A^3, \ldots$ on obtient

$$\exp(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 1 & -\sin 1 \\ 0 & \sin 1 & \cos 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 105 : [énoncé]
$A^2 = O$ donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.
Puisque $A \neq 0$, A n'est pas diagonalisable. $\pi_A = X^2$ et $\chi_A = -X^3$.

$$\exp(A) = I + A.$$

L'étude se généralise pour $n \geq 3$ avec $A = (\omega^{i+j-2})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $\omega \in U_n \setminus \{1\}$.

Exercice 106 : [énoncé]

(a) Cas $|x| < 1$:

$$\left|u_n(x,y)\right| = \mathrm{o}(x^n)$$

donc la série $\sum u_n(x,y)$ est absolument convergente.
Cas $|x| > 1$:
Si la série $\sum u_n(x,y)$ converge alors $u_n(x,y) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc

$$\cos(ny) = u_n(x,y)\frac{\sqrt{n}}{x^n} \to 0$$

par croissance comparée.
Mais alors

$$\cos(2ny) = 2\cos^2(ny) - 1 \to -1$$

ce qui est incohérent avec l'affirmation qui précède.
Ainsi la série $\sum u_n(x,y)$ diverge.
Cas $x = 1$:
Si $y = 0\ [2\pi]$ alors $u_n(1,y) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum u_n(1,y)$ diverge.
Si $y \neq 0\ [2\pi]$ alors par une transformation d'Abel, on obtient la convergence de la série $\sum u_n(1,y)$.
Cas $x = -1$:
On remarque

$$u_n(-1,y) = u_n(1, y+\pi).$$

Ainsi $\sum u_n(-1,y)$ converge si, et seulement si, $y \neq \pi\ [2\pi]$.
Finalement

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\right\} \cup \left\{(1,y)/y \neq 0\ [2\pi]\right\} \cup \left\{(-1,y)/y \neq \pi\ [2\pi]\right\}.$$

(b) L'intérieur de D est alors

$$D^\circ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1\right\}.$$

Soient $a \in [0\,;1[$ et $D_a = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < a\right\}$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_a et la série de fonctions $\sum u_n(x,y)$ converge simplement sur D_a.
La série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y)\right| \leq \sqrt{n} a^{n-1}.$$

Enfin, la série de fonctions $\sum \frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)$ converge normalement sur D_a via

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial y}(x,y)\right| \leq \sqrt{n} a^n.$$

On peut alors appliquer les théorèmes usuels qui affirment que

$$(x,y) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x,y)$$

admet deux dérivées partielles continues sur D_a. C'est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur D_a. Enfin, ceci valant pour tout $a \in [0\,;1[$, on obtient une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de D.

Exercice 107 : [énoncé]
En passant en coordonnées polaires, on écrit

$$x = r\cos\theta \text{ et } y = r\sin\theta \text{ avec } r = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

On a alors

$$f(x,y) = r^2\cos\theta\sin\theta\cos(2\theta) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

On prolonge f par continuité en $(0,0)$ en posant $f(0,0)=0$.
Par opérations sur les fonctions, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Aussi

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(t,0)-f(0,0)\big) = 0.$$

En passant en coordonnées polaires, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0.$$

Ainsi $\frac{\partial f}{\partial x}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
L'étude pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ est identique puisque

$$f(x,y) = -f(y,x).$$

Ainsi f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Cependant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\right) = -1$$

alors que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 1.$$

La fonction f ne peut donc être de classe $\mathcal{C}^2$.

Exercice 108 : [énoncé]

(a) Puisque la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$, on peut écrire

$$g(x) = g(y) + \int_y^x g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par le changement de variable $t = y + u(x-y)$, on obtient

$$g(x) = g(y) + (x-y)\int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi

$$f(x,y) = \int_0^1 g'(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u$$

et cette relation vaut pour $x \neq y$ et aussi pour $x = y$.

(b) Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé.
L'application $\varphi\colon (x,u) \mapsto g'(y+u(x-y))$ admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u) = ug''(y+u(x-y)).$$

Cette dérivée partielle est continue en x et continue par morceaux en u
Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ assez grand pour que y en soit élément, on a

$$\forall x \in [a\,;b], \forall u \in [0\,;1], y+u(x-y) \in [x\,;y] \subset [a\,;b].$$

La fonction g'' est continue donc bornée par un certain $M \in \mathbb{R}_+$ sur le segment $[a\,;b]$. On a alors

$$\forall (x,u) \in [a\,;b]\times[0\,;1], \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\right| \leq M = \psi(u).$$

La fonction ψ est évidemment intégrable sur $[0\,;1]$ et donc, par domination sur tout segment, on peut affirmer que l'application $x \mapsto \int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^1 \varphi(x,u)\,\mathrm{d}u\right) = \int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,u)\,\mathrm{d}u.$$

Ainsi f admet une dérivée partielle

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 ug''(y+u(x-y))\,\mathrm{d}u.$$

De plus, la fonction $(x,y,u) \mapsto ug''(y+u(x-y))$ est continue sur $\mathbb{R}^2\times[0\,;1]$ et par une domination sur $[a\,;b]\times[a\,;b]$, on obtient la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de l'application $\frac{\partial f}{\partial x}$.
De même, on montre que la deuxième dérivée partielle de f existe et est continue.

Exercice 109 : [énoncé]

(a) On passe en coordonnées polaires avec $r = \sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan(x/y)$ de sorte que $x = r\sin\theta$ et $y = r\cos\theta$.
On parvient à
$$f(x,y) = C(x/y)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$
avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Idem, on parvient à
$$f(x,y) = \frac{2}{3}\frac{x}{y}\sqrt{x^3+y^3} + C(x/y)$$
avec C une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 110 : [énoncé]
La fonction $f\colon (x,y) \mapsto x^4+y^4-2(x-y)^2$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Après résolution ses points critiques sont : $(0,0)$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.
En $(0,0)$: $f(0,0)=0$, $f(1/n,0) \sim -2/n^2 < 0$ et $f(1/n,1/n) \sim 2/n^4 > 0$.
Pas d'extremum local en $(0,0)$
En $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$: $r=20$, $t=20$ et $s=4$. $rt-s^2>0$ et $r>0$.
Il y a un minimum local en $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.
$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v) = -8+10(u^2+v^2)+4uv+4\sqrt{2}(u^3-v^3)+u^4+v^4.$$
On exploite
$$2(u^2+v^2)+4uv = 2(u+v)^2 \text{ et } 8u^2+4\sqrt{2}u^3+u^4 = u^2(u+2\sqrt{2})^2$$
pour affirmer
$$f(\sqrt{2}+u,-\sqrt{2}+v) = f(\sqrt{2},-\sqrt{2})+2(u+v)^2+u^2(u+2\sqrt{2})^2+v^2(v+2\sqrt{2})^2.$$
Ainsi $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ est un minimum global.
En $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$: l'étude est identique puisque $f(x,y)=f(y,x)$.

Exercice 111 : [énoncé]

(a) L'application ϕ est clairement un endomorphisme de E.
Posons $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ avec $r=\sqrt{x^2+y^2}$ et $\theta = \arctan\frac{y}{x}$, $(r,\theta) \in V = \mathbb{R}_+^* \times \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$
Pour $f \in E$, on considère $g \in \mathcal{C}^\infty(V,\mathbb{R})$ définie par $g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$.
On remarque
$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta).$$
Ainsi
$$\Phi(f) = 0 \iff r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = 0$$
pour tout $(r,\theta) \in V$.
La résolution de cette équation aux dérivées partielles donne $g(r,\theta) = C(\theta)$ avec C de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$.
Par suite on obtient la solution générale $f(x,y) = C(\arctan(y/x)) = D(y/x)$ avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Si f est homogène de degré α alors en dérivant la relation $f(tx,ty) = t^\alpha f(x,y)$ par rapport à t puis en évaluant le résultat en $t=1$ on obtient l'égalité $\Phi(f) = \alpha f$.
Inversement si $\Phi(f) = \alpha f$ alors en introduisant g comme ci-dessus, on obtient
$$r\frac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \alpha g(r,\theta)$$
ce qui donne $g(r,\theta) = C(\theta)r^\alpha$ puis
$$f(x,y) = D(y/x)(x^2+y^2)^{\alpha/2}$$
avec D fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Il est alors facile de vérifier que f est homogène de degré α.

(c) La fonction h est homogène de degré 5, donc $h/5$ est solution particulière de l'équation linéaire $\Phi(f) = h$. L'ensemble des solutions de l'équation est alors le sous-espace affine $h/5 + \operatorname{Ker}\Phi$.

Exercice 112 : [énoncé]
Notons A, B, C les points définissant notre triangle et O le centre du cercle circonscrit.
En introduisant les mesures α, β, γ des angles $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, on vérifie
$$\alpha+\beta+\gamma = 0\ [2\pi]$$
et on peut calculer l'aire algébrique des triangles (OAB), (OBC) et (OCA) qui sont respectivement
$$\frac{1}{2}r^2\sin\alpha,\ \frac{1}{2}r^2\sin\beta \text{ et } \frac{1}{2}r^2\sin\gamma = -\frac{1}{2}r^2\sin(\alpha+\beta).$$

L'aire algébrique du triangle (ABC) est alors

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{2}r^2(\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)).$$

L'étude des points critiques de cette fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;2\pi[^2$ conduit à résoudre le système

$$\begin{cases}\cos\alpha=\cos(\alpha+\beta)\\ \cos\beta=\cos(\alpha+\beta)\end{cases}$$

dont les seules solutions dans $]0\,;2\pi[^2$ sont

$$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)\text{ et }\left(\frac{4\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right).$$

Ce sont les situations des triangles équilatéraux resp. direct et indirect.
L'extremum trouvé vaut

$$\frac{3\sqrt{3}r^2}{4}.$$

Exercice 113 : [énoncé]
Soit $x>0$ fixé.
L'application $y\mapsto f(x,y)$ a pour dérivée $2y-\frac{a}{xy^2}$, elle donc minimale pour $y=\sqrt[3]{\frac{a}{2x}}$.
Considérons

$$g\colon x\mapsto f(x,\sqrt[3]{\frac{a}{2x}})=x^2+\frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{2a^2}{x^2}}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x)=2x-\frac{\sqrt[3]{2a^2}}{x^{5/3}}$,
$g'(x)=0\iff 2x^{8/3}=2^{1/3}a^{2/3}\iff x=\sqrt[4]{\frac{a}{2}}$.
g est minimale pour $x=\sqrt[4]{a/2}$, puis f admet un minimum en $(\sqrt[4]{a/2},\sqrt[4]{a/2})$ de valeur $2\sqrt{2a}$.

Exercice 114 : [énoncé]

(a) En polaires, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$,

$$f_p(x,y)=(\cos\theta+\sin\theta)^pr^p\sin\frac{1}{r}.$$

Si $p\geq 1$ alors $\left|f_p(x,y)\right|\leq 2^pr^p\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ et on peut prolonger f par continuité en $(0,0)$.
Si $p=0$ alors $f_0(x,y)=\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ diverge car le sinus diverge en $+\infty$.

(b) On suppose $p\geq 1$.
Pour $p=2$:

$$f_2(x,y)=(x+y)^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\mathrm{O}(\left\|(x,y)\right\|^2)$$

ce qui s'apparente à un développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$.
La fonction f_2 est donc différentiable en $(0,0)$ de différentielle nulle.
Pour $p>2$:

$$f_p(x,y)=(x+y)^{p-2}f_2(x,y).$$

La fonction f_p est différentiable par produit de fonctions différentiables.
Pour $p=1$:
Quand $h\to 0^+$,

$$\frac{1}{h}\big(f_1(h,0)-f_1(0,0)\big)=\sin\frac{1}{h}$$

diverge. Ainsi f n'est pas dérivable en $(0,0)$ selon le vecteur $(1,0)$, elle ne peut donc y être différentiable.

Exercice 115 : [énoncé]
Par dérivation de fonctions composées

$$g'(t)=\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1+th_1,\dots,x_n+th_n).$$