

Compacité

Valeurs d'adhérences d'une suite

Exercice 1 [02946] [Correction]

Soit a une suite de réels telle que $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de a est un intervalle.

Exercice 2 [01162] [Correction]

Soit K une partie compacte d'un espace vectoriel normé E . Montrer que si une suite (u_n) d'éléments de K n'a qu'une seule valeur d'adhérence alors cette suite converge vers celle-ci.

Exercice 3 [01163] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \rightarrow 0$. Montrer que si a est une valeur d'adhérence de (u_n) alors $-2a$ l'est aussi. En déduire que (u_n) converge.

Exercice 4 [02947] [Correction]

Déterminer les suites réelles bornées telle que $\left(u_n + \frac{u_{2n}}{2}\right)_{n \geq 0}$ converge.

Partie compacte

Exercice 5 [01160] [Correction]

Montrer que toute partie fermée d'une partie compacte est elle-même compacte.

Exercice 6 [01164] [Correction]

Soient K et L deux compacts d'un espace vectoriel normé E . Établir que $K + L = \{x + y \mid x \in K, y \in L\}$ est un compact de E .

Exercice 7 [01171] [Correction]

Soient E et F deux espaces normés, A une partie fermée de E et B une partie compacte de F .

Soit $f: A \rightarrow B$ une application vérifiant :

- $f^{-1}(\{y\})$ est compact pour tout $y \in B$;
- l'image de tout fermé de A est un fermé de B .

Montrer que A est compact.

Exercice 8 [02778] [Correction]

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E .

(a) Montrer

$$\forall x \in E, \exists y \in F, d(x, F) = \|x - y\|.$$

(b) Montrer, si $F \neq E$, qu'il existe $u \in E$ tel que $d(u, F) = \|u\| = 1$.

(c) Montrer que E est de dimension finie si, et seulement si, la boule unité fermée $B = \{x \in E \mid \|x\| \leq 1\}$ est une partie compacte.

Exercice 9 [04165] [Correction]

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice à coefficients strictement positifs. Pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ choisis dans \mathbb{R}^n , on écrit $x \leq y$ si $x_i \leq y_i$ pour tout indice i .

- (a) Écrire un programme **Python** qui renvoie la valeur propre de module maximal d'une matrice passée en argument.
- (b) Tester ce programme pour dix matrices carrées à coefficients pris aléatoirement dans $[1; 2[$.

Soit

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R}_+ \mid \exists x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, 0 \leq x \text{ et } \lambda x \leq Ax\}.$$

(c) Soit $\lambda \in S$. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$0 \leq x, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda x \leq Ax.$$

- (d) Soit λ une valeur propre complexe. Montrer que $|\lambda| \in S$.
- (e) Montrer que la partie S est majorée et expliciter un majorant.
- (f) Montrer que S est une partie compacte.
- (g) Soit $\alpha = \max S$. Montrer que α est une valeur propre de A strictement positive associée à un vecteur propre strictement positif.

Exercice 10 [04950] [Correction]

Soit K une partie compacte d'un espace normé E et $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de E recouvrant le compact K , c'est-à-dire vérifiant

$$K \subset \bigcup_{i \in I} \Omega_i.$$

- (a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in K$, il existe au moins un indice $i \in I$ tel que la boule $B(x, \alpha)$ soit incluse dans Ω_i .
- (b) Établir qu'il existe une famille finie (x_1, \dots, x_n) constituée d'éléments de K telle que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \alpha).$$

- (c) Conclure que l'on peut extraire de la famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ une sous-famille finie recouvrant K .

Compacité et continuité

Exercice 11 [01175] [Correction]

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

- (a) Soit A une partie non vide de E . Montrer que l'application $x \mapsto d(x, A)$ est continue sur E .
- (b) Soit K un compact non vide inclus dans un ouvert U . Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U.$$

Exercice 12 [04089] [Correction]

Soient K un compact non vide d'un espace normé E et $f: K \rightarrow K$ telle que

$$\forall (x, y) \in K^2, x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

- (a) Montrer que f possède au plus un point fixe.
- (b) Justifier qu'il existe $c \in K$ tel que

$$\forall x \in K, \|f(x) - x\| \geq \|f(c) - c\|.$$

- (c) En déduire que f admet un point fixe.

Exercice 13 [01176] [Correction]

Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie. On considère une application $f: K \rightarrow K$ vérifiant

$$\forall x, y \in K, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 14 [03410] [Correction]

Soient f une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et I un segment inclus dans l'image de f .

Montrer qu'il existe un segment J tel que

$$f(J) = I.$$

Exercice 15 [03857] [Correction]

Soit K une partie compacte non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

On considère $f: K \rightarrow K$ une application ρ -lipschitzienne i.e. vérifiant

$$\forall x, y \in K, \|f(y) - f(x)\| \leq \rho \|y - x\|.$$

- (a) On suppose $\rho < 1$. Montrer que f admet un point fixe.
- (b) On suppose $\rho = 1$ et K convexe. Montrer à nouveau que f admet un point fixe. On pourra introduire, pour $a \in K$ et $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n: x \mapsto \frac{a}{n} + \frac{n-1}{n} f(x).$$

Exercice 16 [01173] [Correction]

Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Soient K un compact de E et $f: K \rightarrow F$ une application continue injective.

- (a) On pose $L = f(K)$. Montrer que L est compact.
- (b) Montrer que $f^{-1}: L \rightarrow K$ est continue.

Exercice 17 [04074] [Correction]

Soit f une fonction numérique continue sur $[0; +\infty[$ telle que f ait une limite finie ℓ en $+\infty$.

Démontrer que f est uniformément continue sur $[0; +\infty[$.

Exercice 18 [04103] [Correction]

E désigne un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme de E .

- (a) Soit $x \in E$ et $r > 0$. Justifier que la boule $B_f(x, r)$ est compacte. Que dire de $f(B_f(x, r))$?
- (b) Soit $x \in E$ et un réel r tel que $0 < r < \|x\|$. On note $K = B_f(x, r)$ et on suppose $f(K) \subset K$.
On fixe $a \in K$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k(a).$$

Justifier que $(y_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de K et que $f(y_n) - y_n$ tend vers 0_E . En déduire qu'il existe un vecteur $w \in K$ tel que $f(w) = w$.

- (c) On reprend les notations précédentes et on suppose toujours $f(K) \subset K$. Montrer que $1 \in \text{Sp } f$ et $\text{Sp } f \subset [-1; 1]$.
- (d) À l'aide d'un exemple choisi en dimension 3, montrer que f n'est pas nécessairement diagonalisable.
- (e) Dans cette dernière question, on choisit $\dim E = 3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base orthonormée de E et

$$K = \left\{ x.e_1 + y.e_2 + z.e_3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \text{ avec } a, b, c > 0.$$

On suppose $f(K) = K$. Montrer que 1 ou -1 est valeur propre de f .

Exercice 19 [04993] [Correction]

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$). On souhaite établir qu'il existe une matrice $P \in O_n(\mathbb{R})$ telle que les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ soient tous égaux.

- (a) Établir la propriété quand $n = 2$.
- (b) Pour $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\delta(M) = \sum_{i=1}^{n-1} |m_{i+1,i+1} - m_{i,i}|.$$

Montrer que la fonction $\varphi: P \in O_n(\mathbb{R}) \mapsto \delta(P^{-1}AP)$ présente un minimum.

- (c) Conclure.

Raisonnement de compacité

Exercice 20 [01166] [Correction]

Soit K un compact d'un espace vectoriel normé E tel que $0 \notin K$.

On forme $F = \{\lambda.x \mid \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in K\}$. Montrer que F est une partie fermée.

Exercice 21 [01167] [Correction]

Soient K et L deux compacts disjoints d'un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Montrer que $d(K, L) > 0$.

Exercice 22 [01174] [Correction]

Soient K et L deux compacts non vides et disjoints. Montrer

$$d(K, L) = \inf_{x \in K, y \in L} \|y - x\| > 0.$$

Exercice 23 [01168] [Correction]

Soit F une partie fermée non vide d'un espace vectoriel normé de dimension finie E .

- (a) Montrer que, pour tout $x \in E$, la distance de x à F est atteinte en un certain élément $y_0 \in F$.
- (b) Y a-t-il unicité de cet élément y_0 ?

Exercice 24 [02772] [Correction]

Soient f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

son graphe.

- (a) On suppose f continue. Montrer que Γ_f est fermé.
- (b) On suppose f bornée et Γ_f est fermé dans \mathbb{R}^2 . Montrer que f est continue.
- (c) Le résultat précédent subsiste-t-il si l'on ne suppose plus f bornée ?

Exercice 25 [03274] [Correction]

Soit A une partie bornée non vide d'un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie E .

- (a) Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant A .

(b) On suppose l'espace E euclidien, montrer l'unicité de la boule précédente.

Exercice 26 [03305] [[Correction](#)]

- (a) Soit F une partie fermée d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie.
L'ensemble $F' = \bigcup_{x \in F} \overline{B(x, 1)}$ est-il fermé ?
- (b) Qu'en est-il si on ne suppose plus l'espace E de dimension finie ?

Exercice 27 [02776] [[Correction](#)]

Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés réels, f une application de E_1 dans E_2 telle que pour tout compact K de E_2 , $f^{-1}(K)$ soit un compact de E_1 .
Montrer, si F est un fermé de E_1 , que $f(F)$ est un fermé de E_2 .

Exercice 28 [01179] [[Correction](#)]

Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé E .

- (a) On suppose E de dimension finie. Montrer que $\overline{F} = F$.
- (b) On ne suppose plus E de dimension finie, montrer qu'il est possible que $\overline{F} \neq F$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Soit A l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite a .
Nous allons établir que A est un intervalle en observant que

$$\forall \alpha < \beta \in A, [\alpha; \beta] \subset A$$

(caractérisation usuelle des intervalles)

Soit $\alpha < \beta \in A$ et $\gamma \in [\alpha; \beta]$. Si $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = \beta$ alors évidemment $\gamma \in A$.

Supposons maintenant $\gamma \in]\alpha; \beta[$.

Soient $N \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $a_{n+1} - a_n \rightarrow 0$, il existe un rang N' tel que

$$\forall n \geq N', |a_{n+1} - a_n| \leq \varepsilon.$$

Comme α est valeur d'adhérence de a et que $\alpha < \gamma$ il existe $p \geq \max(N, N')$ tel que $a_p < \gamma$. Aussi, il existe $q \geq \max(N, N')$ tel que $a_q > \gamma$.

Si $p < q$, on introduit

$$E = \{n \in \llbracket p; q \rrbracket, a_n < \gamma\}.$$

Cet ensemble E est une partie de \mathbb{N} , non vide (car $p \in E$) et majoré (par q). Cet ensemble admet donc un plus grand élément r . Nécessairement $r < q$ car $a_q \geq \gamma$.

Puisque $r \in E$ et $r+1 \notin E$, $a_r < \gamma \leq a_{r+1}$ et donc $|\gamma - a_r| \leq |a_{r+1} - a_r| \leq \varepsilon$.

Si $p > q$, un raisonnement semblable conduit à la même conclusion.

Finalement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall \varepsilon > 0, \exists r \geq N, |\gamma - a_r| \leq \varepsilon.$$

On peut donc affirmer que γ est valeur d'adhérence de a et conclure.

Exercice 2 : [énoncé]

Soit (u_n) une suite d'éléments de K qui n'ait qu'une seule valeur d'adhérence ℓ .

Par l'absurde supposons que (u_n) ne converge pas vers ℓ . On peut écrire

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, |u_n - \ell| > \varepsilon.$$

Par conséquent il existe une infinité de termes de cette suite tels que $|u_n - \ell| > \varepsilon$.

À partir de ces termes on peut construire une suite extraite de (u_n) qui étant une suite d'éléments du compact K possèdera une valeur d'adhérence qui ne peut être que ℓ compte tenu de l'hypothèse.

C'est absurde, car tous ces termes vérifient $|u_n - \ell| > \varepsilon$.

Exercice 3 : [énoncé]

Posons

$$\varepsilon_n = u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \rightarrow 0.$$

Si $u_{\varphi(n)} \rightarrow a$ alors $u_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2u_{\varphi(n)} \rightarrow -2a$. Ainsi

$$a \in \text{Adh}(u) \implies -2a \in \text{Adh}(u).$$

Si (u_n) possède une valeur d'adhérence a autre que 0 alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(-2)^k a$ est aussi valeur d'adhérence. Or ceci est impossible car (u_n) est bornée. Puisque (u_n) est bornée et que 0 est sa seule valeur d'adhérence possible, $u_n \rightarrow 0$.

Exercice 4 : [énoncé]

Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n + \frac{u_{2n}}{2} \right)$ et $v_n = u_n - \frac{2}{3}\ell$ de sorte que $\varepsilon_n = v_n + \frac{v_{2n}}{2} \rightarrow 0$.

Soit a une valeur d'adhérence de la suite (v_n) .

Il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $v_{\varphi(n)} \rightarrow a$.

$$v_{2\varphi(n)} = 2\varepsilon_{\varphi(n)} - 2v_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -2a$$

donc $-2a$ est aussi valeur d'adhérence de (v_n) .

En reprenant ce processus, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(-2)^p a$ est valeur d'adhérence de (v_n) . Or la suite (u_n) est bornée, la suite (v_n) l'est donc aussi et ses valeurs d'adhérence le sont encore. On peut donc affirmer $a = 0$.

La suite (v_n) est bornée et 0 est sa seule valeur d'adhérence donc elle converge vers 0 (car si tel n'était pas le cas, il existerait une infinité de termes de la suite (v_n) en dehors d'un intervalle $[-\varepsilon; \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, et de ces termes bornés on pourrait extraire une suite convergente d'où l'existence d'une valeur d'adhérence non nulle).

Exercice 5 : [énoncé]

Soit F une partie fermée d'un compact K . Si (x_n) est une suite d'éléments de F , alors c'est aussi une suite d'éléments de K et on peut donc en extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans K . Cette suite extraite est aussi une suite convergente d'éléments du fermé F , sa limite appartient donc à F . Au final, il existe une suite extraite de (x_n) convergeant dans F .

Exercice 6 : [énoncé]

Soit (u_n) une suite d'éléments de $K + L$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut écrire $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n \in K$ et $b_n \in L$. On peut extraire de la suite (a_n) d'éléments

du compact K , une suite $(a_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément de K . On peut aussi extraire de la suite $(b_{\varphi(n)})$ d'éléments du compact L , une suite $(b_{\varphi(\psi(n))})$ convergeant vers un élément de L . Pour l'extractrice $\theta = \varphi \circ \psi$, $(a_{\theta(n)})$ et $(b_{\theta(n)})$ convergent vers des éléments de K et L donc $(u_{\theta(n)})$ converge vers un élément de $K + L$.

Autre démonstration $K + L$ est l'image du compact $K \times L$ de E^2 par l'application continue $(x, y) \mapsto x + y$.

Exercice 7 : [énoncé]

Soit (u_n) une suite d'éléments de A . On va établir que cette suite possède une valeur d'adhérence dans A .

On pose $F_n = \{u_p \mid p \geq n\}$. La suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides. Posons $G_n = f(F_n)$. La suite (G_n) est une suite décroissante de fermés non vides. On peut considérer $y_n \in G_n$. La suite (y_n) possède une valeur d'adhérence y car B est compact. Pour tout $p \geq n$, on a $y_p \in G_p \subset G_n$ donc $y \in G_n$. Par suite, il existe $t_n \in F_n$ tel que $y = f(t_n)$. La suite (t_n) est une suite du compact $f^{-1}\{y\}$, elle possède donc une valeur d'adhérence t . Pour tout $p \geq n$, $t_p \in F_p \subset F_n$ donc $t \in F_n$.

Ainsi, t est une valeur d'adhérence de (u_n) .

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Par définition

$$d(x, F) = \inf\{\|x - y\| \mid y \in F\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le réel $d(x, F) + 1/(n+1)$ ne minore par l'ensemble $\{\|x - y\| \mid y \in F\}$ et donc il existe $y_n \in F$ tel que

$$d(x, F) \leq \|x - y_n\| < d(x, F) + \frac{1}{n+1}.$$

En faisant varier n , cela détermine une suite (y_n) d'éléments de F vérifiant

$$\|x - y_n\| \rightarrow d(x, F).$$

Cette suite est bornée et évolue dans l'espace vectoriel normé F qui est de dimension finie, elle admet donc une valeur d'adhérence y dans F pour laquelle on obtient

$$d(x, F) = \|x - y\|.$$

(b) Puisque $F \neq E$, il existe un vecteur x de E n'appartenant pas à F . On vérifie aisément

$$d(\lambda x, F) = |\lambda|d(x, F)$$

car pour $\lambda \neq 0$

$$\{\|\lambda x - y\| \mid y \in F\} = \{\|\lambda(x - y')\| \mid y' \in F\}.$$

Il est donc possible de choisir x vérifiant $d(x, F) = 1$.

Pour tout vecteur $y \in F$, on a aussi $d(x - y, F) = 1$ car

$$\{\|x - z\| \mid z \in F\} = \{\|x - y - z'\| \mid z' \in F\}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver $y \in F$ tel que $\|x - y\| = 1$. Le vecteur $y \in F$ vérifiant $d(x, F) = \|x - y\|$ convient. Le vecteur $u = x - y$ est alors solution.

(c) Si E est de dimension finie, la boule B est compacte car fermée et bornée en dimension finie.

Inversement, supposons par l'absurde que B est compacte et E de dimension infinie. Par récurrence, on construit une suite (u_n) de vecteurs de E en posant u_0 un vecteur unitaire quelconque, puis une fois u_0, \dots, u_n déterminés, on définit u_{n+1} de sorte que

$$d(u_{n+1}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_n)) = \|u_{n+1}\| = 1.$$

Cette construction est possible par l'étude qui précède car E est supposé de dimension infinie.

La suite (u_n) ainsi définie est une suite d'éléments du compact B , on peut donc en extraire une suite convergente $(u_{\varphi(n)})$. Puisque cette suite converge

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \rightarrow 0$$

or

$$\|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \geq d(u_{\varphi(n+1)}, \text{Vect}(u_0, \dots, u_{\varphi(n+1)-1})) \geq 1.$$

C'est absurde.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) `import numpy as np`
`import numpy.linalg`

```
def eigmax(A):
    eig = numpy.linalg.eigvals(A)
```

```

maxi = eig[0]
for e in eig:
    if abs(e) > abs(maxi): maxi = e
return maxi

```

(b) import random as rnd

```

def generematrice(n):
    A = np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            A[i,j] = 1 + rnd.random()
    return A

```

```

for t in range(10):
    print(eigmax(generematrice(3)))

```

- (c) Soit $\lambda \in S$. Il existe x non nul à coefficients positifs tel que $\lambda x \leq Ax$. En divisant x par la somme de ses coefficients (qui est un réel strictement positif), on détermine un nouveau vecteur comme voulu.
- (d) Soit λ une valeur propre complexe et $z = (z_1, \dots, z_n)$ le vecteur propre associé. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\lambda z_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$$

et donc

$$|\lambda| |z_i| \leq \sum_{j=1}^n \underbrace{a_{i,j}}_{\geq 0} |z_j|.$$

Le vecteur $x = (|z_1|, \dots, |z_n|)$, est un vecteur réel non nul vérifiant $0 \leq x$ et $|\lambda|x \leq Ax$. On en déduit $|\lambda| \in S$.

- (e) Soit $\lambda \in S$ et $x \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $0 \leq x$ et $\lambda x \leq Ax$. Considérons i l'indice tel que x_i soit maximal parmi x_1, \dots, x_n . On a

$$\lambda x_i \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i.$$

En simplifiant par x_i (qui est strictement positif car $0 \leq x$ et x non nul), il vient

$$\lambda \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

On en déduit que la partie S est majorée par le réel

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n a_{i,j}.$$

- (f) La partie S est bornée dans un espace de dimension finie, il suffit d'établir qu'elle est fermée pour pouvoir affirmer qu'elle est compacte. Soit (λ_p) une suite d'éléments de S de limite λ_∞ . Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut introduire $x_p \in \mathbb{R}^n$ à coefficients positifs de somme égale à 1 et vérifiant $\lambda_p x_p \leq Ax_p$. La suite (x_p) évolue dans le compact

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leq x \text{ et } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Il existe une suite extraite $(x_{\varphi(q)})$ de limite $x_\infty \in K$. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\lambda_{\varphi(q)} x_{\varphi(q)} \leq Ax_{\varphi(q)}$ ce qui donne à la limite $\lambda_\infty x_\infty \leq Ax_\infty$. On peut donc affirmer que λ_∞ est élément de S . La partie S contient les limites de ses suites convergentes, elle est donc fermée et finalement compacte.

- (g) La compacité de S permet d'introduire son élément maximal α . Soit aussi $x \in K$ tel que $\alpha x \leq Ax$. Si $\alpha x \neq Ax$, le vecteur $y = Ax - \alpha x$ est à coefficients positifs et n'est pas nul. La matrice A étant à coefficients strictement positifs, Ay est à coefficients strictement positifs. Considérons ensuite $z = Ax$. Le vecteur z est à coefficients strictement positifs car les coefficients de A sont strictement positifs et les coefficients de x sont positifs et non tous nuls. Quitte à considérer $\varepsilon > 0$ assez petit, on peut écrire $\varepsilon z \leq Ay$. Cette comparaison se réorganise pour permettre d'écrire

$$(\alpha + \varepsilon)z = Az$$

ce qui contredit la définition de α . On en déduit $\alpha x = Ax$ et, comme souligné au-dessus, $z = Ax$ est un vecteur à coefficients strictement positifs ce qui entraîne $\alpha > 0$ et x à coefficients strictement positifs.

Exercice 10 : [énoncé]

- (a) Par l'absurde supposons qu'un tel $\alpha > 0$ n'existe pas. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en considérant $\alpha_n = 1/(n+1) > 0$, il existe un élément $x_n \in K$ tel que

$$B(x_n, \alpha_n) \not\subset \Omega_i \quad \text{pour tout } i \in I. \quad (1)$$

En faisant varier n , ceci détermine une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments du compact K . On peut extraire de cette suite une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un

élément x de K . La famille $(\Omega_i)_{i \in I}$ recouvrant K , il existe au moins un indice $i \in I$ tel que x est élément de Ω_i . Or Ω_i est une partie ouverte, on peut donc introduire $\alpha > 0$ tel que $B(x, \alpha) \subset \Omega_i$. Cependant, pour n assez grand, on a à la fois

$$\|x_{\varphi(n)} - x\| \leq \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \alpha_{\varphi(n)} \leq \frac{\alpha}{2}$$

de sorte que

$$B(x_{\varphi(n)}, \alpha_{\varphi(n)}) \subset B(x, \alpha) \subset \Omega_i.$$

C'est absurde puisque cela contredit (??).

- (b) Par l'absurde supposons qu'une telle famille finie n'existe pas et construisons par récurrence une suite (x_n) d'éléments de K en choisissant arbitrairement x_0 dans K puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en choisissant x_{n+1} dans K privé de la réunion des $B(x_i, \alpha)$ pour i allant de 0 à n (l'hypothèse absurde assure que ce choix est possible).

Par compacité de K , on peut extraire de la suite (x_n) une suite convergente. En notant x sa limite, on peut déterminer dans (x_n) des termes arbitrairement proches de x . En particulier, on peut trouver x_n et x_{n+p} avec $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant

$$\|x_n - x\| < \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \|x_{n+p} - x\| < \frac{\alpha}{2}.$$

Ceci entraîne $\|x_{n+p} - x_n\| < \alpha$ et donc x_{n+p} est élément de la boule de centre x_n et de rayon α . Ceci est absurde car contredit le protocole suivi pour choisir x_{n+p} .

- (c) Partant de la suite finie (x_1, \dots, x_n) qu'on peut introduire grâce à la question précédente, on introduit des indices $i_1, \dots, i_n \in I$ déterminés de sorte que

$$B(x_j, \alpha) \subset \Omega_{i_j} \quad \text{pour tout } j \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

On a alors

$$K \subset \bigcup_{j=1}^n B(x_j, \alpha) \subset \bigcup_{j=1}^n \Omega_{i_j}$$

et ainsi on peut conclure que le compact K peut être recouvert par une sous-famille finie de la famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i \in I}$.

Exercice 11 : [énoncé]

- (a) Soient $x, x' \in E$.

$$\forall y \in A, \|x - y\| \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$$

donc $d(x, A) \leq \|x - x'\| + \|x' - y\|$ puis $d(x, A) - \|x - x'\| \leq \|x' - y\|$ et $d(x, A) - \|x - x'\| \leq d(x', A)$.

Ainsi $d(x, A) - d(x', A) \leq \|x - x'\|$ et par symétrie

$$|d(x, A) - d(x', A)| \leq \|x - x'\|.$$

Finalement $x \mapsto d(x, A)$ est 1 lipschitzienne donc continue.

- (b) Considérons l'application $x \mapsto d(x, \mathcal{C}_E U)$ définie sur le compact K .

Cette application est bornée et atteint ses bornes. Posons

$\alpha = \min_{x \in K} d(x, \mathcal{C}_E U)$ atteint en $x_0 \in K$.

Si $\alpha = 0$ alors $x_0 \in \overline{\mathcal{C}_E U}$ or $\mathcal{C}_E U$ est fermé et donc $x_0 \notin U$ or $x_0 \in K$.

Nécessairement $\alpha > 0$ et alors

$$\forall x \in K, B(x, \alpha) \subset U.$$

Exercice 12 : [énoncé]

- (a) Supposons que f possède deux points fixes $x \neq y$.

L'hypothèse de travail donne

$$\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$$

ce qui est absurde si $f(x) = x$ et $f(y) = y$.

- (b) On introduit la fonction $\delta: x \mapsto \|f(x) - x\|$ définie sur K .

La fonction δ est continue sur le compact K , elle admet donc un minimum en un $c \in K$ et alors

$$\forall x \in K, \delta(x) \geq \delta(c).$$

- (c) Par l'absurde, si $f(c) \neq c$ alors

$$\delta(f(c)) = \|f(f(c)) - f(c)\| < \|f(c) - c\| = \delta(c)$$

ce qui contredit la minimalité de c . Il reste $f(c) = c$ ce qui fournit un point fixe.

Exercice 13 : [énoncé]

Unicité : Si $x \neq y$ sont deux points fixes distincts on a

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

C'est exclu et il y a donc unicité du point fixe.

Existence : Considérons la fonction réelle $g: x \mapsto d(x, f(x))$ définie sur K . Par composition g est continue et puisque K est une partie compacte non vide, g atteint son minimum en un certain $x_0 \in K$.

Si $f(x_0) \neq x_0$ on a alors

$$g(f(x_0)) = d(f(f(x_0)), f(x_0)) < d(f(x_0), x_0) = g(x_0)$$

ce qui contredit la définition de x_0 . Nécessairement $f(x_0) = x_0$ ce qui résout le problème.

Exercice 14 : [énoncé]

Notons α, β les extrémités de I .

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ des antécédents de α, β respectivement. Malheureusement, on ne peut pas déjà affirmer $f([a; b]) = [\alpha; \beta]$ car les variations de f sur $[a; b]$ sont inconnues.

Posons

$$A = \{x \in [a; b] \mid f(x) = \alpha\} \text{ et } B = \{x \in [a; b] \mid f(x) = \beta\}.$$

Considérons ensuite

$$\Delta = \{|y - x| \mid x \in A, y \in B\}$$

Δ est une partie de \mathbb{R} non vide et minorée. On peut donc introduire sa borne inférieure m . Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe deux suites $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in B^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$|y_n - x_n| \rightarrow m.$$

La partie A étant fermée et bornée, on peut extraire de la suite (x_n) une suite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant dans A . De la suite $(y_{\varphi(n)})$, on peut aussi extraire une suite convergeant dans B et en notant x_∞ et y_∞ les limites de ces deux suites, on obtient deux éléments vérifiant

$$x_\infty \in A, y_\infty \in B \text{ et } |y_\infty - x_\infty| = \min \Delta.$$

Autrement dit, on a défini des antécédents des extrémités de I dans $[a; b]$ les plus proches possibles.

Pour fixer les idées, supposons $x_\infty \leq y_\infty$ et considérons $J = [x_\infty; y_\infty]$.

On a $\alpha, \beta \in f(J)$ et $f(J)$ intervalle (car image continue d'un intervalle) donc

$$I \subset f(J).$$

Soit $\gamma \in f(J)$. Il existe $c \in J$ tel que $f(c) = \gamma$.

Si $\gamma < \alpha$ alors en appliquant le théorème de valeurs intermédiaires sur $[z; y_\infty]$, on peut déterminer un élément de A plus proche de y_∞ que ne l'est x_∞ . Ceci contredit la définition de ces deux éléments.

De même $\gamma > \beta$ est impossible et donc $f(J) \subset I$ puis l'égalité.

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La fonction f est continue car lipschitzienne. Considérons

$g: x \in K \mapsto \|f(x) - x\|$. La fonction g est réelle, continue et définie sur un compact non vide, elle admet donc un minimum en un certain $x_0 \in K$.

Puisque

$$g(x_0) \leq g(f(x_0)) = \|f(f(x_0)) - f(x_0)\| \leq \rho \|f(x_0) - x_0\| = \rho g(x_0) \text{ avec } \rho < 1.$$

On a nécessairement $g(x_0) = 0$ et donc $f(x_0) = x_0$ ce qui fournit un point fixe pour f .

(b) Par la convexité de K , on peut affirmer que f_n est une application de K vers K .

De plus

$$\|f_n(y) - f_n(x)\| = \frac{n-1}{n} \|f(y) - f(x)\| \leq \rho_n \|y - x\|$$

avec $\rho_n < 1$.

Par l'étude ci-dessus, la fonction f_n admet un point fixe x_n . La suite (x_n) est une suite du compact K , il existe donc une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ convergeant vers un élément $x_\infty \in K$. La relation

$$f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

donne

$$\frac{a}{\varphi(n)} + \frac{\varphi(n) - 1}{\varphi(n)} f(x_{\varphi(n)}) = x_{\varphi(n)}$$

et donc à la limite

$$f(x_\infty) = x_\infty.$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) L est l'image d'un compact par une application continue donc L est compact.

(b) Supposons f^{-1} non continue : $\exists y \in L, \exists \varepsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists y' \in L$ tel que

$$|y' - y| \leq \alpha \text{ et } |f^{-1}(y') - f^{-1}(y)| > \varepsilon.$$

Posons $x = f^{-1}(y)$ et en prenant $\alpha = \frac{1}{n}$ définissons $y_n \in L$ puis $x_n = f^{-1}(y_n)$ tels que $|y_n - y| \leq \frac{1}{n}$ et $|x_n - x| > \varepsilon$. (x_n) est une suite d'éléments du compact K donc elle possède une sous-suite convergente : $(x_{\varphi(n)})$. Posons $a = \lim x_{\varphi(n)}$. Comme f est continue, $y_{\varphi(n)} = f(x_{\varphi(n)}) \rightarrow f(a)$ or $y_n \rightarrow y$ donc par unicité de la limite $y = f(a)$ puis $a = f^{-1}(y) = x$. Ceci est absurde puisque $|x_{\varphi(n)} - x| > \varepsilon$.

Exercice 17 : [énoncé]

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \geq A, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon/2$$

et alors

$$\forall x, y \in [A; +\infty[, |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ (*)}$$

De plus, f est continue sur $[0; A]$ donc uniformément continue et il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0; A], |y - x| \leq \alpha \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon \text{ (**)}$$

Soit $x, y \in \mathbb{R}_+$ avec $|y - x| \leq \alpha$. On peut supposer $x \leq y$.

Si $x, y \in [0; A]$, on a $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ en vertu de (**)

Si $x, y \in [A; +\infty[$, on a à nouveau $|f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$ cette fois-ci en vertu de (*).

Si $x \in [0; A]$ et $y \in [A; +\infty[$, on a nécessairement $|x - A| \leq \alpha$. (*) et (**) donnent alors

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(A)| + |f(A) - f(y)| \leq 2\varepsilon.$$

Quitte à adapter le ε de départ, on obtient ce que l'on veut.

Autre méthode : on introduit $g = f \circ \tan$ définie sur $[0; \pi/2[$ que l'on prolonge par continuité en $\pi/2$. Ce prolongement est continue sur un segment donc uniformément continue. Puisque $f = g \circ \arctan$ avec \arctan lipschitzienne, on obtient f uniformément continue!

Exercice 18 : [énoncé]

(a) $B_f(x, r)$ est une partie fermée et bornée en dimension finie donc compacte.

L'application linéaire f étant continue (car au départ d'un espace de dimension finie), l'image $f(B_f(x, r))$ est aussi compacte.

(b) La partie K est convexe et donc $f(K)$ aussi car f est linéaire. Les vecteurs $f^k(a)$ étant tous éléments de K , la combinaison convexe définissant y_n détermine un élément de K .

Après simplification

$$f(y_n) - y_n = \frac{1}{n}(f^n(a) - a).$$

La partie K étant bornée, la suite $(f^n(a) - a)_{n \geq 1}$ l'est aussi et donc

$$f(y_n) - y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0_E.$$

Enfin, la suite $(y_n)_{n \geq 1}$ évolue dans le compact K , elle admet donc une valeur d'adhérence $w \in K$:

$$y_{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} w$$

et la propriété

$$f(y_{\varphi(k)}) - y_{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0_E$$

donne à la limite $f(w) = w$.

(c) $0_E \notin K$ et donc $w \neq 0_E$. L'égalité $f(w) = w$ assure que 1 est valeur propre de f .

Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé avec $\|v\| < r$. Le vecteur $x + v$ est élément de K et donc ses itérés $f^n(x + v) = f^n(x) + \lambda^n v$ le sont encore. Puisque le compact K est borné, les suites $(f^n(x + v))$ et $(f^n(x))$ le sont aussi et donc $(\lambda^n v)$ l'est encore. On en déduit $|\lambda| \leq 1$.

(d) Choisissons l'endomorphisme f de \mathbb{R}^3 canoniquement représenté par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme f n'est pas diagonalisable et cependant, en choisissant $x = (1, 0, 0)$ et $r = 1/2$, la condition $f(K) \subset K$ est remplie.

(e) Puisque $f(K) = K$, les vecteurs $e_1/a, e_2/b$ et e_3/c sont des valeurs prises par f . On en déduit que l'endomorphisme f est nécessairement bijectif.

Soit λ une valeur propre de f et v un vecteur propre associé. Quitte à réduire la norme de v , on peut supposer $v \in K$. On a alors $f^n(v) = \lambda^n \cdot v \in K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui oblige $|\lambda| \leq 1$.

Sachant $f^{-1}(K) = K$, un raisonnement symétrique donne $|\lambda| \geq 1$ et donc $|\lambda| = 1$.

Enfin, en dimension impaire, un endomorphisme réel admet nécessairement une valeur propre!

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Introduisons les coefficients de la matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

et recherchons $P \in O_2(\mathbb{R})$ sous la forme d'une matrice de rotation

$$P = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ à choisir.}$$

Après calculs,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \alpha = a \cos^2(t) + d \sin^2(t) + (b+c) \sin(t) \cos(t) \\ \beta = b \cos^2(t) - c \sin^2(t) + (d-a) \sin(t) \cos(t) \\ \gamma = c \cos^2(t) - b \sin^2(t) + (d-a) \sin(t) \cos(t) \\ \delta = d \cos^2(t) + a \sin^2(t) - (b+c) \sin(t) \cos(t) \end{cases}$$

Les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont égaux si, et seulement si,

$$\underbrace{(a-d)(\cos^2(t) - \sin^2(t)) + 2(b+c) \sin(t) \cos(t)}_{=f(t)} = 0.$$

La fonction continue f ainsi définie prend la valeur $a-d$ en $t=0$ et la valeur opposée en $t=\pi/2$, par le théorème des valeurs intermédiaires, on peut affirmer que cette fonction s'annule ce qui détermine un réel t pour lequel les coefficients diagonaux de $P^{-1}AP$ sont égaux.

- (b) La fonction δ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et, par composition, la fonction réelle φ est continue sur $O_n(\mathbb{R})$. Or $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte non vide et donc φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle présente un minimum.
- (c) Notons P la matrice de $O_n(\mathbb{R})$ réalisant le minimum de φ . Montrons que $\varphi(P) = 0$ ce qui entraîne immédiatement que les coefficients de $P^{-1}AP$ sont tous égaux.

Par l'absurde, supposons $\varphi(P) > 0$. Il existe $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que les coefficients diagonaux d'indices k et $k+1$ de $M = P^{-1}AP$ soient différents. Considérons alors la sous-matrice de taille 2 correspondant à ces indices

$$B = \begin{pmatrix} m_{k,k} & m_{k,k+1} \\ m_{k+1,k} & m_{k+1,k+1} \end{pmatrix}.$$

Par l'étude initiale, il existe $Q \in O_2(\mathbb{R})$ telle que les coefficients diagonaux de $Q^{-1}BQ$ sont égaux. Considérons la matrice diagonale par blocs

$$R = \begin{pmatrix} I_{k-1} & & (0) \\ & Q & \\ (0) & & I_{n-k-1} \end{pmatrix}.$$

La matrice R est orthogonale et les coefficients diagonaux de $R^{-1}MR$ sont ceux de M sauf pour les indices k et $k+1$ où ces coefficients sont égaux. On a donc $\delta(R^{-1}MR) < \delta(M)$ soit encore $\varphi(PR) < \varphi(P)$ avec $PR \in O_n(\mathbb{R})$. C'est absurde.

Exercice 20 : [énoncé]

Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de F et posons u sa limite.

On peut écrire $u_n = \lambda_n \cdot x_n$ avec $x_n \in K$ et $\lambda_n \geq 0$.

$0 \notin K$ donc

$$\exists \alpha > 0, B(0, \alpha) \subset C_E K$$

$\|u_n\| \rightarrow \|u\|$ et $\alpha \leq \|x_n\| \leq M$ donc (λ_n) est bornée.

Par double extraction $(x_{\varphi(n)})$ et $(\lambda_{\varphi(n)})$ convergent vers $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On a alors $u = \lambda \cdot x$.

Exercice 21 : [énoncé]

Soient $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ et $(y_n) \in L^{\mathbb{N}}$ telles que

$$d(K, L) = \inf_{(x,y) \in K \times L} d(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n).$$

On peut extraire de (x_n) une suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ et on peut extraire de $(y_{\varphi(n)})$ une suite convergente $(y_{\varphi(\psi(n))})$.

Pour $x = \lim x_{\varphi(n)} \in K$ et $y = \lim y_{\varphi(\psi(n))} \in L$ on a

$$d(K, L) = d(x, y) > 0$$

car $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 22 : [énoncé]

L'application $x \mapsto d(x, L) = \inf_{y \in L} \|y - x\|$ est une fonction réelle continue sur le compact K donc admet un minimum en un certain $a \in K$. Or $y \mapsto \|y - a\|$ est une fonction réelle continue sur le compact L donc admet un minimum en un certain $b \in L$. Ainsi

$$d(K, L) = \inf_{x \in K} \inf_{y \in L} \|y - x\| = \inf_{y \in L} \|y - a\| = \|b - a\| > 0$$

car $a \neq b$ puisque $K \cap L = \emptyset$.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Posons $d = d(x, F)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x_n \in F, \|x - x_n\| \leq d + \frac{1}{n}.$$

Cela permet de définir une (x_n) bornée, elle admet donc une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)})$ dont on note \bar{x} la limite. On a $\bar{x} \in F$ car F est une partie fermée et puisque $\|x - x_n\| \rightarrow d$ on obtient $\|x - \bar{x}\| = d$.

(b) Non, prendre $x = 0$ et F l'hypersphère unité.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) Soit $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de Γ_f . On suppose que la suite $((x_n, y_n))_{n \geq 0}$ converge vers (x_∞, y_∞) . Puisque $y_n = f(x_n)$, on obtient à la limite $y_\infty = f(x_\infty)$ car f est continue.

La partie Γ_f est alors fermée en vertu de la caractérisation séquentielle des parties fermées.

(b) Soit $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite de limite $a \in \mathbb{R}$ et $(y_n) = (f(x_n))$ son image. Soit b une valeur d'adhérence de (y_n) . Il existe $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$y_{\varphi(n)} \rightarrow b.$$

On a alors

$$(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \rightarrow (a, b).$$

Or il s'agit d'une suite d'éléments du graphe Γ_f qui est supposé fermé. On en déduit $(a, b) \in \Gamma_f$ et donc $b = f(a)$.

Ainsi, la suite (y_n) ne possède qu'une seule valeur d'adhérence. Or elle évolue dans un compact car bornée en dimension finie et donc, si elle ne possède qu'une valeur d'adhérence, elle converge vers celle-ci.

Par la caractérisation séquentielle, on peut conclure que f est continue en a .

(c) Non, on obtient un contre-exemple avec la fonction donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction est fermée car réunion de deux fermés

$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(0, 0)\}$$

mais cette fonction n'est pas continue.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Soit $a \in E$. Puisque la partie A est bornée et non vide, l'ensemble $\{\|x - a\| \mid x \in A\}$ est une partie non vide et majorée de \mathbb{R} ce qui permet d'introduire

$$R_a = \sup_{x \in A} \{\|x - a\| \mid x \in A\}.$$

Il est immédiat que $A \subset \overline{B}(a, R_a)$ et que R_a est le rayon minimal d'une boule fermée de centre a contenant la partie A .

L'ensemble $\{R_a \mid a \in E\}$ est une partie non vide et minorée de \mathbb{R} , on peut donc introduire

$$R = \inf\{R_a \mid a \in E\}.$$

Par la caractérisation séquentielle des bornes inférieures, il existe une suite (a_n) d'éléments de E telle que

$$R_{a_n} \rightarrow R.$$

Soit $x_0 \in A$. Puisque $A \subset \overline{B}(a_n, R_{a_n})$, on a

$$\|x_0 - a_n\| \leq R_{a_n}$$

et donc

$$\|a_n\| \leq \|x_0\| + \|x_0 - a_n\| \leq \|x_0\| + R_{a_n} \rightarrow \|x_0\| + R$$

ce qui permet d'affirmer que la suite (a_n) est bornée. Puisque $\dim E < +\infty$, on peut extraire de (a_n) une suite convergente $(a_{\varphi(n)})$ dont on notera a la limite.

Soit $x \in A$. Puisque

$$\|x - a_n\| \leq R_{a_n}$$

on obtient à la limite

$$\|x - a\| \leq R$$

et donc $A \subset \overline{B}(a, R)$.

Enfin, par construction, $\overline{B}(a, R)$ est une boule de rayon minimal contenant la partie A (en s'autorisant de parler de boule fermée de rayon nul dans le cas où $R = 0$).

(b) On suppose ici l'espace E euclidien.

Supposons $\overline{B}(a, R)$ et $\overline{B}(a', R)$ solutions et montrons $a = a'$.

Posons

$$b = \frac{1}{2}(a + a').$$

En vertu de l'identité du parallélogramme

$$\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}(\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2)$$

appliquée à

$$\alpha = x - b \text{ et } \beta = \frac{a - a'}{2}$$

on obtient pour tout $x \in A$

$$\|x - b\|^2 + \|\beta\|^2 = \frac{1}{2}(\|x - a\|^2 + \|x - a'\|^2) \leq R^2$$

et donc

$$\|x - b\| \leq \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}.$$

Ainsi

$$R_b \leq \sqrt{R^2 - \|\beta\|^2}.$$

Or par définition de R , on a aussi $R_b \geq R$ et donc on peut affirmer $\|\beta\| = 0$ i.e. $a = a'$.

Exercice 26 : [énoncé]

- (a) Soit (u_n) une suite convergente d'éléments de F' de limite u_∞ .
Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que

$$\|u_n - x_n\| \leq 1.$$

Puisque la suite (u_n) converge, elle est bornée et donc la suite (x_n) l'est aussi. Puisque l'espace E est de dimension finie, on peut extraire une suite convergente de la suite (x_n) . Notons-la $(x_{\varphi(n)})$. La limite x_∞ de cette suite extraite appartient à F car F est une partie fermée.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\|u_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}\| \leq 1$$

donc à la limite

$$\|u_\infty - x_\infty\| \leq 1$$

et donc $u_\infty \in F'$.

Ainsi la partie F' est fermée.

- (b) Supposons $E = \mathbb{K}[X]$ muni de la norme

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| \text{ avec } P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k.$$

Posons

$$F = \left\{ \frac{n+1}{n} X^n \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$P_n = \frac{1}{n} X^n = \frac{n+1}{n} X^n - X^n \in F'$$

et

$$P_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0 \notin F'$$

donc la partie F' n'est pas fermée.

Exercice 27 : [énoncé]

Soit (y_n) une suite convergente d'éléments de $f(F)$ de limite y_∞ . On veut établir que $y_\infty \in f(F)$. Si y_∞ est l'un des éléments de la suite (y_n) l'affaire est entendue. Sans perte de généralité, on peut supposer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n \neq y_\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in F$ tel que $y_n = f(x_n)$. L'ensemble $K = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{y_\infty\}$ est un compact de E_2 donc $f^{-1}(K)$ est un compact de E_1 . La suite (x_n) apparaît comme étant une suite d'éléments du compact $f^{-1}(K)$, on peut donc en extraire une suite convergeant dans la partie $x_{\varphi(n)} \rightarrow x_\infty \in f^{-1}(K)$. De plus $(x_{\varphi(n)})$ étant une suite d'éléments du fermé F , on peut affirmer $x_\infty \in F$. On va maintenant établir $y_\infty = f(x_\infty)$ ce qui permettra de conclure. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons $K_N = \{y_n \mid n \geq N\} \cup \{y_\infty\}$. K_N est un compact, $f^{-1}(K_N)$ est donc fermé et par suite $x_\infty \in f^{-1}(K_N)$. Ainsi,

$$x_\infty \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} f^{-1}(K_N) = f^{-1} \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N \right). \text{ Or } \bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N = \{y_\infty\} \text{ donc}$$

$$f(x_\infty) = y_\infty.$$

Exercice 28 : [énoncé]

- (a) Si E est de dimension finie alors F est fermé car tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé. On en déduit $F = \overline{F}$.
- (b) Il suffit de considérer un sous-espace vectoriel dense comme par exemple l'espace des fonctions polynômes de $[a; b]$ vers \mathbb{K} dense dans celui des fonctions continues de $[a; b]$ vers \mathbb{K} normé par $\|\cdot\|_\infty$.