Compléments sur les séries numériques

Nature de séries numériques

Exercice 1 [02432] [Correction]

(a) Étudier $\sum u_n$ où $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$.

(b) Étudier $\sum v_n$ où $v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$.

Exercice 2 [03881] [Correction]
Pour $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

Exercice 3 [01040] [Correction]
Donner la nature de la série des $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 [01064] [Correction]
Montrer la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\bigl(\ln(1)\bigr)^2 + \bigl(\ln(2)\bigr)^2 + \dots + \bigl(\ln(n)\bigr)^2}.$$

Exercice 5 [01066] [Correction]
Pour $\alpha > 1$, on pose

$$S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \text{ et } R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{R_n}{S_n}$ selon la valeur du réel α.

Exercice 6 [02430] [Correction]
On note $u_n = \int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \,\mathrm{d}t$.

(a) Déterminer la limite de u_n.

(b) Trouver une relation de récurrence entre u_n et u_{n+2}.

(c) Donner la nature de la série de terme général $(-1)^n u_n$.

(d) Discuter suivant $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de la série de terme général u_n/n^α.

Nature de séries de signe non constant

Exercice 7 [01034] [Correction]
Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

(a) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

(b) $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

(c) $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

(d) $u_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$

Exercice 8 [01035] [Correction]
Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Exercice 9 [01039] [Correction]
Déterminer la nature de

$$\sum_{n\geq 1} \sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right).$$

Exercice 10 [03772] [Correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \cos\left(n^2\pi \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right).$$

Exercice 11 [01045] [Correction]
Déterminer la nature de la série de terme général :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} + (-1)^{n-1}}.$$

Exercice 12 [02351] [Correction]
Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

(a) $u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$ (b) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n+(-1)^n)}$ (c) $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)+(-1)^n}$

Exercice 13 [02793] [Correction]
Convergence de la série de terme général $u_n = \sin\bigl(\pi\sqrt{n^2+1}\bigr)$.

Exercice 14 [01335] [Correction]
Étudier la série de terme général

$$u_n = (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}.$$

Exercice 15 [01337] [Correction]
Quelle est la nature de la série de terme général

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}?$$

Exercice 16 [03208] [Correction]
α désigne un réel strictement positif.
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \frac{\sqrt{|x|}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 17 [05040] [Correction]
Déterminer la nature des séries qui suivent :

(a) $\sum \frac{n^n}{\mathrm{e}^n \cdot n!}$ (b) $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ (c) $\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

Convergence de séries à termes positifs

Emploi du critère spécial

Exercice 18 [01038] [Correction]

(a) Justifier l'existence, pour $n \in \mathbb{N}$ de

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

(b) Montrer que

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

(c) Déterminer un équivalent de R_n.

(d) Donner la nature de la série de terme général R_n.

Exercice 19 [01036] [Correction]
Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!}$$

est un réel négatif.

Exercice 20 [01037] [Correction]
On rappelle la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

En observant

$$I = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin t}{n\pi + t}\,\mathrm{d}t$$

déterminer le signe de I.

Exercice 21 [04131] [Correction]
On pose

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \text{ et } u_n = \ln\bigl(e^{s_n} - 1\bigr).$$

(a) Énoncer le théorème des séries spéciales alternées, en faire la preuve.

(b) Prouver que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ convergent.

(c) Étudier la nature de $\sum u_n$.

Exercice 22 [05035] [Correction]
Déterminer les natures des séries

(a) $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$ (b) $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \ln(n) \rfloor}}{n}$

Nature de séries dépendant d'un paramètre

Exercice 23 [01065] [Correction]
Déterminer la nature de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{n^\alpha} \text{ (avec } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Même question avec la série de terme général $(-1)^n u_n$.

Exercice 24 [01087] [Correction]
Soit $\alpha > 0$. Préciser la nature de la série $\sum_{n\geq 2} u_n$ avec

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}.$$

Exercice 25 [02515] [Correction]
Étudier la nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \sin \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$$

pour $\alpha > 0$.

Exercice 26 [02790] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)$$

où $a > 0$.

Exercice 27 [02791] [Correction]
Nature de la série de terme général

$$u_n = \ln\left(\frac{\sqrt{n} + (-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$$

où $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 28 [02802] [Correction]
Soient $(a, \alpha) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = a^{\sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha}.$$

(a) Pour quels couples (a, α) la suite (u_n) est-elle convergente ? Dans la suite, on suppose que tel est le cas, on note $\ell = \lim u_n$ et on pose, si $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = u_n - \ell.$$

(b) Nature des séries de termes généraux v_n et $(-1)^n v_n$.

Exercice 29 [03429] [Correction]
Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la nature des séries de termes généraux

$$v_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha} \text{ et } w_n = (-1)^n \binom{n+p}{p}^{-\alpha}.$$

Exercice 30 [03704] [Correction]

(a) En posant $x = \tan t$, montrer

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Donner en fonction de $\alpha > 0$ la nature de la série

$$\sum \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+(n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

(c) Même question pour

$$\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

(d) Donner la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^\alpha \sin^2(t)}.$$

Exercice 31 [02423] [Correction]
On pose

$$u_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{(p+1)^\alpha} \text{ et } v_n = \sum_{p=n}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}.$$

(a) Déterminer la nature de la série de terme général u_n selon α.
(b) Déterminer la nature de la série de terme général v_n selon α.

Transformation d'Abel

Exercice 32 [01043] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\Sigma_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k \text{ et } S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k}.$$

(a) Montrer que $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ est bornée.
(b) En déduire que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge.

Exercice 33 [02352] [Correction]
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ non multiple de 2π. On pose

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \text{ et } u_n = \frac{\cos(n\theta)}{n}.$$

(a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
(b) En observant que $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, établir que la série de terme général u_n converge.
(c) En exploitant l'inégalité $|\cos x| \geq \cos^2 x$, établir que la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 34 [01041] [Correction]
Soient (a_n) une suite positive décroissante de limite nulle et (S_n) une suite bornée.
(a) Montrer que la série $\sum(a_n - a_{n+1})S_n$ est convergente.
(b) En déduire que la série $\sum a_n(S_n - S_{n-1})$ est convergente.
(c) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la série $\sum \frac{\cos(nx)}{n}$ est convergente.

Exercice 35 [02582] [Correction]
(a) Montrer l'existence, pour $\theta \in \left]0\,;\pi\right[$, d'un majorant M_θ de la valeur absolue de

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \cos(k\theta).$$

(b) Montrer que $x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
(c) En remarquant de $\cos(n\theta) = S_n - S_{n-1}$, étudier la convergence de la série de terme général

$$u_n = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(n\theta).$$

(d) En utilisant $\left|\cos(k\theta)\right| \geq \cos^2(k\theta)$, étudier la convergence de $\sum|u_n|$.

Exercice 36 [01042] [Correction]
Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente. Établir la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z_n}{n}.$$

Exercice 37 [03685] [Correction]
Soit (a_n) une suite complexe. On suppose que la série $\sum \frac{a_n}{n}$ diverge.
Établir que pour tout $\alpha \in \left]-\infty\,;1\right]$, la série $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ diverge aussi.

Exercice 38 [01028] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de réels strictement positifs.

(a) On suppose que $\sum u_n$ converge. Montrer que la série de terme général $v_n = n(u_n - u_{n+1})$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

(b) Réciproquement, on suppose que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge. Montrer que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, la suite (u_n) converge vers 0.

(c) Donner un exemple de suite (u_n) qui ne converge pas vers 0, alors que la série de terme général $n(u_n - u_{n+1})$ converge.

Exercice 39 [03879] [Correction]
On donne une suite réelle (a_n).
On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

Calcul de somme

Exercice 40 [03895] [Correction]
Existence et valeur de

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right).$$

Exercice 41 [02806] [Correction]
Nature et calcul de la somme de la série de terme général

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Exercice 42 [01053] [Correction]
On pose

$$u_n = \int_0^1 x^n \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et que sa somme vaut

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 43 [02803] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1}.$$

Calcul de somme par dérivation ou intégration

Exercice 44 [01052] [Correction]
Soit $\alpha > 0$. Montrer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} = \int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 45 [01051] [Correction]
Soit $x \in \left]-1\,;1\right[$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k x^k.$$

Exercice 46 [02805] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}.$$

Exercice 47 [01338] [Correction]
Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(4n+1)(4n+3)}.$$

Étude de séries à termes positifs

Comparaison séries intégrales

Exercice 48 [02434] [Correction]
Soit, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{\cos(x^{1/3})}{x^{2/3}}.$$

(a) Nature la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - f(n).$$

(b) Nature de la série de terme général $f(n)$.
On pourra montrer que $\sin(n^{1/3})$ *n'admet pas de limite quand* $n \to +\infty$.

(c) Nature de la série de terme général

$$\frac{\sin(n^{1/3})}{n^{2/3}}.$$

Exercice 49 [02810] [Correction]
On pose $f(x) = \frac{\sin(\ln x)}{x}$ pour tout $x \geq 1$ et $u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ pour tout entier $n \geq 2$.

(a) Montrer que f' est intégrable sur $[1\,;+\infty[$.

(b) Montrer que la série de terme général u_n est absolument convergente.

(c) Montrer que la suite $(\cos(\ln n))$ diverge.

(d) En déduire la nature de la série de terme général $f(n)$.

Exercice 50 [03045] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : x \in \left]n\,;+\infty\right[\to \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}.$$

Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n tel que $f_n(x_n) = a$.
Déterminer un équivalent de x_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 51 [03086] [Correction]
Étudier

$$\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right).$$

Exercice 52 [04069] [Correction]
Soit $f : [0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et croissante.
Établir que les objets suivants ont même nature

$$\int_0^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t, \sum f\left(\mathrm{e}^{-n}\right) \text{ et } \sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 53 [05038] [Correction]
Soit $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Montrer que les séries

$$\sum f'(n) \quad \text{et} \quad \sum \frac{f'(n)}{f(n)}$$

ont même nature.

Exercice 54 [05039] [Correction]
Soit $f : [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la dérivée est décroissante et de limite nulle.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Établir

$$0 \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\big(f(k) + f(k+1)\big) \leq \frac{1}{8}\big(f'(k) - f'(k+1)\big).$$

(b) En déduire que [1]

$$S_n = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t - \left(\frac{1}{2}f(1) + f(2) + \cdots + f(n-1) + \frac{1}{2}f(n)\right)$$

admet une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

1. S_n compare une intégrale à l'approximation de celle-ci obtenue par la méthode des trapèzes.

(c) *Application:* On considère la fonction $f\colon x\mapsto -\ln(x)$. Établir [2] la convergence de la suite de terme général

$$\sigma_n=\ln(n!\,)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)+n.$$

Exercice 55 [05042] [Correction]
Soit $f\colon [1\,;+\infty[\to\mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $M\in\mathbb{R}_+$ vérifiant [3], pour tout $x\geq 1$,

$$\int_1^x \left|f'(t)\right|\,\mathrm{d}t\leq M.$$

(a) Montrer

$$\sum f(n)\text{ converge}\iff\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)\text{ converge.}$$

(b) *Application:* Déterminer la nature de la série

$$\sum\frac{\sin\bigl(\ln(n)\bigr)}{n}.$$

Comportement asymptotique de sommes

Exercice 56 [01089] [Correction]
On pose

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+\sqrt{k}}.$$

(a) Donner un équivalent simple de S_n.

(b) Montrer que

$$S_n\underset{n\to+\infty}{=}\ln n+C+\mathrm{o}(1).$$

Exercice 57 [01090] [Correction]
On pose

$$S_n=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}.$$

(a) Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ converge vers une constante C.

(b) Établir que

$$S_n\underset{n\to+\infty}{=}C-\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 58 [03179] [Correction]

(a) Sous réserve d'existence, déterminer pour $\alpha\geq 1$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}.$$

(b) Sous réserve d'existence, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

Exercice 59 [01091] [Correction]
On pose

$$u_n=\prod_{k=1}^n\frac{3k-1}{3k}.$$

(a) Montrer qu'il existe des constantes α et β telles que

$$\ln u_n=\alpha\ln n+\beta+\mathrm{o}(1).$$

En déduire un équivalent de u_n.

(b) Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1}u_n$.

Exercice 60 [03882] [Correction]
Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\prod_{k=1}^n(3k-1)^{1/n}.$$

Exercice 61 [01092] [Correction]
Déterminer un équivalent simple de :

2. Pour résoudre cette question, on ne s'autorise pas l'emploi de la formule de Stirling.

3. Au chapitre suivant, on dira simplement que f' est intégrable sur $[1\,;+\infty[$. On peut noter que cette hypothèse est satisfaite lorsque f est monotone et admet une limite finie en $+\infty$.

(a) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(nk+1)}$

(b) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(n+k)}$

Exercice 62 [03226] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose
$$n_p = \min\{n \in \mathbb{N} \mid H_n \geq p\}.$$
Déterminer un équivalent de n_p quand $p \to +\infty$

Exercice 63 [01325] [Correction]
Soit $j \in \mathbb{N}$. On note Φ_j le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ vérifiant
$$\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \geq j.$$

(a) Justifier la définition de Φ_j.

(b) Démontrer que $\Phi_j \xrightarrow[j\to+\infty]{} +\infty$.

(c) Démontrer $\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \mathrm{e}$.

Exercice 64 [02950] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$.
On pose
$$v_n = \frac{1}{nu_n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \text{ et } w_n = \frac{1}{n^2 u_n}\left(\sum_{k=1}^{n} ku_k\right).$$
On suppose que (v_n) tend vers $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Étudier la convergence de (w_n).

Emploi de la constante d'Euler

Exercice 65 [01055] [Correction]
Justifier et calculer
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)}.$$

Exercice 66 [02354] [Correction]
Existence et calcul de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 67 [01046] [Correction]
Existence et calcul de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 68 [01054] [Correction]
On rappelle l'existence d'une constante γ telle qu'on ait
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

(a) Calculer la somme de la série de terme général $u_n = (-1)^{n-1}/n$.

(b) Même question avec $u_n = 1/n$ si $n \neq 0$ [3] et $u_n = -2/n$ sinon.

Exercice 69 [02804] [Correction]
Convergence puis calcul de
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}.$$

Exercice 70 [02964] [Correction]
Calculer
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{3}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} + \frac{1}{4n+4}\right).$$

Exercice 71 [01056] [Correction]

(a) Donner un développement asymptotique à deux termes de
$$u_n = \sum_{p=2}^{n} \frac{\ln p}{p}.$$
On pourra introduire la fonction $f : t \mapsto (\ln t)/t$.

(b) À l'aide de la constante d'Euler, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 72 [04171] [Correction]

(a) Soit (u_n) une suite telle que $u_n = \mathrm{O}(1/n^2)$. Que dire de $\sum_{k=n}^{+\infty} u_k$?

(b) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)$$

avec γ une constante réelle qu'on ne cherchera pas à calculer.

On pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\left\lfloor\frac{\ln n}{\ln 2}\right\rfloor.$$

(c) Convergence et somme de $\sum_{n\geq 2} u_n$.

Exercice 73 [01077] [Correction]

Étudier la limite de

$$u_n = \int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u + \ln n.$$

Théorème de Cesaro

Exercice 74 [00307] [Correction]

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On désire établir que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ de terme général

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

converge aussi vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$ entraîne

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon/2.$$

(b) Établir que pour tout entier $n > n_0$ on a :

$$|v_n - \ell| \leq \frac{|u_1 - \ell| + \cdots + |u_{n_0} - \ell|}{n} + \frac{n - n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

(c) En déduire qu'il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n > n_1$ entraîne

$$|v_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

(d) *Application:* Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to \alpha \neq 0$. Donner un équivalent simple de u_n.

Exercice 75 [00308] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle.

(a) On suppose que (u_n) converge vers ℓ et on considère

$$v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n^2}.$$

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

(b) On suppose

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{n} \to \ell.$$

Déterminer

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{n^2}.$$

Exercice 76 [00309] [Correction]

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs.

On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \ell \in \left]0\,;+\infty\right[.$$

Montrer

$$\sqrt[n]{u_n} \to \ell.$$

Exercice 77 [03219] [Correction]

La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n).$$

(a) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$

(b) Déterminer la limite de

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}.$$

(c) En déduire un équivalent de $(u_n)_{n\geq 0}$

Séries dont le terme général est défini par récurrence

Exercice 78 [03371] [Correction]

(a) Déterminer la limite de la suite définie par

$$u_0 \geq 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

(b) Déterminer la limite de la suite définie par

$$v_n = nu_n.$$

(c) Donner la nature de la série $\sum u_n$ et celle de la série $\sum (-1)^n u_n$

Exercice 79 [03012] [Correction]

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est définie par $a_0 \in \left]0\,;\pi/2\right[$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sin(a_n).$$

Quelle est la nature de la série de terme général a_n ?

Exercice 80 [02961] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$,

$$u_n = \ln(1 + u_{n-1}).$$

Étudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n.

Exercice 81 [02440] [Correction]

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et pour $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n}.$$

(a) Étudier la convergence de la suite (a_n).

(b) Déterminer la nature de la série de terme général $(-1)^n a_n$.

(c) Déterminer la nature de la série de terme général a_n^2.

(d) Déterminer la nature de la série de terme général a_n à l'aide de la série

$$\sum \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Exercice 82 [02951] [Correction]

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 \in [0\,;1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

(a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?

(b) Même question lorsque u_n est définie par la récurrence $u_{n+1} = u_n - u_n^{1+\alpha}$ (avec $\alpha > 0$).

Exercice 83 [02960] [Correction]

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \left]0\,;1\right]$ et que, pour un certain $\beta > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}^\beta = \sin u_n^\beta.$$

Étudier la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 84 [02433] [Correction]

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$u_1 > 0 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^\alpha u_n}.$$

(a) Condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.

(b) Equivalent de u_n dans le cas où (u_n) diverge.

(c) Equivalent de $(u_n - \ell)$ dans le cas où (u_n) converge vers ℓ.

Application à l'étude de suites

Exercice 85 [02418] [Correction]

Former un développement asymptotique à trois termes de la suite (u_n) définie par

$$u_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = (n + u_n^{n-1})^{1/n}.$$

Exercice 86 [03057] [Correction]

On note $(z_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général

$$z_n = 2n \exp\left(\frac{\mathrm{i}t}{\sqrt{n}}\right).$$

Étudier

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2n-1}{z_n-1}\frac{2n-2}{z_n-2}\cdots\frac{2n-n}{z_n-n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\prod_{k=1}^{n}\frac{2n-k}{z_n-k}\right|.$$

Étude théorique

Exercice 87 [01033] [Correction]
Montrer que la somme d'une série semi-convergente et d'une série absolument convergente n'est que semi-convergente.

Exercice 88 [02962] [Correction]
Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 89 [03097] [Correction]
On dit que la série de terme général u_n enveloppe le réel A si, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \neq 0 \text{ et } \left|A-(u_0+u_1+\dots+u_n)\right| \leq |u_{n+1}|.$$

On dit qu'elle enveloppe strictement le réel A s'il existe une suite $(\theta_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $]0\,;1[$ telle que pour tout entier naturel n :

$$A-(u_0+u_1+\dots+u_n)=\theta_{n+1}u_{n+1}.$$

(a) Donner un exemple de série divergente qui enveloppe $A>0$.
Donner un exemple de série convergente qui enveloppe un réel.
Donner un exemple de série convergente qui n'enveloppe aucun réel.

(b) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe strictement A, alors elle est alternée.
Démontrer que A est alors compris entre deux sommes partielles consécutives.

(c) Démontrer que, si la série de terme général u_n est alternée et que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$
$A-(u_0+u_1+\dots+u_n)$ est du signe de u_{n+1}, alors, elle enveloppe strictement A.

(d) Démontrer que, si la série de terme général u_n enveloppe A et si la suite de terme général $|u_n|$ est strictement décroissante, alors, la série est alternée et encadre strictement A.

Exercice 90 [03207] [Correction]
Soit E l'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$u_{n+2}=(n+1)u_{n+1}+u_n.$$

(a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension 2.

(b) Soient a et b deux éléments de E déterminés par

$$\begin{cases} a_0=1\\ a_1=0\end{cases} \text{ et } \begin{cases} b_0=0\\ b_1=1.\end{cases}$$

Montrer que les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$.

(c) Calculer

$$w_n=a_{n+1}b_n-a_nb_{n+1}.$$

(d) On pose $c_n=a_n/b_n$ lorsque l'entier n est supérieur ou égal à 1. Démontrer l'existence de

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}c_n.$$

(e) Démontrer l'existence d'un unique réel r tel que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+rb_n)=0.$$

Exercice 91 [03917] [Correction]
Soit $e=(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante à termes strictement positifs telle que la série $\sum e_n$ converge.
On pose

$$s=\sum_{n=0}^{+\infty}e_n \text{ et } r_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}e_k \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$

On introduit

$$G=\left\{\sum_{n=0}^{+\infty}d_ne_n \;\middle|\; (d_n)\in\{-1,1\}^{\mathbb{N}}\right\}.$$

On dit que la suite e est une base discrète lorsque G est un intervalle.

(a) Montrer que G est bien défini. Déterminer son maximum et son minimum.

(b) On suppose dans cette question que (e_n) est une base discrète. Montrer que $e_n\leq r_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(c) On suppose que $e_n\leq r_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Soit $t\in[-s\,;s]$. On définit la suite (t_n) par

$$t_0=0 \text{ et } t_{n+1}=\begin{cases} t_n+e_n & \text{si } t_n\leq t\\ t_n-e_n & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que

$$|t-t_n|\leq e_n+r_n$$

et conclure.

(d) Dans cette question, on suppose $e_n = 1/2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer G. Quelles suites (d_n) permettent d'obtenir respectivement $0, 1, 1/2, 2$ et $1/3$?
Pour $x \in G$, y a-t-il une unique suite $(d_n) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \,?.$$

Condensation

Exercice 92 [02796] [Correction]
Soit (u_n) une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = 2^n u_{2^n}.$$

Déterminer la nature de $\sum v_n$ en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 93 [03676] [Correction]

(a) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geq 2$.
On pose

$$v_n = p^n u_{p^n}.$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge.}$$

(b) *Application:* Étudier la convergence des séries

$$\sum \frac{1}{n \ln n} \text{ et } \sum \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

Exercice 94 [03677] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et positive. On pose

$$v_n = n u_{n^2}.$$

Montrer que

$$\sum u_n \text{ converge si, et seulement si, } \sum v_n \text{ converge.}$$

Exercice 95 [02797] [Correction]
Soit (u_n) une suite décroissante d'éléments de $\mathbb{R}_+$, de limite 0. Pour $n \geq 1$, on pose

$$v_n = n^2 u_{n^2}.$$

Y a-t-il un lien entre la convergence des séries de termes généraux u_n et v_n ?

Produits numériques

Exercice 96 [05043] [Correction]
Soit q un réel tel que $|q| < 1$. Établir l'identité

$$\prod_{k=1}^{+\infty}(1+q^k) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{+\infty}(1-q^{2k-1})}$$

où les produits infinis correspondent aux limites quand n tend vers $+\infty$ des produits pour k allant de 1 à n.

Exercice 97 [05044] [Correction]
Soit (a_n) une suite de réels tous différents de -1 telle que la série $\sum a_n$ converge.
On pose

$$P_n = \prod_{k=0}^{n}(1+a_k) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que la suite (P_n) admet une limite finie et que celle-ci est non nulle si, et seulement si, la série de terme général a_n^2 converge.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) L'intégrale définissant u_n est bien définie car elle porte sur une fonction sur le segment $[0\,;1]$. On peut aussi la comprendre comme une intégrale généralisée convergente sur $[0\,;1[$

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n}$$

et par sommation géométrique

$$\int_{[0;1[} \frac{\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_{[0;1[} \frac{1-x}{1-x^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$f_n(x) = \frac{1-x}{1-x^{n+1}}.$$

Sur $[0\,;1[$, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f\colon x \mapsto 1-x$.
Les fonctions f_n et f sont continues par morceaux et

$$\left|\frac{1-x}{1-x^{n+1}}\right| \le \frac{1-x}{1-x} = 1 = \varphi(x)$$

avec φ intégrable. Par convergence dominée

$$u_n \to \int_0^1 (1-x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

(b) On amorce les calculs comme au dessus pour écrire

$$v_n = \int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x+\dots+x^n} = \int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,\mathrm{d}x.$$

Par intégration par parties généralisée justifiée par deux convergences

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1-x^{n+1}}(1-x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{n+1}\ln(1-x^{n+1})(1-x)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\,\mathrm{d}x$$

Le terme entre crochet est nul (il suffit d'écrire $x = 1-h$ avec $h \to 0$, pour étudier la limite en 1)

Il reste

$$v_n = -\frac{1}{n+1}\int_0^1 \ln(1-x^{n+1})\,\mathrm{d}x.$$

Par développement en série entière de la fonction $u \mapsto -\ln(1-u)$

$$v_n = \int_0^1 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} x^{(n+1)k}\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$g_k(x) = \frac{1}{k} x^{(n+1)k}.$$

La série de fonctions $\sum g_k$ converge simplement sur $[0\,;1[$ en vertu de la décomposition en série entière précédente.
Les fonctions g_k et la fonction somme $\sum_{k=0}^{+\infty} g_k\colon x \mapsto -\ln(1-x^{n+1})$ sont continues par morceaux.
Enfin, les fonctions g_k sont intégrables sur $[0\,;1[$ et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^1 \left|\frac{1}{k} x^{(n+1)k}\right|\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} < +\infty.$$

On peut donc intégrer terme à terme pour écrire
donc

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}\int_0^1 x^{(n+1)k}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k((n+1)k+1)} \le \frac{1}{(n+1)}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

puis finalement

$$v_n \le \frac{C}{(n+1)^2}.$$

La série à termes positifs $\sum v_n$ est donc convergente.

Exercice 2 : [énoncé]

On sait

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

et donc

$$a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} = \mathrm{e}^{\ln a \ln n + \gamma \ln a + \mathrm{o}(1)} \sim \frac{\mathrm{e}^{\gamma \ln a}}{n^{-\ln a}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs

$$\sum_{n\geq 1} a^{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \text{ converge } \iff -\ln a > 1$$

ce qui fournit la condition $a < \mathrm{e}^{-1}$.

Exercice 3 : [énoncé]

On peut écrire

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{j^{3n+3}}{\sqrt{3n+3}} \underset{n\to+\infty}{=} \frac{j^{3n+1}(1+j+j^2)}{\sqrt{3n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc la série des termes

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}} + \frac{j^{3n+3}}{\sqrt{3n+3}}$$

est absolument convergente. Ainsi, il y a convergence des sommes partielles

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{j^k}{\sqrt{k}}.$$

Puisque, les termes

$$\frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}, \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}$$

sont de limite nulle, on a aussi convergence des sommes partielles

$$S_{3n+1} = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{j^k}{\sqrt{k}} = S_{3n} + \frac{j^{3n+1}}{\sqrt{3n+1}}$$

$$S_{3n+1} = \sum_{k=1}^{3n+1} \frac{j^k}{\sqrt{k}} = S_{3n+1} + \frac{j^{3n+2}}{\sqrt{3n+2}}.$$

Les trois suites extraites (S_{3n}), (S_{3n+1}) et (S_{3n+2}) convergeant vers une même limite, on peut affirmer que la série $\frac{j^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.

Exercice 4 : [énoncé]

Par comparaison série-intégrale, on majore u_n par le terme général d'une série convergente.

La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est continue et croissante donc

$$\int_{k-1}^{k} \bigl(\ln(t)\bigr)^2 \,\mathrm{d}t \leq \bigl(\ln(k)\bigr)^2 \quad \text{pour tout } k \geq 2$$

En sommant pour k allant de 2 à n, on obtient

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \bigl(\ln(t)\bigr)^2 \,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=2}^{n} \bigl(\ln(k)\bigr)^2 = \sum_{k=1}^{n} \bigl(\ln(k)\bigr)^2 \quad \text{pour tout } n \geq 2$$

et donc

$$\int_{1}^{n} \bigl(\ln(t)\bigr)^2 \,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \bigl(\ln(k)\bigr)^2$$

On calcule l'intégrale par intégrations par parties

$$\begin{aligned}\int_1^n \bigl(\ln(t)\bigr)^2 \,\mathrm{d}t &= \Bigl[t\bigl(\ln(t)\bigr)^2\Bigr]_1^n - \int_1^n 2\ln(t)\,\mathrm{d}t \\ &= n\bigl(\ln(n)\bigr)^2 - \Bigl[2t\ln(t)\Bigr]_1^n + \int_1^n 2\,\mathrm{d}t \\ &= n\bigl(\ln(n)\bigr)^2 - 2n\ln(n) + 2n - 2\end{aligned}$$

Par passage à l'inverse, on obtient alors

$$u_n \leq \frac{1}{n\bigl(\ln(n)\bigr)^2 - 2n\ln(n) + 2n - 2} = v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\bigl(\ln(n)\bigr)^2}$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général v_n converge [4] et, par comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général u_n converge aussi.

Exercice 5 : [énoncé]

Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante

$$\int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

4. Voir sujet 20171101. Notons que l'on peut par encadrement établir aussi que u_n équivaut à $1/n\bigl(\ln(n)\bigr)^2$.

donc

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} \le R_N \le \int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

d'où l'on obtient :

$$R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

puis

$$\frac{R_n}{S_n} \sim \frac{1}{(\alpha-1)S_\infty n^{\alpha-1}}.$$

La série $\sum_{n\ge1} \frac{R_n}{S_n}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Par convergence dominée par la fonction $\varphi\colon t \mapsto 1$, on obtient $u_n \to 0$.

(b)

$$u_n + u_{n+2} = \int_0^{\pi/4} (\tan t)'(\tan t)^n \,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}.$$

(c) On vérifie aisément $u_n \to 0^+$ et $u_{n+1} \le u_n$. Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum(-1)^n u_n$ converge.

(d) Par monotonie

$$u_n + u_{n+2} \le 2u_n \le u_n + u_{n-2}.$$

On en déduit $u_n \sim \frac{1}{2n}$ puis par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{u_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 0$.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) $|u_n| \sim 1/n^2$ donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

(b) On applique le critère spécial et on conclut que $\sum u_n$ converge.

(c) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+1} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et on peut conclure que $\sum u_n$ converge.

(d)

$$u_n = \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{(-1)^{n+1}.3\pi}{8n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 : [énoncé]

Il s'agit d'une série alternée.

$$\ln \sqrt[n]{n!} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln k$$

et ainsi $\ln \sqrt[n]{n!}$ est la moyenne arithmétique de $\ln 1, \ln 2, \dots, \ln n$ et donc

$$\ln \sqrt[n]{n!} \le \ln \sqrt[n+1]{(n+1)!}$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \ge \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}.$$

De plus par la croissance de la fonction $x \mapsto \ln x$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln k \ge \frac{1}{n}\int_1^n \ln x \,\mathrm{d}x = \ln n - 1 \to +\infty$$

et donc

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0.$$

Finalement on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et conclure.

Exercice 9 : [énoncé]

On a

$$\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{n}\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi}{n} = \frac{(-1)^n\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

donc la série est semi-convergente.

Exercice 10 : [énoncé]

On sait $\cos(n\pi + x) = (-1)^n\cos(x)$ *pour tous* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{Z}$.

Par le développement limité

$$\ln(1+u) \underset{u\to0}{=} = u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{4}u^4 + o(u^4)$$

on écrit

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{4n^4} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

donc

$$\begin{aligned} u_n &= \cos\left(n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

Sachant $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$, on obtient

$$u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{3n} - \frac{\pi}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Enfin, le développement [5] limité $\sin(u) = u + \mathrm{o}\left(u^2\right)$ donne

$$u_n = \underbrace{(-1)^n \frac{\pi}{3n}}_{=a_n} + \underbrace{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{=b_n}$$

Le terme général a_n est alterné et général décroît vers 0 en valeur absolue, la série $\sum a_n$ est donc convergente.
Le terme général b_n est dominé [6] par $1/n^2$ et la série $\sum b_n$ est donc absolument convergente.
Par opérations, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 11 : [énoncé]

Par comparaison avec une intégrale :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^{n-1}}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}} + \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right). \end{aligned}$$

6. On peut aussi dire qu'il est négligeable devant $1/n^{1.1}$ mais lui appliquer le critère spécial n'est pas possible à cause du terme $\mathrm{o}\left(1/n^2\right)$ qui empêche l'étude de monotonie.

La série de terme général

$$\frac{(-1)^n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}$$

converge en vertu du critère spécial.
On a

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right) \sim \frac{1}{4n}$$

donc par comparaison de série à termes positifs il y a divergence de la série de terme général

$$\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2}\right).$$

Par sommation d'une série convergente et d'une série divergente la série de terme général diverge.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

donc $\sum u_n$ converge.

(b) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n + \frac{(-1)^n}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{(-1)^n}{\ln n} - \frac{1}{n \ln^2 n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n \ln^2 n}\right).$$

Or la série de la série de terme général $\frac{1}{n \ln^2 n}$ est absolument convergente (utiliser une comparaison avec une intégrale) donc $\sum u_n$ est convergente.

(c) On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} + \frac{1}{(\ln n)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right).$$

La série de terme général $\frac{(-1)^n}{\ln n}$ est convergente alors que la série de terme général $\frac{1}{(\ln n)^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{(\ln n)^2}\right)$ est divergente par équivalence de séries à termes positifs. On conclut que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 13 : [énoncé]
$\sqrt{n^2+1} = n + \frac{1}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $u_n = \frac{(-1)^n\pi}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est terme général d'une série convergente.

Exercice 14 : [énoncé]
Puisque $u_n \to 0$, il revient au même d'étudier la nature de la série de terme général

$$v_n = u_{2n} + u_{2n+1}.$$

Or

$$v_n = \frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} + \frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1}.$$

D'une part

$$\frac{\sin(\ln 2n)}{2n(2n+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et d'autre part en vertu du théorème des accroissements finis, il existe c compris entre $\ln 2n$ et $\ln(2n+1)$ tel que

$$\frac{\sin(\ln(2n+1)) - \sin(\ln 2n)}{2n+1} = \frac{\cos(c)\big(\ln(2n+1) - \ln 2n\big)}{2n+1} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que $v_n = \mathrm{O}\big(1/n^2\big)$ et donc la série de terme général v_n est absolument convergente donc convergente.

Exercice 15 : [énoncé]
Montrons que la série étudiée est divergente. Notons S_n la somme partielle de rang n de cette série. Nous allons construire deux suites (a_n) et (b_n) de limite $+\infty$ telles que $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend pas zéros ce qui assure la divergence de la série étudiée.
Soit $n \geq 1$ fixé. Les indices k vérifiant

$$2n\pi - \frac{\pi}{4} \leq \sqrt{k} \leq 2n\pi + \frac{\pi}{4}$$

sont tels que

$$\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k}}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Posons alors

$$a_n = \lfloor 2n\pi - \pi/4 \rfloor \quad \text{et} \quad b_n = \lfloor 2n\pi + \pi/4 \rfloor.$$

On a

$$S_{b_n} - S_{a_n} = \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sqrt{k}}}{\sqrt{k}}$$

et donc par construction

$$\mathrm{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_{n+1}}^{b_n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Puisque la fonction $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante, on a la comparaison intégrale

$$\mathrm{Re}(S_{b_n} - S_{a_n}) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=a_n+1}^{b_n} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \sqrt{2}\big(\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1}\big).$$

Or

$$\sqrt{b_n+1} - \sqrt{a_n+1} = \frac{b_n - a_n}{\sqrt{b_n+1} + \sqrt{a_n+1}} \sim \frac{2n\pi^2}{4n\pi} \to \frac{\pi}{2}$$

donc $S_{b_n} - S_{a_n}$ ne tend par 0 et l'on peut conclure que la série étudiée diverge.

Exercice 16 : [énoncé]
Quand $x \to 0$, on a

$$\frac{\sqrt{|x|}}{1+x} = \sqrt{|x|} - x\sqrt{|x|} + \mathrm{o}(x^{3/2}).$$

On en déduit

$$u_n = \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} \sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x - \int_0^{(-1)^n/n^\alpha} x\sqrt{|x|}\,\mathrm{d}x + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right).$$

Par parité

$$u_n = \frac{(-1)^n 2}{3n^{3\alpha/2}} - \frac{2}{5n^{5\alpha/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right).$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de terme général $(-1)^n/n^{3\alpha/2}$ converge et par équivalence de séries à termes de signe constant, la série de terme général

$$-\frac{2}{5n^{5\alpha/2}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right) \sim -\frac{2}{5n^{5\alpha/2}}$$

converge si, et seulement si, $5\alpha/2 > 1$.
On en déduit que la série de terme général u_n converge si, et seulement si, $\alpha > 2/5$.

Exercice 17 : [énoncé]
Notons respectivement a_n, b_n et c_n les termes généraux des séries étudiées.

(a) *On détermine un équivalent de a_n à l'aide de la formule de Stirling.*

On sait

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \quad \text{donc} \quad a_n = \frac{n^n}{\mathrm{e}^n \cdot n!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 1/2 \leq 1$. Par équivalence de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de la série $\sum a_n$.

(b) *Par calcul asymptotique, on détermine un équivalent de b_n.*

Par le développement limité $\cos(u) = 1 - \frac{1}{2}u^2 + \mathrm{o}(u^2)$ quand u tend vers 0,

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right).$$

On poursuit en écrivant $\ln(1+u) = u + \mathrm{o}(u)$ et l'on obtient

$$b_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} -\frac{1}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ converge car il s'agit d'une série de Riemann d'exposant $\alpha = 2 > 1$. Par équivalence de séries à termes de signe constant, on peut affirmer la convergence de la série $\sum b_n$.

(c) *Il n'est pas possible de proposer un équivalent du type « série de Riemann » au terme général étudié mais on peut cependant le comparer à une telle série.*

En écrivant les puissances sous forme exponentielle,

$$n^2 c_n = \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = \exp\bigl(2\ln(n) - \sqrt{n}\ln(2)\bigr) \underset{n\to+\infty}{=} \exp\bigl(-\sqrt{n}\ln(2) + \mathrm{o}(\sqrt{n})\bigr) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

On en déduit que c_n est négligeable devant $1/n^2$. Ce terme est positif et terme général d'une série convergente, la série $\sum c_n$ est alors absolument convergente et donc convergente.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) R_n est le reste de rang n de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^k}{k}$ qui converge en vertu du critère spécial.

(b) Par décalage d'indice sur la deuxième somme

$$R_n + R_{n+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

(c) Puisque

$$R_n - R_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

on a

$$2R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)}.$$

Or par le critère spécial

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k(k+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc

$$R_n \sim \frac{(-1)^{n+1}}{2n}.$$

(d) Comme

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

la série $\sum R_n$ est convergente.

Exercice 19 : [énoncé]
À partir du rang $n = 2$, on peut applique le critère spécial des séries alternées. Le reste étant majorée par la valeur absolue du premier terme

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 8^n}{(2n)!} = 1 - 4 + r$$

avec $|r| \leq \frac{64}{24}$ donc $x < 0$.

Exercice 20 : [énoncé]
Par découpage
$$I=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$
donc par translations
$$I=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n\pi+t)}{n\pi+t}\,\mathrm{d}t$$
puis la relation proposée.
I se perçoit alors comme somme d'une série vérifiant le critère spécial des séries alternées, sa somme est donc du signe de son premier terme à savoir positif.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Si (v_n) est une suite alternée dont la valeur absolue décroît vers 0 alors la série $\sum v_n$ converge.
Ce résultat s'obtient en constatant l'adjacence des suites extraites de rangs pairs et impairs de la suite des sommes partielles.

(b) La suite $(s_n)_{n\geq 1}$ converge en vertu du critère spécial énoncé ci-dessus. En fait, il est « connu » que $(s_n)_{n\geq 1}$ tend vers $\ln 2$ et donc $(u_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.

(c) On peut écrire
$$s_n=\ln 2-r_n$$
avec
$$r_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$
On a
$$r_n-r_{n+1}=\frac{(-1)^n}{n+1}\text{ et }r_n+r_{n+1}=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
car par, application du critère spécial à la série $\sum\frac{(-1)^{k+1}}{k(k+1)}$, on peut majorer le reste par la valeur absolue du premier terme qui l'exprime. On en déduit
$$r_n=\frac{(-1)^n}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
On sait
$$\ln(x)\underset{x\to 1}{=}x-1+\mathrm{O}\big((x-1)^2\big)$$
et donc
$$u_n=\mathrm{e}^{s_n}-2+\mathrm{O}\big((\mathrm{e}^{s_n}-2)^2\big)$$
avec
$$\mathrm{e}^{s_n}-2=2\big(\mathrm{e}^{-r_n}-1\big)=-2r_n+\mathrm{O}(r_n^2)=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi,
$$u_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum u_n$ converge car c'est la somme d'une série vérifiant le critère spécial et d'une autre absolument convergente.

Exercice 22 : [énoncé]
Dans chaque étude, on note S_n la somme partielle de rang $n\in\mathbb{N}^*$ de la série étudiée.

(a) Les premiers termes de la série sont
$$-\frac{1}{1},-\frac{1}{2},-\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7},\frac{1}{8},-\frac{1}{9},-\frac{1}{10},-\frac{1}{11},\dots$$
On regroupe par paquets les termes successifs de même signes.

Pour $m\in\mathbb{N}^*$,
$$S_{m^2-1}=\sum_{i=1}^{m^2-1}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{i}\rfloor}}{i}=\sum_{k=1}^{m}\left((-1)^k\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{i}\right).$$
Introduisons
$$u_k=\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\frac{1}{i}\quad\text{pour tout }k\geq 1.$$
À l'aide d'une comparaison avec une intégrale
$$u_k\leq\sum_{i=k^2}^{(k+1)^2-1}\int_{i-1}^{i}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\int_{k^2-1}^{(k+1)^2-1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left(\frac{(k+1)^2-1}{k^2-1}\right)\quad\text{pour tout }k\geq 2$$
et de façon semblable
$$u_{k-1}\geq\int_{(k-1)^2}^{k^2}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln\left(\frac{k^2}{(k-1)^2}\right)\quad\text{pour tout }k\geq 2.$$

Or on observe

$$\frac{(k+1)^2-1}{k^2-1} \leq \frac{k^2}{(k-1)^2}$$

car

$$k^2\left(k^2-1\right)-(k-1)^2\left((k+1)^2-1\right)=2k(k-1)\geq 0.$$

On en déduit que la suite $(u_k)_{k\geq 1}$ est décroissante et, puisqu'elle est aussi de limite nulle, on peut assurer la convergence de la série $\sum(-1)^k u_k$. Ainsi, la suite (S_{m^2-1}) est convergente.

> *Cela ne suffit pas encore pour conclure : il faut étudier la convergence de la suite (S_n) et non seulement celle de la suite extraite (S_{m^2-1}).*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, introduisons $m=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ de sorte que $m^2\leq n<(m+1)^2$. Les termes d'indice compris entre m^2 et $(m+1)^2-1$ étant tous de signe constant, la somme S_n est comprise entre S_{m^2-1} et $S_{(m+1)^2-1}$. Or ces deux sommes convergent vers S et, par encadrement, on peut conclure que (S_n) converge aussi vers S.

Finalement, la série $\sum\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ est convergente.

(b) Dans cette étude, les termes successifs de mêmes signes sont plus nombreux que dans l'étude précédente et on remarque, pour $m\in\mathbb{N}$,

$$S_{\lfloor e^{m+1}\rfloor-1}-S_{\lfloor e^m\rfloor}=(-1)^m\sum_{i=\lfloor e^m\rfloor+1}^{\lfloor e^{m+1}\rfloor-1}\frac{1}{i}$$

car $\ln(i)\in\left]m\,;m+1\right[$ pour tout i compris entre $\lfloor e^m\rfloor+1$ et [7] $\lfloor e^{m+1}\rfloor-1$. On en déduit

$$\left|S_{\lfloor e^{m+1}\rfloor-1}-S_{\lfloor e^m\rfloor}\right|=\sum_{i=\lfloor e^m\rfloor+1}^{\lfloor e^{m+1}\rfloor-1}\frac{1}{i}\geq\int_{\lfloor e^m\rfloor+1}^{\lfloor e^{m+1}\rfloor}\frac{dt}{t}=\ln\left(\frac{\lfloor e^{m+1}\rfloor}{\lfloor e^m\rfloor+1}\right)\xrightarrow[m\to+\infty]{}1$$

ce qui est incompatible avec une éventuelle convergence de $\sum\frac{(-1)^{\lfloor\ln(n)\rfloor}}{n}$: cette série diverge.

Exercice 23 : [énoncé]

La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ étant croissante,

$$\int_0^n\sqrt{x}\,dx\leq\sum_{k=1}^n\sqrt{k}\leq\int_1^{n+1}\sqrt{x}\,dx$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n\sqrt{k}\sim\frac{2}{3}n^{3/2}.$$

Il y a donc convergence de la série de terme général u_n si, et seulement si,$\alpha>5/2$.
Par l'encadrement qui précède :

$$0\leq\sum_{k=1}^n\sqrt{k}-\int_0^n\sqrt{x}\,dx\leq\int_n^{n+1}\sqrt{x}\,dx\leq\sqrt{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^n\sqrt{k}=\frac{2}{3}n^{3/2}+O(\sqrt{n})$$

puis

$$(-1)^n u_n=\frac{(-1)^n 2}{3n^{\alpha-3/2}}+O\left(\frac{1}{n^{\alpha-1/2}}\right).$$

Pour $\alpha>5/2$: il y a absolue convergence comme ci-dessus.
Pour $3/2<\alpha\leq 5/2$: il y a convergence par somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.
Pour $\alpha\leq 3/2$: il y a divergence grossière.

Exercice 24 : [énoncé]

On a

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}\left(1-\frac{(-1)^n}{2n^\alpha}+O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right)=\frac{(-1)^n}{n^{\alpha/2}}-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right).$$

Si $\alpha\leq 0$ alors $u_n\not\to 0$ donc $\sum_{n\geq 2}u_n$ diverge. Si $\alpha>0$ alors $\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.
Si $\frac{3\alpha}{2}>1$ alors

$$-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)$$

est le terme général d'une série absolument convergente et donc $\sum_{n\geq 2}u_n$ converge.
Si $\frac{3\alpha}{2}\leq 1$ alors

$$-\frac{1}{2n^{3\alpha/2}}+O\left(\frac{1}{n^{5\alpha/2}}\right)\sim\frac{-1}{2n^{3\alpha/2}}$$

(de signe constant) est le terme général d'une série divergente donc $\sum_{n\geq 2}u_n$.

7. On peut même faire varier i jusqu'à $\lfloor e^{m+1}\rfloor$ si l'on tient pour acquis que e^{m+1} n'est pas un entier.

Exercice 25 : [énoncé]
Par développement

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right) = v_n + w_n$$

avec

$$v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \text{ et } w_n = -\frac{1}{2n^{2\alpha}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$

$\sum v_n$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées et $\sum w_n$ converge si, et seulement si, $2\alpha > 1$ par équivalence de termes généraux de séries de signe constant. Au final, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/2$.

Exercice 26 : [énoncé]
On a

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right) = \frac{(-1)^n}{n^a} - \frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2a}}\right).$$

Par le critère spécial, $\frac{(-1)^n}{n^a}$ est terme général d'une série convergente.
Par comparaison de séries à termes positifs

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^{2a}}\right) \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^{2a}}$$

est terme général d'une série convergente si, et seulement si, $a > 1/2$.
Finalement, la série étudiée converge si, et seulement si, $a > 1/2$.

Exercice 27 : [énoncé]
On a

$$u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(a+1)}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Par suite, la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $a = -1$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Si $\alpha \leq 1$ alors

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$$

et donc $u_n \to 0$ si $a \in [0\,;1[$, $u_n \to 1$ si $a = 1$ et (u_n) diverge si $a > 1$.
Si $\alpha > 1$ alors $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\right)$ converge et donc (u_n) aussi.

(b) Cas $\alpha \leq 1$ et $a = 1$: $u_n = 1$, $v_n = 0$ et on peut conclure.
Cas $\alpha < 1$ et $a \in [0\,;1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n$, $n^2 v_n = \mathrm{e}^{2\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}\ln a} \to 0$ car

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Cas $\alpha = 1$ et $a \in [0\,;1[$: $\ell = 0$, $v_n = u_n = \mathrm{e}^{(\ln n + \gamma + \mathrm{o}(1))\ln a} \sim \lambda n^{\ln a}$ donc $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\ln a < -1$ *i.e.* $a < -1/\mathrm{e}$.
Cas $\alpha > 1$: $\ell = a^{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}}$,

$$v_n = \ell(\mathrm{e}^{-\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}} - 1) \sim -\ell\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha} = -\frac{\ell}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

Ainsi $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.
Dans chacun des cas précédents, on peut appliquer le critère spécial aux séries alternées et affirmer que $\sum(-1)^n v_n$ converge.

Exercice 29 : [énoncé]
On a

$$\binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)(n+p-1)\dots(n+1)}{p!} \sim \frac{1}{p!}n^p$$

donc

$$v_n \sim \frac{(p!)^\alpha}{n^{p\alpha}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série numérique $\sum v_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1/p$.
On a

$$\binom{n+p+1}{p+1} = \binom{n+p}{p+1} + \binom{n+p}{p} \geq \binom{n+p}{p}$$

donc la suite $(|w_n|)$ est décroissante. De plus elle de limite nulle, le critère spécial des séries alternées assure alors la convergence de $\sum w_n$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 30 : [énoncé]

(a) L'intégrale étudiée est bien définie pour $a > -1$. Par le changement de variable proposé

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1 + (1+a)x^2}$$

puis en posant $u = x\sqrt{1+a}$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + a\sin^2(t)} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}.$$

(b) Par symétrie

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}$$

et par le calcul qui précède

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)} = \frac{\pi}{\sqrt{1 + (n\pi)^\alpha}} \sim \frac{\pi^{1-\alpha/2}}{n^{\alpha/2}}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la série étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Par monotonie, on a l'encadrement

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + ((n+1)\pi)^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)} \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2(t)}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la convergence de la série actuellement étudiée entraîne la convergence de la précédente et inversement. La condition attendue est donc encore $\alpha > 2$.

(d) Les sommes partielles de la série étudiée ci-dessus correspondent aux intégrales suivantes

$$\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{1 + t^\alpha \sin^2(t)}.$$

La fonction intégrée étant positive, la convergence de l'intégrale entraîne la convergence de la série et inversement. On conclut que l'intégrale étudiée converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 1$.
Par comparaison avec une intégrale, on montre

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha - 1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(b) Pour définir u_n, il est nécessaire de supposer $\alpha > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, v_n étant le reste de la série $\sum \frac{(-1)^p}{(p+1)^\alpha}$ est du signe de $(-1)^n$ et $|v_n| \leq \frac{1}{(n+1)^\alpha} \to 0$.
De plus

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+1)^\alpha} - \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(p+n+2)^\alpha}$$

donc

$$|v_n| - |v_{n+1}| = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right).$$

Par le théorème des accroissements finis

$$\frac{1}{(p+n+2)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+1)^\alpha} = -\frac{\alpha}{(c_n)^{\alpha+1}}$$

avec $c_n \in \left]p+n+1\,;p+n+2\right[$.
La suite (c_n) est croissante donc on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à

$$\sum (-1)^p \left(\frac{1}{(p+n+1)^\alpha} - \frac{1}{(p+n+2)^\alpha}\right)$$

et conclure que sa somme est du signe de son premier terme. Au final, $(|v_n|)$ est décroissant et en appliquant une dernière fois le critère spécial des séries alternées, on conclut que $\sum v_n$ converge.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) On a

$$\Sigma_n = \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}k}\right) = \operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right)$$

donc

$$|\Sigma_n| \leq \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}}\frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}n}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}}}\right| \leq \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}}|}$$

et la suite $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ est effectivement bornée.

(b) On a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k - \Sigma_{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Sigma_k}{k+1}$$

donc

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\Sigma_k}{k(k+1)} + \frac{\Sigma_n}{n+1}.$$

Or $\frac{\Sigma_n}{n+1} \to 0$ car (Σ_n) est bornée et $\frac{\Sigma_k}{k(k+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut donc conclure que (S_n) converge.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Par sommation géométrique

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leq \left|\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}\right| \leq \frac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|}.$$

(b) On a

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{S_n}{n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{S_n}{n(n+1)} - S_0 + \frac{S_N}{N+1}.$$

Or

$$\frac{S_N}{N+1} \to 0 \text{ et}$$

$\frac{S_n}{n(n+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc la suite des sommes partielles de la série de terme général u_n converge.

(c) On a

$$|\cos x| \geq \cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$$

donc

$$|u_n| \geq \frac{\cos(2n\theta)}{2n} + \frac{1}{2n}.$$

Si $\theta = 0\ [\pi]$ alors $|u_n| \geq \frac{1}{n}$ et donc $\sum |u_n|$ diverge.
Si $\theta \neq 0\ [\pi]$ alors par ce qui précède la série $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$ converge et puisque la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, par opérations, la série de terme général $|u_n|$ diverge.

Exercice 34 : [énoncé]

(a) $(a_n - a_{n+1})S_n = \mathrm{O}(a_n - a_{n+1})$ et la série à termes positifs $\sum a_n - a_{n+1}$ est convergente.

(b) En séparant la somme en deux et en décalant les indices

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k - \sum_{k=1}^{n+1} a_k S_{k-1}$$

puis en regroupant

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k - a_{k+1})S_k = a_0 S_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (S_k - S_{k-1}) - a_{n+1} S_n$$

avec $a_{n+1} S_n \to 0$.
Par suite $\sum a_n (S_n - S_{n-1})$ est convergente.

(c) On applique le résultat précédent à $a_n = 1/n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. (S_n) est bien bornée car

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\right) = \cos(nx)\frac{\sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

On a

$$S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}\right)$$

donc

$$|S_n| \leq \frac{2}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1|} = M_\theta.$$

Posons $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x-1) - x}{\sqrt{x}(x-1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{(x+1)}{\sqrt{x}(x-1)^2} \leq 0$$

donc f est décroissante sur $[2\,;+\infty[$.
$u_n = f(n)\cos(n\theta) = f(n)(S_n - S_{n-1})$ donc

$$\sum_{n=2}^{N} u_n = \sum_{n=2}^{N} f(n)S_n - \sum_{n=1}^{N-1} f(n+1)S_n = \sum_{n=2}^{N} \big(f(n) - f(n+1)\big)S_n + f(N+1)S_N - f(2)S_1.$$

Or $f(N+1)S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ car $S_N = \mathrm{O}(1)$ et $f \xrightarrow[+\infty]{} 0$.

De plus
$$\left|\big(f(n)-f(n+1)\big)S_n\right| \le M_\theta\big(f(n)-f(n+1)\big)$$
avec $\sum f(n)-f(n+1)$ série convergente (car f converge en $+\infty$) donc par comparaison $\sum\big(f(n)-f(n+1)\big)S_n$ est absolument convergente.

Ainsi par opérations, $\left(\sum_{n=2}^N u_n\right)_{N\ge 2}$ converge et donc $\sum u_n$ converge.

On a
$$|u_n| = \frac{\sqrt{n}}{n-1}\left|\cos(n\theta)\right| \ge \frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos^2(n\theta).$$
Or $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ donc $\cos^2 a \ge \frac{1}{2}\cos 2a + 1$ puis
$$|u_n| \ge \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(2n\theta) + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}.$$
En reprenant l'étude qui précède avec 2θ au lieu de θ, on peut affirmer que
$$\sum \frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1}\cos(2n\theta)$$
converge tandis que $\sum \frac{\sqrt{n}}{2(n-1)}$ diverge puisque $\frac{1}{2}\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
Par comparaison, on peut affirmer que $\sum|u_n|$ diverge.

Exercice 36 : [énoncé]
Posons
$$S_n = \sum_{k=1}^n z_k.$$
On a
$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n - S_{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n} - \sum_{n=0}^{N-1}\frac{S_n}{n+1}$$
donc
$$\sum_{n=1}^N \frac{z_n}{n} = \sum_{n=1}^N \frac{S_n}{n(n+1)} + \frac{S_N}{N+1}.$$
Or $\frac{S_N}{N+1} \to 0$ car (S_N) converge et $\frac{S_n}{n(n+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est le terme général d'une série absolument convergente. On peut conclure que la série $\sum_{n\ge 1}\frac{z_n}{n}$ converge.

Exercice 37 : [énoncé]
Le cas $\alpha = 1$ est entendu. Étudions $\alpha \in \left]-\infty\,;1\right[$.
Par l'absurde, supposons la convergence de $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$ et introduisons
$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k^\alpha}$$
de sorte que $S_n - S_{n-1} = a_n/n^\alpha$.
On peut écrire
$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k - S_{k-1}}{k^{1-\alpha}} = \sum_{k=1}^n \frac{S_k}{k^{1-\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{S_k}{(k+1)^\alpha}$$
puis
$$\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k} = \sum_{k=1}^n S_k\left(\frac{1}{k^{1-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}}\right) + \frac{S_n}{(n+1)^{1-\alpha}}.$$
La suite (S_n) est bornée car convergente et
$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{1}{k^{1-\alpha}} - \frac{1}{(k+1)^{1-\alpha}}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}} \to 1$$
il y a donc absolue convergence de la série
$$\sum S_n\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}} - \frac{1}{(n+1)^{1-\alpha}}\right)$$
et l'on en déduit la convergence de $\sum \frac{a_n}{n}$.
C'est absurde.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) On peut écrire
$$\sum_{k=1}^n v_k = \sum_{k=1}^n k u_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)u_k = \sum_{k=1}^n u_k - n u_{n+1}(*).$$
Montrons que la convergence de $\sum u_n$ entraîne que $nu_n \to 0$.
Posons S_n les sommes partielles de $\sum u_n$.
Par la décroissance de u_n, on a $0 \le nu_{2n} \le S_{2n} - S_n$.
Par suite $nu_{2n} \to 0$ et aussi $2nu_{2n} \to 0$.

De façon semblable, on obtient $nu_{2n+1} \to 0$ puis $(2n+1)u_{2n+1} \to 0$.
Ainsi $nu_n \to 0$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n} v_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k.$$

(b) Supposons que la série de terme général v_n converge.
Si la série de terme général u_n converge alors $u_n \to 0$.
Inversement, supposons que $u_n \to 0$. On peut écrire

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_k - u_{k+1}) \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{v_k}{k}.$$

On a alors

$$0 \le nu_n \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{n}{k} v_k \le \sum_{k=n}^{+\infty} v_k.$$

Puisque la série des v_n converge,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} v_k \to 0 \text{ puis } nu_n \to 0.$$

La relation (*) entraîne alors la convergence de $\sum u_n$.

(c) $u_n = 1$ convient, où si l'on veut une suite non constante, $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

Exercice 39 : [énoncé]
Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k(S_k - S_{k-1}).$$

En séparant la somme en deux et en reprenant l'indexation de la deuxième somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k S_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} S_k$$

ce qui donne (sachant $S_0 = 0$)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1}) S_k + a_{n+1} S_n.$$

La suite (S_n) converge, elle est donc bornée par un certain réel M.
D'une part $a_n \to 0$ et donc $a_{n+1} S_n \to 0$.
D'autre part $\left|(a_k - a_{k+1})S_k\right| \le M|a_k - a_{k+1}|$ et donc la série $\sum (a_n - a_{n+1})S_n$ converge absolument.
Par addition de convergence, on peut conclure que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 40 : [énoncé]
On a

$$\sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{k=1}^{N} \ln(2k+1) - \ln(2k+1) = 0$$

et

$$\sum_{n=2}^{2N} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = \sum_{n=2}^{2N+1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) + o(1) \to 0$$

donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right) = 0.$$

Exercice 41 : [énoncé]
Le terme

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

est bien défini en tant que reste d'une série alternée satisfaisant au critère spécial.
Pour $N \le K$ entiers,

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=n}^{K} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} + \sum_{k=N+1}^{K} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

D'une part

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{k} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}.$$

D'autre part

$$\sum_{k=N+1}^{K} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = N \sum_{k=N+1}^{K} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

En passant à la limite quand $K \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k} + N \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

Or

$$\sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{N^2}\right)$$

donc quand $N \to +\infty$,

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \to \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Ainsi $\sum u_n$ est convergente et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = -\ln 2.$$

Exercice 42 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \int_0^1 \frac{1-x^{n+1}}{1-x} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}x.$$

Posons

$$I = \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

Cette intégrale est bien définie car la fonction intégrée se prolonge par continuité en 1.

$$\left|\sum_{k=0}^{n} u_k - I\right| \le \int_0^1 \frac{\sin(\pi x)}{1-x} x^{n+1}\,\mathrm{d}x \le \frac{M}{n+1}$$

avec

$$M = \sup_{[0;1]} \frac{\sin(\pi x)}{1-x}.$$

On conclut que $\sum_{k=0}^{n} u_k \to I$ puis par changement de variable

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \to \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 43 : [énoncé]
Pour $t = -1$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = -(m+1)(n+1)$$

ce qui permet de conclure.
Pour $t \ne -1$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i t^{i+1} \frac{1-(-t)^{m+1}}{1+t}.$$

Quand $m \to +\infty$,

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} \to \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t}$$

si $|t| < 1$ et diverge sinon. Aussi, quand $|t| < 1$

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^{i+1}}{1+t} = t\frac{1-(-t)^{n+1}}{(1+t)^2}$$

et quand $n \to +\infty$,

$$t\frac{1-(-t)^{n+1}}{(1+t)^2} \to \frac{t}{(1+t)^2}.$$

On conclut

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{m\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} (-1)^{i+j} t^{i+j+1} = \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Exercice 44 : [énoncé]
Par sommation géométrique

$$\frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{k+\alpha-1} + (-1)^{n+1} \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}$$

donc

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^{k+\alpha-1}\,\mathrm{d}x + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+\alpha}}{1+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+\alpha} + \varepsilon_n$$

avec

$$|\varepsilon_n| \le \int_0^1 x^{n+\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+\alpha-1} \to 0$$

d'où la conclusion.

Exercice 45 : [énoncé]
Tout d'abord la série converge en vertu de la règle de d'Alembert (en traitant $x = 0$ séparément)
Puisque
$$\sum_{k=0}^{n} kx^k = x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{k=0}^{n} x^k\right) = x\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)' \to \frac{x}{(1-x)^2}$$
on obtient
$$\sum_{k=0}^{+\infty} kx^k = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Exercice 46 : [énoncé]
Par sommation géométrique
$$\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{4n+1} = \sum_{n=0}^{N}\int_0^1 (-t^4)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\left|\int_0^1 \frac{(-t^4)^{N+1}}{1+t^4}\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^1 t^{4N+4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4N+5} \to 0$$
donc $\sum \frac{(-1)^n}{4n+1}$ converge et
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}.$$
Enfin
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\ln\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} + \pi\right).$$

Exercice 47 : [énoncé]
Introduisons la série entière de somme
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+3}}{(4n+1)(4n+3)}.$$
On vérifie aisément que son rayon de convergence est égale à 1 et que sa somme est définie et continue sur $[-1\,;1]$ par convergence normale.
Sur $]-1\,;1[$
$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{4n+2}}{4n+1}.$$
Pour $x \neq 0$
$$\left(\frac{1}{x}S'(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{4n} = \frac{1}{1-x^4}.$$
On en déduit que sur $]-1\,;1[$
$$S'(x) = x\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4}$$
puis
$$S(x) = \int_0^x t\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}.$$
Par intégration par parties
$$S(x) = \left[\frac{1}{2}(t^2-1)\int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^4}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1-t^2}{1-t^4}\,\mathrm{d}t$$
et ainsi
$$S(x) = \frac{1}{2}(x^2-1)\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}.$$
Quand $x \to 1^-$
$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1-t^4} = \mathrm{O}\big(\ln(1-x)\big) = \mathrm{o}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$
donc
$$S(x) \to \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{8}.$$
On en déduit
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(4n+1)(4n+3)} = S(1) = \frac{\pi}{8}.$$

Exercice 48 : [énoncé]

(a) a) Une comparaison série intégrale est inadaptée, f n'est pas monotone comme en témoigne ses changements de signe. En revanche :
$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) - f(n)\,\mathrm{d}x.$$

Or par le théorème des accroissements fini,

$$f(x)-f(n)=f'(c_x)(x-n)$$

avec $c_x\in\,]n\,;x[$.
Après calcul de $f'(x)$, on en déduit

$$\left|f(x)-f(n)\right|\leq\frac{1}{3n^{4/3}}+\frac{2}{3n^{5/3}}$$

puis $u_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)$.

(b) La série de terme général $\int_n^{n+1}f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge car $\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t=3\sin(n^{1/3})$ diverge. En effet si $\sin\left(n^{1/3}\right)$ convergeait vers ℓ alors par extraction $\sin(n)$ aussi et il est classique d'établir la divergence de $(\sin(n))$. On en déduit que $\sum\frac{\cos(n^{1/3})}{n^{2/3}}$ diverge.

(c) Il suffit de reprendre la même étude pour parvenir à la même$u_n=\int_n^{n+1}f(x)\,\mathrm{d}x-f(n)$ conclusion.

Exercice 49 : [énoncé]

(a) La fonction f' est bien définie et continue par morceaux sur $[1\,;+\infty[$.
On a

$$f'(x)=\frac{\cos(\ln x)-\sin(\ln x)}{x^2}$$

et donc

$$\left|f'(x)\right|\leq\frac{2}{x^2}.$$

La fonction $x\mapsto 1/x^2$ étant intégrable sur $[1\,;+\infty[$, il en est de même de f' par domination.

(b) Par intégration par parties

$$\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t=\Big[(t-(n-1)f(t)\Big]_{n-1}^n-\int_{n-1}^n(t-(n-1))f'(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$|u_n|\leq\int_{n-1}^n(t-(n-1))\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\leq\int_{n-1}^n\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t.$$

L'intégrabilité de f' permet d'introduire $\int_1^{+\infty}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t$ et d'affirmer que les sommes partielles de la série $\sum|u_n|$ sont majorées via

$$\sum_{n=1}^N|u_n|\leq|u_1|+\int_1^N\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t\leq|u_1|+\int_1^{+\infty}\left|f'(t)\right|\mathrm{d}t.$$

La série $\sum u_n$ est alors absolument convergente.

(c) Par l'absurde, supposons que la suite $(\cos(\ln n))$ converge. La suite extraite $\left(\cos(\ln 2^n)\right)=\left(\cos(n\ln 2)\right)$ aussi. Notons ℓ sa limite.
Puisque

$$\cos((n+1)\ln 2)+\cos((n-1)\ln 2)=2\cos(n\ln 2)\cos(\ln 2)$$

on obtient à la limite $2\ell=2\ell\cos(\ln 2)$ et donc $\ell=0$.
Puisque

$$\cos(2n\ln 2)=2\cos^2(n\ln 2)-1$$

on obtient aussi à la limite $\ell=2\ell^2-1$ ce qui est incompatible avec $\ell=0$.

(d) Puisque

$$\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t=-\cos(\ln n)+\cos(\ln(n-1)).$$

La divergence de la suite $(\cos(\ln n))$ entraîne la divergence de la série $\sum\int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$.
Enfin, puisque la série $\sum u_n$ converge, on peut alors affirmer que la série $\sum f(n)$ diverge.

Exercice 50 : [énoncé]

La fonction f_n est continue, strictement décroissante et de limites $+\infty$ et 0 en n et $+\infty$. On en déduit que f_n réalise une bijection de $]n\,;+\infty[$ vers $]0\,;+\infty[$. Ainsi, pour tout $a>0$, il existe un unique $x_n>n$ vérifiant $f_n(x_n)=a$.
On a

$$f_n(n+1+y)=\sum_{k=1}^n\frac{1}{n+1+y-k}=\sum_{k=1}^n\frac{1}{k+y}\leq\sum_{k=1}^n\int_{k-1}^k\frac{\mathrm{d}t}{t+y}=\int_0^n\frac{\mathrm{d}t}{t+y}=\ln\left(1+\frac{n}{y}\right).$$

Pour $y=\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$,

$$f(n+1+y)\leq\ln\left(1+(\mathrm{e}^a-1)\right)=a$$

et par suite

$$x_n\leq n+1+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}.$$

Aussi

$$f(n+y)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{y+k}\geq\int_0^n\frac{\mathrm{d}t}{t+y}=\ln\left(1+\frac{n}{y}\right).$$

Pour $y=\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}$, $f(n+y)\geq a$ et par suite

$$x_n\geq n+\frac{n}{\mathrm{e}^a-1}.$$

On en déduit
$$x_n \sim n + \frac{n}{\mathrm{e}^a - 1} = \frac{\mathrm{e}^a n}{\mathrm{e}^a - 1}.$$

Exercice 51 : [énoncé]
On remarque
$$n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{\frac{n}{k}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{+\infty} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$$
avec $\varphi \colon x \mapsto \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x}$.
La fonction φ est décroissante en tant que produit de deux fonctions décroissantes positives. Par suite
$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \le \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{(k-1)/n}^{k/n} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$
En sommant et en exploitant l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t \le \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{k}{n}\right) \le \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{1/t}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1/t}\right]_1^{+\infty} = \mathrm{e}-1 \text{ et } \int_{(n-1)/n}^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{1/t}\right]_{(n-1)/n}^{+\infty} \to \mathrm{e}-1.$$
Par encadrement
$$\lim_{n\to+\infty} n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2}\mathrm{e}^{\frac{n}{k}}\right) = \mathrm{e} - 1.$$

Exercice 52 : [énoncé]
La fonction $t \mapsto f(\mathrm{e}^{-t})$ est décroissante et positive donc, par théorème de comparaison série intégrale, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$ et la série $\sum f\left(\mathrm{e}^{-n}\right)$ ont même nature.
Par le changement de variable $\mathcal{C}^1$ bijectif $u = \mathrm{e}^t$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$ à même nature que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$.
La fonction $u \mapsto \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)$ est décroissante et positive donc, par théorème de comparaison série intégrale, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{u} f\left(\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u$ et la série $\sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ ont même nature.

Exercice 53 : [énoncé]

La nature des séries étudiées se déduit de l'étude des intégrales associées.

La fonction f' est continue, décroissante et positive, la nature de la série $\sum f'(n)$ se déduit de l'étude de la limite quand x tend vers $+\infty$ de
$$\int_1^x f'(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)\Big]_1^x = f(x) - f(1).$$
La série $\sum f'(n)$ est donc convergente si, et seulement si, la fonction f admet une limite finie en $+\infty$.
Parallèlement, la fonction f'/f est aussi continue, décroissante[8] et positive. La nature de $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ se déduit alors de la limite quand x tend vers $+\infty$ de
$$\int_1^x \frac{f'(t)}{f(t)}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln\big(f(t)\big)\Big]_1^x = \ln\big(f(x)\big) - \ln\big(f(1)\big).$$
Par composition de limites, la fonction f admet une limite finie en $+\infty$ si, et seulement si, $\ln(f)$ y admet aussi une limite finie. On en déduit que les séries $\sum f'(n)$ et $\sum \frac{f'(n)}{f(n)}$ ont même nature.

Exercice 54 : [énoncé]

(a) *On réalise une intégration par parties où l'on intègre pertinemment la fonction constante égale à* 1.

Pour les fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ déterminées par
$$u(t) = t - \left(k + \frac{1}{2}\right) \quad \text{et} \quad v(t) = f(t)$$
on obtient
$$\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\left(t - k - \frac{1}{2}\right)f(t)\right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1}\left(t - k - \frac{1}{2}\right)f'(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\big(f(k+1) + f(k)\big) + \int_k^{k+1}\left(k + \frac{1}{2} - t\right)f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le facteur de $f'(t)$ dans l'intégrale change de signe en $k + 1/2$. On découpe cette intégrale en ce point afin de pouvoir l'encadrer.

8. Les fonctions f' et $1/f$ sont décroissantes et positives donc leur produit est une fonction décroissante.

Par décroissance de f', on sait $f'(t) \geq f'(k)$ pour tout $t \in [k\,;k+1/2]$. Par intégration en bon ordre, on obtient alors

$$\int_k^{k+1/2} \underbrace{\left(k+\frac{1}{2}-t\right)}_{\geq 0} f'(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_k^{k+1/2}\left(k+\frac{1}{2}-t\right)f'(k)\,\mathrm{d}t$$
$$= \left[\frac{1}{2}\left(k+\frac{1}{2}-t\right)^2 f'(k)\right]_k^{k+1/2} = \frac{1}{8}f'(k).$$

On procède de même en partant de $f'(t) \leq f'(k+1/2)$ pour $t \in [k\,;k+1/2]$ et l'on obtient l'encadrement

$$\frac{1}{8}f'\left(k+\frac{1}{2}\right) \leq \int_k^{k+\frac{1}{2}}\left(k+\frac{1}{2}-t\right)f'(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{8}f'(k). \tag{1}$$

De la même façon, on obtient aussi

$$-\frac{1}{8}f'\left(k+\frac{1}{2}\right) \leq \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1}\underbrace{\left(k+\frac{1}{2}-t\right)}_{\leq 0}\underbrace{f'(t)}_{f'(k+1)\leq\cdot\leq f'(k+1/2)}\,\mathrm{d}t \leq -\frac{1}{8}f'(k+1). \tag{2}$$

En sommant les encadrements (**??**) et (**??**), on acquiert celui attendu

$$0 \leq \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\big(f(k)+f(k+1)\big) \leq \frac{1}{8}\big(f'(k)-f'(k+1)\big).$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme S_n est la somme partielle de rang n de la série de terme général

$$u_k = \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\big(f(k)+f(k+1)\big) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

L'étude qui précède donne $0 \leq u_k \leq f'(k)-f'(k+1)$. Or la série de terme général $f'(k)-f'(k+1)$ a la nature de la suite $\big(f'(k)\big)$ et cette dernière est convergente car la fonction f' est supposée de limite nulle. Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série de terme général u_k, c'est-à-dire de la suite (S_n).

(c) Par intégration par parties, on a

$$\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_1^n 1\times\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\Big[t\ln(t)\Big]_1^n + \int_1^n \mathrm{d}t = -n\ln(n)+n-1.$$

De plus, on a aussi

$$\frac{1}{2}f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)+\frac{1}{2}f(n) = -\ln(n!\,)+\frac{1}{2}\ln(n).$$

Or la fonction f satisfait les hypothèses de l'étude en cours et l'on peut donc affirmer que

$$S_n = -n\ln(n)+n-1+\ln(n!\,)-\frac{1}{2}\ln(n)$$

admet une limite finie. On en déduit que le terme σ_n admet aussi une limite finie [9].

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Par la relation de Chasles, on écrit

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t\right) = \int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La convergence de la suite $\left(\int_1^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ équivaut donc à la convergence de la série de terme général

$$u_n = \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

On établit la convergence de la série de terme général $v_n = u_n - f(n)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par intégration par parties avec

$$u(t) = t-(n+1) \quad \text{et} \quad v(t) = f(t)$$

on obtient

$$u_n = \underbrace{\Big[\big(t-(n+1)\big)f(t)\Big]_n^{n+1}}_{=f(n)} - \int_n^{n+1}\big(t-(n+1)\big)f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$|v_n| = \left|\int_n^{n+1}\big(t-(n+1)\big)f'(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_n^{n+1}\underbrace{\big|t-(n+1)\big|}_{\leq 1}\big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1}\big|f'(t)\big|\,\mathrm{d}t.$$

9. Voir aussi le sujet 5041 pour un calcul plus direct.

Pour tout $N \geq 1$, on a alors

$$\sum_{n=1}^{N} |v_n| \leq \int_1^{N+1} \left|f'(u)\right| \,\mathrm{d}u \leq M.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |v_n|$ sont majorées ce qui donne l'absolue convergence, et donc la convergence, de la série de terme général v_n.

Enfin, puisque $u_n = v_n + f(n)$, la convergence de la série de terme général u_n équivaut à celle de la série de terme général $f(n)$.

(b) Introduisons la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par

$$f(t) = \frac{\sin\bigl(\ln(t)\bigr)}{t}.$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1\,;+\infty[$ avec, pour $t \in [1\,;+\infty[$,

$$f'(t) = \frac{\cos\bigl(\ln(t)\bigr) - \sin\bigl(\ln(t)\bigr)}{t^2}.$$

On vérifie l'hypothèse de l'énoncé. Pour tout $x \geq 1$,

$$\int_1^x \left|f'(t)\right| \mathrm{d}t \leq \int_1^x \frac{2}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2}{t}\right]_1^x = 2 - \frac{2}{x} \leq 2 = M.$$

La convergence de la série étudiée équivaut alors à la convergence quand n croît vers l'infini du terme

$$\int_1^n \frac{\sin\bigl(\ln(t)\bigr)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

On reconnaît une forme $u'\sin(u)$ ce qui permet de mener le calcul de l'intégrale

$$\int_1^n \frac{\sin\bigl(\ln(t)\bigr)}{t}\,\mathrm{d}t = \Bigl[-\cos\bigl(\ln(t)\bigr)\Bigr]_1^n = -\cos\bigl(\ln(n)\bigr).$$

Puisque la suite de terme général $\cos\bigl(\ln(n)\bigr)$ diverge [10], la série étudiée est aussi divergente.

10. On peut déterminer des valeurs de n arbitrairement grandes telles que ce cosinus soit proche de 1 et d'autres telles qu'il soit proche de -1.

Exercice 56 : [énoncé]

(a) $\frac{1}{k+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k}$ et $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k}$ est une série à terme positif divergente donc

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

(b) Pour être plus précis,

$$S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+\sqrt{k}} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}}$$

or

$$\frac{\sqrt{k}}{k^2 + k\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^{3/2}}$$

et est donc le terme général d'une série convergente.
Ainsi, $S_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} oC'$ d'où

$$S_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n + (\gamma + C') + \mathrm{o}(1) = \ln n + C + \mathrm{o}(1).$$

Exercice 57 : [énoncé]

(a) $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{1}{k^2}$ donc la série de terme général $\frac{1}{k^2+\sqrt{k}}$ est absolument convergente. Par suite (S_n) converge vers une certaine constante C.

(b)

$$C - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + \sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

car $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ est une série à termes positifs convergente.
Par comparaison série intégrale $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ et on peut conclure comme annoncée.

Exercice 58 : [énoncé]

(a) Pour $\alpha > 1$, la série de terme général $1/n^\alpha$ converge et si l'on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

on observe
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^\alpha}=S_{2n}-S_n\to\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^\alpha}=0.$$
Pour $\alpha=1$, on introduit les sommes partielles harmoniques
$$H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$
En notant γ la constante d'Euler, on peut écrire
$$H_n=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
et alors
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}=H_{2n}-H_n=\ln 2+\mathrm{o}(1)\to\ln 2.$$

(b) Par l'égalité de Taylor avec reste intégral, on peut écrire
$$\sin x=x+\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\sin^{(3)}(t)\,\mathrm{d}t.$$
Puisque
$$\forall t\in\mathbb{R},\sin^{(3)}(t)=-\cos(t)\in[-1\,;1]$$
on a
$$\forall x\geq 0,\sin x\geq x-\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2!}\,\mathrm{d}t=x-\frac{1}{6}x^3.$$
D'autre part, il est bien connu que
$$\forall x\geq 0,\sin(x)\leq x.$$
On en déduit
$$\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}-\frac{1}{6}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k^3}\leq\sum_{k=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{k}\right)\leq\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}.$$
En vertu de ce qui précède, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\sin\left(\frac{1}{k}\right)=\ln 2.$$

Exercice 59 : [énoncé]

(a) On a
$$\ln u_n=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right).$$
Or
$$\ln\left(1-\frac{1}{3k}\right)=-\frac{1}{3k}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$
donc
$$\ln u_n=-\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)=-\frac{1}{3}\ln n+C+\mathrm{o}(1)$$
car $\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$ et $\sum_{n\geq 1}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est une série convergente.

(b) Puisque
$$\ln(n^{1/3}u_n)\to\beta$$
on a
$$u_n\sim\frac{\mathrm{e}^\beta}{n^{1/3}}$$
et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 60 : [énoncé]

Posons
$$P_n=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(3k-1)^{1/n}>0.$$
On a
$$\ln(P_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1)-\ln n.$$
Par comparaison série-intégrale
$$\ln 2+\int_1^n\ln(3t-1)\,\mathrm{d}t\leq\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1)\leq\int_1^{n+1}\ln(3t-1)\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_1^n\ln(3t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{3n-1}{3}\ln(3n-1)-n+C=n\ln n+(\ln 3-1)n+\mathrm{O}(\ln n)$$

et donc
$$\sum_{k=1}^{n}\ln(3k-1)=n\ln n+(\ln 3-1)n+\mathrm{O}(\ln n).$$
On en déduit
$$\ln P_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln 3-1$$
puis
$$P_n\to\frac{3}{\mathrm{e}}.$$

Exercice 61 : [énoncé]

(a) Avec convergence des sommes engagées
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(nk+1)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(nk+1)}-\frac{1}{nk^2}\right)=\frac{\pi^2}{6n}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{nk^2(nk+1)}$$
et
$$0\leq\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{nk^2(nk+1)}\leq\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^3}$$
donc
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(nk+1)}\sim\frac{\pi^2}{6n}.$$

(b) Par décomposition en éléments simples et télescopage
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k(n+k)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+k}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\frac{\ln n}{n}.$$

Exercice 62 : [énoncé]

n_p est bien défini car $H_n\to+\infty$.
La suite (n_p) est croissante et évidemment non majorée donc
$$n_p\to+\infty.$$
Par définition de n_p, on a
$$H_{n_p}\geq p\geq H_{n_p-1}.$$
Or
$$H_n=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
donc
$$\ln n_p+\gamma+\mathrm{o}(1)\geq p\geq\ln(n_p-1)+\gamma+\mathrm{o}(1).$$
Puisque
$$\ln(n_p-1)=\ln n_p+\mathrm{o}(1)$$
on obtient
$$p=\ln n_p+\gamma+\mathrm{o}(1)$$
puis
$$n_p=\mathrm{e}^{n-\gamma+\mathrm{o}(1)}\sim\mathrm{e}^{n-\gamma}.$$

Exercice 63 : [énoncé]

(a) Puisque
$$\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\xrightarrow[p\to+\infty]{}+\infty$$
on peut affirmer que l'ensemble
$$\left\{p\in\mathbb{N},\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n}\geq j\right\}$$
est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Celle admet donc un plus petit élément, noté Φ_j.

(b) Par définition de Φ_j, on a
$$j\leq\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}.$$
Or, par comparaison avec une intégrale
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}\leq 1+\int_1^{\Phi_j}\frac{\mathrm{d}t}{t}=1+\ln\Phi_j.$$
On en déduit $\Phi_j\geq\mathrm{e}^{j-1}$ puis $\Phi_j\xrightarrow[j\to+\infty]{}+\infty$.

(c) Par définition de Φ_j, on a
$$\sum_{n=1}^{\Phi_j-1}\frac{1}{n}\leq j\leq\sum_{n=1}^{\Phi_j}\frac{1}{n}.$$

Or, sachant que $\Phi_j \to +\infty$, on a

$$\sum_{n=1}^{\Phi_j} \frac{1}{n} = \ln \Phi_j + \gamma + \mathrm{o}(1) \text{ et } \sum_{n=1}^{\Phi_j - 1} \frac{1}{n} = \ln(\Phi_j - 1) + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Par suite

$$\ln(\Phi_j - 1) + \gamma + \mathrm{o}(1) \leq j \leq \ln \Phi_j + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Or

$$\ln(\Phi_j - 1) = \ln \Phi_j + \mathrm{o}(1)$$

donc

$$j = \ln \Phi_j + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

puis

$$\Phi_j = \mathrm{e}^{j - \gamma + \mathrm{o}(1)}.$$

On en déduit

$$\frac{\Phi_{j+1}}{\Phi_j} = \frac{\mathrm{e}^{j+1-\gamma+\mathrm{o}(1)}}{\mathrm{e}^{j-\gamma+\mathrm{o}(1)}} = \mathrm{e}^{1+\mathrm{o}(1)} \to \mathrm{e}.$$

Exercice 64 : [énoncé]
Posons $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$. On observe que

$$\sum_{k=1}^n k u_n = (n+1) S_n - \sum_{k=1}^n S_k.$$

Par suite

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - \frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \quad (*).$$

Puisque $\frac{S_n}{n u_n} \to a$, on a $S_n \sim a n u_n$.
La série de terme général S_n est une série à termes positifs divergente donc

$$\sum_{k=1}^n S_k \sim a \sum_{k=1}^n k u_k.$$

Par suite

$$\frac{1}{n^2 u_n} \sum_{k=1}^n S_k \sim a w_n.$$

La relation $(*)$ dévient alors

$$w_n = \frac{n+1}{n} v_n - a w_n + \mathrm{o}(w_n)$$

et en on en déduit que

$$w_n \sim \frac{1}{a+1} v_n \to \frac{a}{a+1}.$$

Exercice 65 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n(2n-1)} = \sum_{n=1}^N \frac{2}{(2n-1)} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{2}{n} - 2\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = 2 \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n}.$$

Or

$$\sum_{n=N+1}^{2N} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n} - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln(2N) + \gamma + \mathrm{o}(1) - \ln N - \gamma = \ln 2 + \mathrm{o}(1)$$

puis

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)} = 2 \ln 2.$$

Exercice 66 : [énoncé]
On a

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$ existe.
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)} = \frac{3}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2}$$

donc en exploitant

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \ln N + \gamma + \mathrm{o}(1)$$

on obtient

$$\sum_{k=1}^n \frac{5k+6}{k(k+1)(k+2)} = 3 \ln \frac{n^3}{(n+1)(n+2)^2} + 4 + \mathrm{o}(1) \to 4.$$

Exercice 67 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\frac{4}{2n+1}.$$

Sachant

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}$$

on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=\sum_{n=1}^{N}\frac{3}{n}+\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}-4\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}.$$

Or on sait que

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

donc on conclut que la série converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(2n+1)}=3-4\ln 2.$$

Exercice 68 : [énoncé]

(a) On a

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\ln 2n+\gamma+\mathrm{o}(1)-\ln n-\gamma=\ln 2+\mathrm{o}(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\mathrm{o}(1)$$

donc la série converge et est de somme égale à $\ln 2$.

(b) On a

$$\sum_{k=1}^{3n}u_n=\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3k}=\ln 3n+\gamma+\mathrm{o}(1)-\ln n-\gamma=\ln 3+\mathrm{o}(1)$$

et

$$\sum_{k=1}^{3n+1}u_n=\sum_{k=1}^{3n}u_n+\mathrm{o}(1)\to\ln 3\text{ et }\sum_{k=1}^{3n+2}u_n=\sum_{k=1}^{3n}u_n+\mathrm{o}(1)\to\ln 3$$

donc la série converge et est de somme égale à $\ln 3$.

Exercice 69 : [énoncé]
On a

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

et donc

$$\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}\sim\frac{3}{n^3}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, la série numérique $\sum\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}$ converge
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{6}{n(n+1)(2n+1)}=\frac{6}{n}+\frac{6}{n+1}-\frac{24}{2n+1}.$$

En introduisant la constante d'Euler γ, on sait

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}=\ln N+\gamma+\mathrm{o}(1).$$

Par décalage d'indice

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=2}^{N+1}\frac{1}{n}=\ln(N+1)+\gamma-1+\mathrm{o}(1)$$

et en introduisant dans la somme les inverses des nombres pairs absents, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n+1}=\sum_{n=2}^{2N+1}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2n}=\ln(2N+1)-\frac{1}{2}\ln N+\frac{1}{2}\gamma-1+\mathrm{o}(1).$$

On en déduit

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=\ln\frac{N^{18}(N+1)^6}{(2N+1)^{24}}+18+\mathrm{o}(1)$$

puis à la limite

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{1^2+2^2+\cdots+n^2}=18-24\ln 2.$$

Exercice 70 : [énoncé]

$$\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}=\frac{1}{4n}-\frac{3}{4n}+\frac{1}{4n}+\frac{1}{4n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc la série étudiée est absolument convergente.
On a

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\sum_{k=1}^{4N+4}\frac{1}{k}-4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}.$$

Or

$$4\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{4n+2}=2\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2n+1}=2\sum_{k=1}^{2N+1}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2k}.$$

Par le développement

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1)$$

on parvient à

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=\ln(4N+4)+\gamma-2\ln(2N+1)-2\gamma+\ln N+\gamma+\mathrm{o}(1)\to 0.$$

Ainsi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}-\frac{3}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}+\frac{1}{4n+4}\right)=0$$

(ce qui change du $\ln 2$ traditionnel... ;-)

Exercice 71 : [énoncé]

(a) f est décroissante sur $[\mathrm{e}\,;+\infty[$. Pour $p\geq 4$,

$$\int_p^{p+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq\frac{\ln p}{p}\leq\int_{p-1}^{p}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $u_n=\frac{\ln 2}{2}+\frac{\ln 3}{3}+v_n$ avec

$$\int_4^{n+1}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq v_n\leq\int_3^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$$

donc $v_n\sim\frac{1}{2}(\ln n)^2$.
Étudions $w_n=u_n-\frac{1}{2}(\ln n)^2$, $w_n-w_{n-1}=\frac{\ln n}{n}-\int_{n-1}^{n}\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t\leq 0$ donc (w_n) est décroissante.
D'autre part les calculs précédents donnent (w_n) minorée et donc on peut conclure que w_n converge. Ainsi

$$u_n=\frac{1}{2}(\ln n)^2+C+\mathrm{o}(1).$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{2n}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n-1)}{2n-1}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln(2n)}{n}-\sum_{n=1}^{2N}\frac{\ln(n)}{n}=\ln 2\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}+u_N-u_{2N}.$$

Par le développement asymptotique précédent, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\ln 2.\ln n+\ln(2)\gamma+\frac{1}{2}(\ln n)^2+C-\frac{1}{2}(\ln 2n)^2-C+\mathrm{o}(1)$$

et après simplification

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{2N+1}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}(1)\to\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}=\frac{1}{2}\ln(2)(2\gamma-\ln 2).$$

N'est-ce pas magnifique ?

Exercice 72 : [énoncé]

(a) Par sommation de relations de comparaison (on compare au terme général d'une série à termes positifs convergente), on peut écrire avec existence

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}\right).$$

Par comparaison avec une intégrale, on poursuit

$$\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

(b) Pour $k \geq 1$, on peut écrire

$$\ln(k+1) - \ln(k) = \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{=} \frac{1}{k} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

En sommant pour k allant de 2 jusqu'à $n-1$, il vient

$$\ln n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

avec

$$\sum_{k=2}^{n-1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right) = \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=-\gamma} - \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \mathrm{O}\left(\frac{1}{k^2}\right)}_{=\mathrm{O}(1/n)}.$$

En ajoutant un terme $1/n$ et en réorganisant les membres, on obtient l'identité voulue.

(c) Posons S_n la somme partielle de rang n. On a

$$\left\lfloor \frac{\ln n}{\ln 2} \right\rfloor = k \iff 2^k \leq n < 2^{k+1}.$$

On en déduit

$$S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1} = \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} k = k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

En séparant les termes d'indices pairs de ceux d'indices impairs

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p} - \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2p+1}.$$

On adjoint les termes pairs intermédiaires à la deuxième somme

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p} - \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} S_{2^{N+1}-1} &= \sum_{k=1}^{N} \left(S_{2^{k+1}-1} - S_{2^k-1}\right) + S_1 \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(k \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p}\right) - \sum_{k=1}^{N} \left(k \sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Après glissement d'indice dans la deuxième somme puis simplification

$$\begin{aligned} S_{2^{N+1}-1} &= \sum_{k=1}^{N} \left(k \sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p}\right) - \sum_{k=2}^{N+1} \left((k-1) \sum_{n=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{n}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{p=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{p}\right) - N \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{2^N-1} \frac{1}{n} - N \sum_{n=2^N}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{n} \\ &= \ln\left(2^N - 1\right) + \gamma + \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^N}\right) - N \ln 2 - N\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^N}\right) \xrightarrow[N \to +\infty]{} \gamma. \end{aligned}$$

Cette étude ne suffit pas pour conclure, il faut encore étudier la limite de (S_n). Pour $n \geq 1$, introduisons k tel que $2^k \leq n < 2^{k+1}$. On a

$$S_n - S_{2^k-1} = k \sum_{p=2^k}^{n} \frac{(-1)^p}{p}.$$

Par application du critère spécial, cette somme est encadrée par deux sommes partielles consécutives, par exemple, celles de rangs $2^k - 1$ (qui vaut 0) et 2^k (qui vaut $1/2^k$). On en déduit :

$$\left|S_n - S_{2^k-1}\right| \leq \frac{k}{2^k} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

On peut alors conclure que la série étudiée converge et sa somme vaut γ.

Exercice 73 : [énoncé]

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u = -\int_0^1 \frac{v^n-1}{v-1} = -\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} v^k\,\mathrm{d}v$$

puis

$$\int_0^1 \frac{(1-u)^n - 1}{u}\,\mathrm{d}u = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = -\ln n - \gamma + \mathrm{o}(1)$$

donc $u_n \to -\gamma$

Exercice 74 : [énoncé]

(a) C'est la convergence de u_n vers ℓ.

(b) On a

$$|v_n - \ell| = \frac{1}{n}\big|(u_1-\ell)+\dots+(u_n-\ell)\big|$$

et par l'inégalité triangulaire

$$|v_n - \ell| \le \frac{|u_1-\ell|+\dots+|u_{n_0}-\ell|}{n} + \frac{|u_{n_0+1}-\ell|+\dots+|u_n-\ell|}{n}.$$

On conclut en exploitant $|u_k-\ell| \le \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k > n_0$.

(c) Quand $n \to +\infty$,

$$\frac{|u_1-\ell|+\dots+|u_{n_0}-\ell|}{n} = \frac{C^{te}}{n} \to 0$$

donc pour n assez grand

$$\frac{|u_1-\ell|+\dots+|u_{n_0}-\ell|}{n} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi il existe un rang n_1 au-delà duquel

$$|v_n-\ell| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n-n_0}{n}\frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon.$$

(d) On applique le résultat précédent à la suite de terme général $u_{n+1}-u_n$ et on peut affirmer

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1}-u_k \to \alpha.$$

Après télescopage

$$\frac{1}{n}(u_n-u_0) \to \alpha$$

puis

$$\frac{1}{n}u_n \to \alpha$$

et enfin

$$u_n \sim \alpha n.$$

Exercice 75 : [énoncé]

(a) Supposons $\ell = 0$.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n > n_0, |u_n| \le \varepsilon/2.$$

On a alors

$$|v_n| \le \left|\frac{u_1+\dots+n_0u_{n_0}}{n^2}\right| + \left|\frac{(n_0+1)u_{n_0+1}+\dots+nu_n}{n^2}\right| \le \frac{C^{te}}{n^2} + \frac{\varepsilon}{2} \le \varepsilon$$

pour n assez grand.
Ainsi $v_n \to 0$.
Cas général : $u_n = \ell + w_n$ avec $\omega_n \to 0$:

$$v_n = \frac{n(n+1)}{2n^2}\ell + \frac{w_1+\dots+nw_n}{n^2} \to \frac{\ell}{2}.$$

(b) On peut écrire

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{(u_n-u_{n-1})+\dots+(u_1-u_0)}{n^2} + \frac{u_0}{n^2}$$

donc

$$\frac{u_n}{n^2} = \frac{n\frac{(u_n-u_{n-1})}{n}+\dots+\frac{(u_1-u_0)}{1}}{n^2} + \frac{u_0}{n^2} \to \frac{\ell}{2}.$$

Exercice 76 : [énoncé]
On a $\ln u_{n+1} - \ln u_n \to \ln \ell$ donc par Césaro

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln u_k - \ln u_{k-1} \to \ln \ell$$

d'où
$$\frac{1}{n}\ln u_n \to \ln \ell$$
puis
$$\sqrt[n]{u_n} \to \ell.$$

Exercice 77 : [énoncé]

(a) La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ car
$$\forall x > 0, \ln(1+x) > 0.$$
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est décroissante car
$$\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x.$$
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est aussi minorée par 0 donc convergente.
En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que $(u_n)_{n\geq 0}$ tend vers 0.

(b)
$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n u_{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$
car $u_{n+1} \sim u_n$.

(c) Par le théorème de Césaro
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$
puis
$$\frac{1}{n}\frac{1}{u_n} \to \frac{1}{2}.$$
Finalement
$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n}.$$

Exercice 78 : [énoncé]

(a) La suite étudiée est bien définie et à termes tous positifs. On en déduit
$$0 \leq u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$
et donc par encadrement $u_n \to 0$.

(b) Pour $n \geq 1$, on peut écrire $v_n = e^{-u_{n-1}}$ et alors $v_n \to 1$ par composition de limites.

(c) On en déduit
$$u_n \sim 1/n.$$
La série $\sum u_n$ est alors divergente par équivalence de séries à termes positifs.
On a aussi
$$u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} = \frac{1 - u_{n-1} + o(u_{n-1})}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
donc
$$(-1)^n u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
La série $\sum(-1)^n/n$ converge en vertu du critère spéciale et $\sum O(1/n^2)$ est absolument convergente par argument de comparaison. Par opération sur les séries convergentes, la série $\sum(-1)^n u_n$ converge.

Exercice 79 : [énoncé]

La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente. En passant la relation de récurrence à la limite, on obtient que (a_n) tend vers 0.
Puisque
$$\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2} = \frac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{a_n^2 a_{n+1}^2} \sim \frac{1}{3}$$
on obtient par le théorème de Césaro
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{a_{k+1}^2} - \frac{1}{a_k^2}\right) \to \frac{1}{3}$$
puis
$$\frac{1}{n}\frac{1}{a_n^2} \to \frac{1}{3}.$$
Finalement $a_n \sim \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{n}}$ et la série étudiée est divergente.

Exercice 80 : [énoncé]

La suite (u_n) est à terme strictement positifs car $u_0 > 0$ et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ laisse stable l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
Puisque pour tout $x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$, la suite (u_n) est décroissante.

Puisque décroissante et minorée, la suite (u_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ln(1+\ell) = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} \sim \frac{\frac{1}{2}u_n^2}{u_n^2} \to \frac{1}{2}.$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to \frac{1}{2}$$

et donc

$$\frac{1}{nu_n} \to \frac{1}{2}.$$

On en déduit $u_n \sim \frac{2}{n}$ et donc la série de terme général u_n diverge.

Exercice 81 : [énoncé]

(a) La suite (a_n) est bien définie et à termes positifs puisque pour tout $x \geq 0$, $1 - \mathrm{e}^{-x} \geq 0$.
Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \leq 1 + x$, on a $a_{n+1} \leq a_n$ et la suite (a_n) est donc décroissante.
Puisque décroissante et minorée, (a_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\ell = 1 - \mathrm{e}^{-\ell}$. On en déduit $\ell = 0$.
Finalement (a_n) décroît vers 0.

(b) Par le critère spécial des séries alternées, $\sum(-1)^n a_n$ converge.

(c) Puisque $a_n \to 0$, on peut écrire $a_{n+1} = 1 - \mathrm{e}^{-a_n} = a_n - \frac{1}{2}a_n^2 + \mathrm{o}(a_n^2)$.
Par suite $a_n^2 \sim -2(a_{n+1} - a_n)$.
Par équivalence de séries à termes positifs, la nature de la série de terme général a_n^2 est celle de la série de terme général $a_{n+1} - a_n$ qui est celle de la suite de terme général a_n. Finalement $\sum a_n^2$ converge.

(d) La nature de la série de terme général $\ln(a_{n+1}/a_n)$ est celle de la suite de terme général $\ln(a_n)$. C'est donc une série divergente. Or

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}a_n + \mathrm{o}(a_n)\right) \sim -\frac{1}{2}a_n.$$

Par équivalence de série de terme de signe constant, on peut affirmer $\sum a_n$ diverge.

Exercice 82 : [énoncé]
Dans le cas où $u_0 = 0$, la suite est nulle.
Dans le cas où $u_0 = 1$, la suite est nulle à partir du rang 1
On suppose désormais ces cas exclus.

(a) La suite (u_n) est à termes dans $]0\,;1[$ car l'application $x \mapsto x - x^2$ laisse stable cet intervalle.
La suite (u_n) est décroissante et minorée donc convergente. Sa limite ℓ vérifie $\ell = \ell - \ell^2$ et donc $\ell = 0$.
Finalement (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_n^2}{u_n^2 - u_n^3} \to 1.$$

Par le théorème de Cesaro,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \to 1$$

et donc $\frac{1}{nu_n} \to 1$.
On en déduit que $u_n \sim \frac{1}{n}$ et donc $\sum u_n$ diverge.

(b) Comme ci-dessus, on obtient que (u_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

$$\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} = \frac{u_n^\alpha - u_{n+1}^\alpha}{(u_n u_{n+1})^\alpha} \sim \frac{\alpha u_n^\alpha}{u_{n+1}^\alpha} \to \alpha.$$

Par le théorème de Cesaro, $\frac{1}{nu_n^\alpha} \to \alpha$ et donc

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{1/\alpha}}$$

avec $\lambda > 0$.
Si $\alpha \in]0\,;1[$, $\sum u_n$ converge et si $\alpha \geq 1$, $\sum u_n$ diverge.

Exercice 83 : [énoncé]
Posons $v_n = u_n^\beta$. La suite (v_n) vérifie $v_n \in]0\,;1]$ et $v_{n+1} = \sin(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Puisque la fonction sinus laisse stable l'intervalle $]0\,;1]$, on peut affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0\,;1]$.
De plus, pour $x \geq 0$, $\sin x \leq x$ donc la suite (v_n) est décroissante.
Puisque décroissante et minorée, (v_n) converge et sa limite ℓ vérifie $\sin \ell = \ell$ ce qui donne $\ell = 0$.
Finalement (v_n) décroît vers 0 par valeurs strictement supérieures.

On a
$$\frac{1}{v_{n+1}^2}-\frac{1}{v_n^2}=\frac{(v_n-v_{n+1})(v_{n+1}+v_n)}{v_n^2v_{n+1}^2}\sim\frac{\frac{1}{6}v_n^3\times 2v_n}{v_n^4}\to\frac{1}{3}.$$
Par le théorème de Cesaro,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{v_{k+1}^2}-\frac{1}{v_k^2}\right)\to\frac{1}{3}$$
et donc $\frac{1}{nv_n^2}\to\frac{1}{3}$. On en déduit $v_n\sim\frac{\sqrt{3}}{n^{1/2}}$ puis
$$u_n\sim\frac{\lambda}{n^{1/(2\beta)}}$$
avec $\lambda>0$.
Pour $\beta\in\,]0\,;1/2[$, $\sum v_n$ converge et pour $\beta\geq 1/2$, $\sum v_n$ diverge.

Exercice 84 : [énoncé]

(a) Notons la suite (u_n) est bien définie, strictement positive et croissante.
Si $\alpha>1$, on a
$$u_{n+1}\leq u_n+\frac{1}{n^\alpha u_1}$$
puis par récurrence
$$u_n\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha u_1}.$$
Ainsi (u_n) converge.
Si (u_n) converge. Posons $\ell=\lim u_n$, on observe $\ell>0$. On a
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$$
or la série de terme général $u_{n+1}-u_n$ est convergente donc $\alpha>1$.

(b) On suppose $\alpha\leq 1$. On a
$$u_{n+1}^2-u_n^2=\frac{2}{n^\alpha}+\frac{1}{n^{2\alpha}u_n^2}\sim\frac{2}{n^\alpha}$$
donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs divergentes
$$u_n^2\sim 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}$$
or par comparaison série-intégrale,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\sim\frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\text{ quand }\alpha<1$$
et
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n\text{ quand }\alpha=1.$$
On conclut alors
$$u_n\sim\sqrt{\frac{2n^{1-\alpha}}{1-\alpha}}\text{ si }\alpha<1\text{ et }u_n\sim\sqrt{2\ln n}\text{ si }\alpha=1.$$

(c) On suppose $\alpha>1$. Posons $v_n=u_n-\ell$. On a
$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{n^\alpha u_n}\sim\frac{1}{n^\alpha\ell}$$
donc par sommation de relation de comparaison de séries à termes positifs convergentes
$$\sum_{k=n}^{+\infty}v_{k+1}-v_k=-v_n\sim\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell n^\alpha}\sim\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}$$
puis
$$v_n=\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{\ell n^{\alpha-1}}.$$

Exercice 85 : [énoncé]

On observe que $u_{n+1}^n-u_n^{n-1}=n$.
Puisque $\sum n$ une série à termes positifs divergente on peut, par sommation de relation de comparaison, affirmer
$$u_{n+1}^n\sim\sum_{k=1}^{n}k\sim\frac{1}{2}n^2.$$
En composant avec le logarithme népérien cet équivalent de limite infini, on obtient
$$n\ln u_{n+1}\sim 2\ln n$$
puis
$$\ln u_{n+1}\sim 2\frac{\ln n}{n}.$$

Par suite $u_{n+1}\to 1$ puis
$$u_{n+1}=1+2\frac{\ln n}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$
Posons
$$v_n=u_{n+1}-1-2\frac{\ln n}{n}.$$
L'égalité
$$u_{n+1}^n=\exp\left(n\ln\left(1+2\frac{\ln n}{n}+v_n\right)\right)$$
donne
$$u_{n+1}^n=\exp\bigl(2\ln n+nv_n+\mathrm{O}\bigl((\ln n)^2/n\bigr)\bigr).$$
Or $\frac{2u_{n+1}^n}{n^2}\to 1$ donc
$$\exp\bigl(\ln(2)+nv_n+\mathrm{O}\bigl((\ln n)^2/n\bigr)\bigr)\to 1$$
puis $nv_n\to-\ln(2)$. Ainsi
$$u_{n+1}=1+2\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln 2}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 86 : [énoncé]
Posons
$$P_n=\prod_{k=1}^n\left|\frac{2n-k}{z_n-k}\right|.$$
On a
$$\ln P_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\ln\frac{|z_n-k|^2}{|2n-k|^2}.$$
Puisque
$$|z_n-k|^2=(2n)^2-4nk\cos\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)+k^2=(2n-k)^2+8nk\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)$$
on obtient
$$\ln P_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{8nk}{(2n-k)^2}\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)\right).$$
Sachant $\sin^2 u=u^2+\mathrm{O}(u^4)$, on peut écrire
$$\sin^2\left(\frac{t}{2\sqrt{n}}\right)=\frac{t^2}{4n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ainsi
$$\ln P_n=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\ln\left(1+\frac{2kt^2}{(2n-k)^2}+\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
Sachant $\ln(1+x)\le x$, on a
$$-2\ln(P_n)\le\sum_{k=1}^n\left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2}+\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$
Posons S_n le second membre de cette comparaison. D'une part
$$\left|\sum_{k=1}^n\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right|\le\sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\to 0.$$
D'autre part
$$\sum_{k=1}^n\frac{2k}{(2n-k)^2}=\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{2(2n-\ell)}{\ell^2}=4n\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell^2}-2\sum_{\ell=n}^{2n-1}\frac{1}{\ell}$$
avec
$$\sum_{\ell=n}^{+\infty}\frac{1}{\ell^2}\sim\frac{1}{n}\text{ et }\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{\ell}=\ln n+\gamma+\mathrm{o}(1).$$
Après calculs asymptotiques, on obtient
$$S_n\to(2-2\ln 2)t^2.$$
Sachant $\ln(1+x)\ge x-\frac{1}{2}x^2$, on a
$$-2\ln P_n\ge S_n-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2}+\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2.$$
Puisque $0\le\frac{k}{(2n-k)^2}\le\frac{1}{n}$,
$$\sum_{k=1}^n\left(\frac{2kt^2}{(2n-k)^2}+\frac{k}{(2n-k)^2}\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^2=\sum_{k=1}^n\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\to 0.$$
Finalement $-2\ln P_n$ est encadré par deux quantités de limite $(2-2\ln 2)t^2$. On en déduit
$$P_n\to\exp\bigl((\ln 2-1)t^2\bigr).$$

Exercice 87 : [énoncé]
Soient $\sum u_n$ une série semi-convergente et $\sum v_n$ une série absolument convergente. La série $\sum u_n + v_n$ est convergente et si celle-ci était absolument convergente alors $\sum u_n$ le serait aussi car $|u_n| \leq |u_n + v_n| + |v_n|$. La série $\sum u_n + v_n$ n'est donc que semi-convergente.

Exercice 88 : [énoncé]
Pour

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \leq \frac{k(k+1)}{2}$$

on pose

$$u_n = \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Ceci définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de sorte que ses premiers termes sont :

$$1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \dots$$

Les termes sommées tendent vers 0 et les sommes partielles oscillent entre 0 et 1.

Exercice 89 : [énoncé]

(a) Pour $u_n = (-1)^n$, la série de terme général u_n est divergente et puisque ces sommes partielles valent 0 ou 1, elle enveloppe tout réel de l'intervalle $[0\,;1]$.
Pour $u_n = (-1)^n/(n+1)$, la série de terme général u_n satisfait le critère spécial des séries alternées et donc elle converge et la valeur absolue de son reste est inférieure à son premier terme. Cette série enveloppe donc sa somme, à savoir $\ln 2$.
Pour $u_n = 1/2^n$, la série de terme général u_n converge. Puisque $u_n \to 0$, le seul réel qu'elle peut envelopper est sa somme, or

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

n'est pas inférieur à u_{n+1}. Cette série convergente n'enveloppe aucun réel.

(b) Posons pour la suite de notre étude

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

On a

$$\theta_{n+2}u_{n+2} = A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}.$$

Puisque $\theta_{n+2} > 0$ et $\theta_{n+1} - 1 < 0$, on peut affirmer que u_{n+2} et u_{n+1} sont de signes opposés.
Puisque $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ est du signe de u_{n+1}, les réels $A - S_n$ et $A - S_{n+1}$ sont de signes opposés et donc A est encadré par S_n et S_{n+1}.

(c) Puisque $A - S_n$ est du signe de u_{n+1}, on peut écrire $A - S_n = \theta_{n+1}u_{n+1}$ avec $\theta_{n+1} \in \mathbb{R}_+$.
Puisque $A - S_{n+1} = (\theta_{n+1} - 1)u_{n+1}$ est du signe de u_{n+2} et puisque u_{n+1} et u_{n+2} sont de signes opposés, on a $\theta_{n+1} - 1 \leq 0$ et donc $\theta_{n+1} \in [0\,;1]$.
On ne peut rien dire de plus, sauf à savoir que $A - S_n$ est non nul pour tout $n \in \mathbb{N}$.
En effet pour $u_n = (-1)^n$ et $A = 1$, la série de terme général u_n est alternée et
pour n pair : $A - S_n = 1 - 1 = 0$ est du signe de u_{n+1}.
pour n impair : $A - S_n = 1 - 0 = 1$ est du signe de u_{n+1}.
Si en revanche, on suppose $A - S_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, obtenir $\theta_{n+1} \in \,]0\,;1[$ est désormais immédiat.

(d) Par l'absurde, supposons $u_{n+1}, u_{n+2} > 0$.
On a $A - S_n \leq u_{n+1}$ donc $A - S_{n+1} \leq 0$ puis $A - S_{n+2} \leq -u_{n+2}$ et donc $|A - S_{n+2}| \geq |u_{n+2}|$. Or $|A - S_{n+2}| \leq |u_{n+3}|$ et $|u_{n+3}| < |u_{n+2}|$, c'est absurde et donc u_{n+1} et u_{n+2} ne sont pas tous deux strictement positifs. Un raisonnement symétrique établit qu'ils ne sont pas non plus tous deux strictement négatifs et donc la série de terme général u_n est alternée à partir du rang 1 (on ne peut rien affirmer pour le rang 0).
Puisque $A - S_{n+1} = A - S_n - u_{n+1}$, on a
$-|u_{n+1}| - u_{n+1} \leq A - S_{n+1} \leq |u_{n+1}| - u_{n+1}$.
Si $u_{n+1} > 0$ alors $A - S_{n+1} \leq 0$ et donc du signe de u_{n+2}.
Si $u_{n+1} < 0$ alors $A - S_{n+1} \geq 0$ et donc à nouveau du signe de u_{n+2}.
Enfin $A - S_{n+1}$ n'est pas nul, car sinon
$A - S_{n+3} = A - S_{n+1} - (u_{n+2} + u_{n+3}) = -(u_{n+2} + u_{n+3})$ est de signe strict opposé à u_{n+2} et n'est donc pas du signe de u_{n+4}.
On peut alors exploiter le résultat du c) et affirmer que la série de terme général u_n encadre strictement A.

Exercice 90 : [énoncé]

(a) Il est immédiat de vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles. L'application
$\varphi\colon E \to \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(u) = (u_0, u_1)$ étant un isomorphisme (car un élément de E est déterminé de façon unique par la donnée de ses deux premiers termes), on peut affirmer que l'espace E est de dimension 2.

(b) Il est immédiat de vérifier que les suites (a_n) et (b_n) sont formés d'entiers naturels, qu'elles sont croissantes à partir du rang 1 et qu'elles sont à termes strictement positifs à partir du rang 2.
Ainsi
$$\forall n \geq 2, a_n, b_n \geq 1$$
et donc
$$a_{n+2} \geq n+1 \text{ et } b_{n+2} \geq n+1.$$
Ainsi les deux suites (a_n) et (b_n) tendent vers $+\infty$ en croissant (seulement à partir du rang 1 pour la première)

(c) On a
$$w_{n+1} = \big((n+1)a_{n+1} + a_n\big)b_{n+1} - a_{n+1}\big((n+1)b_{n+1} + b_n\big).$$
Après simplification, on obtient
$$w_{n+1} = -w_n$$
et donc
$$w_n = (-1)^n w_0 = (-1)^{n+1}.$$

(d) On a
$$c_{n+1} - c_n = \frac{w_n}{b_n b_{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1}}{b_n b_{n+1}}.$$
Puisque la suite de terme général $b_n b_{n+1}$ croît vers $+\infty$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées et affirmer que la série numérique $\sum(c_{n+1} - c_n)$ converge. Par conséquent la suite (c_n) converge.

(e) On a
$$\ell - c_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(c_{k+1} - c_k).$$
Par le critère spécial des séries alternées, on peut borner ce reste par la valeur absolue de son premier terme
$$|\ell - c_n| \leq \frac{1}{b_n b_{n+1}}.$$
On peut ainsi écrire
$$c_n = \ell + \mathrm{o}\left(\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right).$$
On a alors
$$a_n + r b_n = b_n(c_n + r) = b_n(\ell + r) + \mathrm{o}\left(\frac{1}{b_{n+1}}\right).$$
Sachant $b_n \to +\infty$, on peut affirmer
$$a_n + r b_n \to 0 \iff r = -\ell.$$

Exercice 91 : [énoncé]

(a) Puisque $|d_n e_n| \leq e_n$ avec convergence de $\sum e_n$, on peut affirmer que les éléments de G sont des sommes de séries absolument convergentes. Les éléments de G sont donc bien définis et puisque
$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e_n = s$$
on a $G \subset [-s\,;s]$. Enfin $s \in G$ avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $-s \in G$ avec $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = (-1)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Si e est une base discrète alors $G = [-s\,;s]$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $e_N > r_N$.
Introduisons
$$x = \sum_{k=0}^{N-1} e_k \in [-s\,;s]$$
(comprendre $x = 0$ si $N = 0$).
Soit
$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n \text{ avec } d_n \in \{-1, 1\}.$$
S'il existe $k \leq N$ tel que $d_k = -1$ alors
$$y \leq \sum_{n=0}^{+\infty} d_n e_n - 2e_k = s - 2e_k.$$
Or
$$e_k \geq e_N$$
donc
$$y < s - 2e_N = x + r_N - e_N < x.$$
Si $d_k = 1$ pour tout $k \leq N$ alors
$$y = \sum_{n=0}^{N} e_k + \sum_{n=N+1}^{+\infty} d_k e_k \geq x + e_N - r_N > x.$$
Dans tous les cas, $y \neq x$ et donc $x \notin G$. C'est absurde.

(c) Raisonnons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Cas $n = 0$: on a bien

$$|t - t_0| = |t| \le s = e_0 + r_0.$$

Supposons la propriété vérifiée au rang $n \ge 0$.
Si $t_n \le t$ alors

$$t - t_{n+1} = t - t_n - e_n \le r_n$$

et

$$t - t_{n+1} \ge -e_n \ge -r_n.$$

Ainsi

$$|t - t_{n+1}| \le r_n = e_{n+1} + r_{n+1}.$$

Si $t_n > t$ alors

$$t_{n+1} - t = t_n - t - e_n$$

et l'étude est analogue.
Récurrence établie.
On en déduit que $t_n \to t$ puis que $t \in G$.
En conclusion

e est une base discrète si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, e_n \le r_n$.

(d) La condition précédente est vérifiée et, puisque $s = 2$, on obtient $G = [-2\,;2]$.
On peut écrire

$$0 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)\frac{1}{2^n}, 1 = 1 + \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$$

et

$$2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^n}.$$

En remarquant

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$$

on peut proposer

$$\frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}.$$

Il peut y avoir unicité de la suite (d_n) (c'est le cas pour $x = s$) ou non (c'est le cas pour $x = 0$ où lorsque (d_n) convient, $(-d_n)$ convient aussi).

Exercice 92 : [énoncé]
On remarque

$$v_n \ge u_{2^n} + u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}-1}$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^{n} v_k \ge \sum_{k=1}^{2^{n+1}-1} u_k.$$

Ainsi, si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.
Aussi

$$u_{2^n} + \cdots + u_{2^{n+1}-1} \ge \frac{1}{2}v_{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \ge \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} v_k.$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge alors $\sum v_n$ aussi par comparaison de séries à termes positifs.

Exercice 93 : [énoncé]

(a) On remarque

$$p^n(p-1)u_{p^{n+1}} \le \sum_{k=p^n}^{p^{n+1}-1} u_k \le p^n(p-1)u_{p^n}$$

et donc

$$\frac{p-1}{p}\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \le \sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \le (p-1)\sum_{\ell=0}^{n} v_\ell.$$

Si $\sum u_n$ converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell \le \frac{p}{p-1}\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.
Si $\sum v_n$ converge alors la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \le (p-1)\sum_{\ell=0}^{+\infty} v_\ell$$

et puisque les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$.

(b) Prenons $p = 2$ et

$$u_n = \frac{1}{n \ln n}.$$

La suite (u_n) est décroissante positive et

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2}.$$

Puisque $\sum v_n$ diverge, $\sum u_n$ diverge aussi.
Prenons toujours $p = 2$ et cette fois-ci

$$u_n = \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}.$$

La suite (u_n) est décroissante positive et

$$v_n = 2^n u_{2^n} = \frac{1}{n \ln 2 \ln(n \ln 2)} \sim \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n \ln n}$$

et à nouveau nous pouvons conclure à la divergence de $\sum u_n$.

Exercice 94 : [énoncé]
On remarque

$$(2n+1)u_{(n+1)^2} \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq (2n+1)u_{n^2}$$

et donc

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} (2\ell-1)u_{\ell^2} \leq \sum_{k=1}^{(n+1)^2-1} u_k \leq \sum_{\ell=0}^{n} (2\ell+1)u_{\ell^2}.$$

Si $\sum u_n$ converge alors la première inégalité donne

$$\sum_{\ell=1}^{n+1} v_\ell = \sum_{\ell=1}^{n+1} \ell u_{\ell^2} \leq \sum_{\ell=1}^{n+1} (2\ell-1)u_{\ell^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$

ce qui assure la convergence de la série $\sum v_n$ car c'est une série à termes positifs aux sommes partielles majorées.
Si $\sum v_n$ converge alors la série $\sum u_{n^2}$ converge aussi car

$$0 \leq u_{n^2} \leq n u_{n^2} = v_n.$$

On en déduit la convergence de $\sum (2n+1)u_{n^2}$ et la deuxième inégalité de l'encadrement précédent donne

$$\sum_{k=1}^{p^{n+1}-1} u_k \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} (2\ell+1)u_{\ell^2}.$$

Puisque les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont croissantes et que ce qui précède permet de les majorer, on peut conclure la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 95 : [énoncé]
Supposons que $\sum v_n$ converge. Pour $n^2 \leq k < (n+1)^2$,

$$0 \leq u_k \leq u_{n^2} \leq \frac{v_n}{n^2}$$

donc

$$0 \leq \sum_{k=n^2}^{(n+1)^2-1} u_k \leq v_n \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2}$$

ce qui permet d'affirmer que les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum u_n$ sont majorées et donc $\sum u_n$ converge.
Inversement, pour $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ on a $v_n = \frac{1}{n}$ de sorte que $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge.

Exercice 96 : [énoncé]
Commençons par justifier l'existence des produits infinis introduits.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les facteurs étant tous strictement positifs, on peut considérer le logarithme du produit

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n} \left(1+q^k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+q^k\right) \quad \text{avec} \quad \ln\left(1+q^k\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} q^k \quad \text{car} \quad q^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0.$$

La série géométrique $\sum q^k$ converge absolument et donc $\sum \ln(1+q^k)$ aussi [11]. On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n} \left(1+q^k\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^S \quad \text{avec} \quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln\left(1+q^k\right).$$

11. On raisonne par convergence absolue et non par équivalence de séries à termes positifs pour gérer le cas où q est négatif.

De la même façon, on obtient

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{S'} \quad \text{avec} \quad S'=\sum_{k=0}^{+\infty}\ln\left(1-q^{2k-1}\right).$$

Dans le premier produit, on écrit $1+q^k=\dfrac{1-q^{2k}}{1-q^k}$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{1-q^{2k}}{1-q^k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right).$$

En réorganisant les facteurs

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)=\frac{\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)}{\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^k\right)}.$$

Au numérateur, on trouve le produit des $1-q^\ell$ pour tous les indices ℓ allant de 1 à $2n$ et, après simplification,

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)=\prod_{k=n+1}^{2n}\left(1-q^k\right).$$

Or

$$\ln\left(\prod_{k=n+1}^{2n}\left(1-q^k\right)\right)=\sum_{k=n+1}^{2n}\ln\left(1-q^k\right)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\ln\left(1-q^k\right)-\sum_{k=2n+1}^{+\infty}\ln\left(1-q^k\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

car le reste d'une série convergente[12] est de limite nulle.
On en déduit

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+q^k\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-q^{2k-1}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}1 \quad \text{et donc} \quad \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1+q^k\right)\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-q^{2k-1}\right)=1.$$

12. On acquiert l'absolue convergence de la série par les mêmes démarches qu'au-dessus.

Exercice 97 : [énoncé]

On transforme le produit (P_n) *en une somme par la fonction logarithme. On prend garde cependant à n'appliquer celle-ci qu'aux facteurs strictement positifs.*

Puisque la série $\sum a_n$ converge, son terme général tend vers 0. Il existe donc un rang n_0 au delà duquel $|a_n|<1$. On applique la fonction logarithme aux facteurs du produit d'indices supérieurs à n_0

$$\ln\left(\prod_{k=n_0}^{n}(1+a_k)\right)=\sum_{k=n_0}^{n}\ln(1+a_k).$$

La suite (a_n) étant de limite nulle, le développement limité
$\ln(1+u)=u-\frac{1}{2}u^2+\mathrm{o}\left(u^2\right)$ quand u tend vers 0 permet d'écrire

$$\ln(1+a_n)\underset{n\to+\infty}{=}a_n-\frac{1}{2}a_n^2+\mathrm{o}\left(a_n^2\right)=a_n-b_n \quad \text{avec} \quad b_n\underset{n\to+\infty}{=}\frac{1}{2}a_n^2+\mathrm{o}\left(a_n^2\right).$$

La série $\sum a_n$ étant convergente, la nature de la série de terme général $\ln(1+a_n)$ se déduit de la nature de la série $\sum b_n$.
Cas: La série $\sum a_n^2$ converge. Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général b_n converge et donc aussi celle de terme général $\ln(1+a_n)$. On en déduit

$$P_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^S\cdot\prod_{k=0}^{n_0-1}(1+a_k)\in\mathbb{R}^* \quad \text{avec} \quad S=\sum_{k=n_0}^{+\infty}\ln(1+a_k).$$

Cas: La série $\sum a_n^2$ diverge. Par équivalence de séries à termes positifs, la série de terme général b_n diverge.

Les sommes partielles d'une séries à termes positifs divergente croissent vers $+\infty$.

Les sommes partielles de la série $\sum b_n$ tendent vers $+\infty$ et, par différence, les sommes partielles de la série de terme général $\ln(1+a_n)$ tendent vers $-\infty$. Par opérations sur les limites, on conclut que la suite (P_n) tend vers 0.