

Familles sommables

Ensemble dénombrable

Exercice 1 [00245] [Correction]

Existe-t-il une fonction continue f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} envoyant les rationnels dans les irrationnels et les irrationnels dans les rationnels ?

Exercice 2 [04005] [Correction]

On souhaite établir que l'ensemble $\wp(\mathbb{N})$ des parties de \mathbb{N} n'est pas dénombrable. Pour cela on raisonne par l'absurde et l'on suppose qu'il existe une bijection φ de \mathbb{N} vers $\wp(\mathbb{N})$.

Établir une absurdité en introduisant l'ensemble

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}.$$

Exercice 3 [04063] [Correction]

On appelle nombre algébrique, tout nombre complexe x solution d'une équation de la forme

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0.$$

On appelle degré d'un nombre algébrique x , le plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que x soit solution d'une équation comme ci-dessus.

- Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
- Montrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré au plus n est dénombrable.
- L'ensemble de tous les nombres algébriques est-il dénombrable ?

Exercice 4 [04064] [Correction]

- Calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0; 1]$. Montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, [0; 1] \setminus \bigcup_{k=0}^n \left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}; u_k + \frac{1}{2^{k+2}} \right] \neq \emptyset.$$

- On peut alors construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $[0; 1]$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin \bigcup_{k=0}^n \left[u_k - \frac{1}{2^{k+2}}; u_k + \frac{1}{2^{k+2}} \right].$$

Justifier qu'on peut extraire la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un élément ℓ de $[0; 1]$.

- Exploiter les idées précédentes pour établir que $[0; 1]$ n'est pas dénombrable.

Exercice 5 [04140] [Correction]

Montrer que l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} est dénombrable.

Étude de sommabilité

Exercice 6 [03896] [Correction]

Pour quels $\alpha > 0$, la famille suivante est-elle sommable ?

$$\left(\frac{1}{(p^2 + q^2)^\alpha} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}.$$

Sommation par paquets

Exercice 7 [02424] [Correction]

Convergence et calcul, pour z complexe tel que $|z| < 1$, de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 8 [02636] [Correction]

On note $\ell^1(\mathbb{Z})$ l'ensemble des suites complexes $u = (u_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sommables.

- Soit $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.
- Pour $u, v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, on pose $(u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$. Montrer que $u * v \in \ell^1(\mathbb{Z})$ et que

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u * v)_n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_n \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n.$$

- (c) Montrer que la loi $*$ ainsi définie est commutative, associative et possède un neutre.
- (d) La structure $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ est-elle un groupe ?

Exercice 9 [04065] [Correction]

Soit $q \in \mathbb{C}$ avec $|q| < 1$.

Montrer que la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable et calculer sa somme.

Exercice 10 [04066] [Correction]

Soit $r \in [0; 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Justifier l'existence et calculer

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta}.$$

Permutation des termes

Exercice 11 [01030] [Correction]

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série absolument convergente et $v_n = u_{\sigma(n)}$ avec $\sigma \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est absolument convergente de même somme de $\sum u_n$.

Exercice 12 [01031] [Correction]

Soit $\sigma: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une application bijective.

- (a) Déterminer la nature de

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}.$$

- (b) Même question pour

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}.$$

Exercice 13 [02963] [Correction]

Si σ est une bijection de \mathbb{N}^* sur \mathbb{N}^* , montrer la divergence de la série

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}.$$

Exercice 14 [03678] [Correction]

Soit σ une permutation de \mathbb{N}^* .

Quelle est la nature de

$$\sum \frac{\sigma(n)}{n^2 \ln n}?$$

Exercice 15 [03426] [Correction]

Soit (u_n) une suite réelle telle qu'il y ait convergence de la série $\sum u_n^2$.

Soient σ une bijection de \mathbb{N} et (v_n) la suite déterminée par

$$v_n = u_{\sigma(n)} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

- (a) Montrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum v_n^2$.
- (b) Quelle est la nature de la série $\sum |u_n v_n|$?
- (c) Déterminer les bornes supérieure et inférieure de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n|$$

pour σ parcourant l'ensemble des bijections de \mathbb{N} .

Exercice 16 [03412] [Correction]

Soit (z_n) une suite de complexes non nuls telles que

$$n \neq m \implies |z_n - z_m| \geq 1.$$

Montrer la convergence de la série de terme général $1/z_n^3$.

Sommes doubles

Exercice 17 [01093] [Correction]

- (a) Soit $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent à

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

- (b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a-t-elle un sens ?

(c) Montrer qu'alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Exercice 18 [01095] [Correction]

Soit a un complexe de module strictement inférieur à 1. En introduisant la famille des nombres $u_{p,q} = a^{p(2q-1)}$ (pour $p, q \geq 1$), établir l'identité

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1-a^{2p}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p-1}}{1-a^{2p-1}}.$$

Exercice 19 [01096] [Correction]

On pose

$$a_{p,q} = \frac{2p+1}{p+q+2} - \frac{p}{p+q+1} - \frac{p+1}{p+q+3}.$$

Calculer

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} \text{ et } \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q}.$$

Qu'en déduire ?

Exercice 20 [03447] [Correction]

Existence et valeur de

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}.$$

Exercice 21 [01094] [Correction]

Justifier

$$\sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{3}{4p^2}.$$

En déduire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p \neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}.$$

Qu'en déduire ?

Exercice 22 [05011] [Correction]

Soient $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle et $(v_n)_{n \geq 1}$ la suite de ses moyennes de Cesàro :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + \dots + u_n) \text{ pour tout } n \geq 1$$

(a) Montrer que $(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 \leq 2u_n v_n$ pour tout $n \geq 2$.

On suppose désormais que la série de terme général u_n^2 converge.

(a) Montrer que la série de terme général v_n^2 converge et vérifier

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

(b) En déduire la sommabilité de la famille

$$\left(\frac{u_n u_m}{n+m} \right)_{m,n \geq 1}$$

Produit de Cauchy

Exercice 23 [03445] [Correction]

Existence et calcul de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}.$$

Exercice 24 [03446] [Correction]

Soit (u_n) une suite numérique. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k.$$

(a) On suppose dans cette question la série $\sum u_n$ absolument convergente.

En observant un produit de Cauchy, montrer que la série $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

(b) On suppose dans cette question que la suite (u_n) tend vers 0. Déterminer la limite de (v_n)

(c) On suppose dans cette dernière question la série $\sum u_n$ convergente. Montrer la convergence de $\sum v_n$ et déterminer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 25 [03637] [Correction]

Établir

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n!}$$

avec

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 26 [04135] [Correction]Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n 2^k u_k.$$

Montrer que la famille $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable et exprimer sa somme en fonction de celle de la famille $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 27 [04201] [Correction]Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}.$$

Pour quels α la série de terme général u_n converge ?**Exercice 28** [04998] [Correction]Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

- (a) Montrer que la fonction f est bien définie sur \mathbb{R} .
(b) Établir

$$f(x)f(y) = f(x+y) \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}$$

La fonction f est en fait la fonction exponentielle.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

Une telle fonction ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs, or si celle-ci n'est pas constante, elle prend toutes les valeurs d'un intervalle non singulier ce qui constitue un nombre non dénombrable de valeurs. Une telle fonction ne peut donc exister.

Exercice 2 : [énoncé]

L'ensemble A est par définition une partie de \mathbb{N} . Puisque l'application φ est bijective, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A = \varphi(n)$. Étudions alors l'appartenance de n à la partie A .

Si $n \in A$ alors $n \notin \varphi(n)$ mais $A = \varphi(n)$: c'est absurde.

Si $n \notin A$ alors $n \notin \varphi(n)$ et donc $n \in A$: c'est à nouveau absurde.

Exercice 3 : [énoncé]

- (a) Ce sont les nombres rationnels.
 (b) Les nombres algébriques de degré au plus n sont les solutions des équations

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \text{ avec } a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z} \text{ et } a_n \neq 0.$$

Puisque $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^n$ est un ensemble dénombrable, ces équations sont en nombre dénombrable. De plus, chacune possède au plus n solutions. On peut donc percevoir l'ensemble des nombres algébriques comme une réunion dénombrable d'ensembles tous finis, c'est donc un ensemble dénombrable.

- (c) L'ensemble des nombres algébriques est la réunion dénombrable des ensembles précédents, c'est donc un ensemble dénombrable.

Exercice 4 : [énoncé]

- (a) Par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-1/2}.$$

- (b) La somme des longueurs des intervalles réunis vaut

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1.$$

La réunion de ces intervalles ne peut donc recouvrir $[0; 1]$.

- (c) (x_n) est une suite bornée. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite convergente et cette dernière a sa limite dans $[0; 1]$.

- (d) Par l'absurde, supposons $[0; 1]$ dénombrable et considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une énumération de ses éléments.

On reprend la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ construite comme ci-dessus et la limite ℓ introduite.

Puisque celle-ci est élément de $[0; 1]$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N = \ell$. Puisqu'il existe une suite extraite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergeant vers ℓ , il existe une infinité de termes de cette suite dans l'intervalle

$$[\ell - 1/2^{N+2}; \ell + 1/2^{N+2}] = [u_N - 1/2^{N+2}; u_N + 1/2^{N+2}].$$

Or, par construction, pour tout $n \geq N$, l'élément x_n est extérieur à cet intervalle. C'est absurde!

Exercice 5 : [énoncé]

Notons E l'ensemble des parties finies de \mathbb{N} et E_n l'ensemble des parties finies de $[[0; n]]$. Puisque toute partie finie de \mathbb{N} est nécessairement majorée, on peut affirmer l'égalité

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n.$$

Les ensembles E_n étant finis et la réunion dénombrable, on peut affirmer que E est dénombrable en tant qu'ensemble infini réunion dénombrable de parties au plus dénombrables. On peut aussi proposer un dénombrement explicite. Si l'on note i_1, \dots, i_k les éléments d'une partie A finie de \mathbb{N} , on peut lui associer l'entier

$$n(A) = 2^{i_1} + \dots + 2^{i_k}.$$

L'existence et l'unicité de la décomposition d'un entier en somme de puissances de 2 assurant la bijectivité de cette association.

Exercice 6 : [énoncé]

On a l'encadrement

$$\frac{1}{(p+q)^2} \leq \frac{1}{p^2+q^2} \leq \frac{2}{(p+q)^2}.$$

La sommabilité de la famille étudiée équivaut à celle de

$$\left(\frac{1}{(p+q)^{2\alpha}} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^{*2}}.$$

En regroupant par paquets selon

$$I_n = \{(p, q) \in \mathbb{N}^{*2} \mid p + q = n\}$$

celle-ci équivaut à la sommabilité de

$$\left(\frac{n-1}{n^{2\alpha}}\right)_{n \geq 2}$$

qui est vraie si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Exercice 7 : [énoncé]

Puisque $|z| < 1$, on peut écrire par sommation géométrique

$$\frac{1}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k}$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^{n+1}k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

Tout entier naturel non nul p s'écrit de façon unique sous la forme

$$p = 2^n(2k+1) \text{ avec } n, k \in \mathbb{N}.$$

On peut donc affirmer que \mathbb{N}^* est la réunion des ensembles deux à deux disjoints suivants

$$A_n = \{2^n(2k+1) \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

Puisque la famille $(z^p)_{p \in \mathbb{N}^*}$ est sommable, on peut sommer par paquets et écrire

$$\sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m \in A_n} z^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} z^{2^n(2k+1)}.$$

Finalement

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}} = \sum_{p=1}^{+\infty} z^p = \frac{z}{1-z}.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Puisque $v \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $v_n \xrightarrow{|n| \rightarrow +\infty} 0$ et donc (v_n) est bornée par un certain M .

On a $|u_k v_{n-k}| \leq M|u_k|$ donc la famille $(u_k v_{n-k})_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

(b) Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, la famille $(|u_k v_{n-k}|)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable avec

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |u_k v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_{n-k}| = |u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|$$

et la famille $\left(|u_k| \sum_{n \in \mathbb{Z}} |v_n|\right)_{k \in \mathbb{Z}}$ est aussi sommable, donc, par sommation

par paquets, la famille $(u_k v_{n-k})_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2}$ est sommable.

Par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} |u_k v_{n-k}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| |v_{n-k}| < +\infty.$$

Puisque

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k| |v_{n-k}|$$

on a obtenu $u * v \in \ell^1(\mathbb{Z})$.

De plus, par sommation par paquets

$$\sum_{(n,k) \in \mathbb{Z}^2} u_k v_{n-k} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} u_k v_{n-k}$$

ce qui donne

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (u * v)_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} v_\ell.$$

(c) On a

$$(u * v)_n = \sum_{k+\ell=n} u_k v_\ell = (v * u)_n$$

et

$$((u * v) * w)_n = \sum_{k+\ell+m=n} u_k v_\ell w_m = (u * (v * w))_n.$$

Pour ε définie par $\varepsilon_n = \delta_{n,0}$, $u * \varepsilon = u$ donc ε est élément neutre.

(d) Considérons u définie par $u_n = \delta_{0,n} - \delta_{1,n}$.

Si u est inversible et v son inverse, la relation $u * v = \varepsilon$ donne

$$v_n - v_{n-1} = \varepsilon_n = \delta_{0,n}.$$

Par suite pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0$ et puisque $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $v_n = 0$. De même pour tout $n < 0$, $v_n = 0$

Mais alors, pour $n = 0$, $v_n - v_{n-1} = \delta_{0,n}$ donne $0 = 1$.

L'élément u n'est pas inversible et donc $(\ell^1(\mathbb{Z}), *)$ n'est pas un groupe.

Exercice 9 : [énoncé]

Étudions la sommabilité de $(|q|^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$.

On peut décomposer

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*.$$

La sous-famille $(|q|^{|n|})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum |q|^n$ converge.

De même, la sous-famille $(|q|^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.

Par sommation par paquets $(|q|^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. De plus

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{|n|} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} q^n + 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-^*} q^{-n} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} q^n = \frac{1+q}{1-q}.$$

Exercice 10 : [énoncé]

Étudions la sommabilité de $(|r|^{|n|} e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}} = (r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$.

On peut décomposer

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}^* \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-^*.$$

La sous-famille $(r^{|n|})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable car la série géométrique $\sum r^n$ converge.

De même, la sous-famille $(r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}_-^*}$ est sommable.

Par sommation par paquets $(r^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable.

La somme étudiée existe donc et en sommant par paquets

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in\theta} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} r^n e^{in\theta} + 1 + \sum_{n \in \mathbb{Z}_-^*} r^{-n} e^{in\theta} = 1 + \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} + \frac{re^{-i\theta}}{1-re^{-i\theta}} = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}.$$

Exercice 11 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=0}^n |v_k| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$$

donc $\sum_{n \geq 0} v_n$ est absolument convergente.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$p(n) = \max \{ \sigma^{-1}(k) \mid 0 \leq k \leq n \}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n \geq N+1} |u_n| \leq \varepsilon$.

Pour tout $M \geq p(N)$:

$$\left| \sum_{n=0}^M v_n - \sum_{n=0}^N u_n \right| \leq \sum_{n \geq N+1} |u_n| \leq \varepsilon$$

donc

$$\left| \sum_{n=0}^M v_n - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq 2\varepsilon.$$

Par suite

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 12 : [énoncé]

(a) La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge absolument donc la famille $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \geq 1}$ est sommable.

Il en est de même de la famille permutée $\left(\frac{1}{\sigma(n)^2}\right)_{n \geq 1}$ et donc la série

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge.

(b) C'est analogue, mais cette fois la famille $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$ n'est pas sommable et la

série à termes positifs $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)}$ diverge.

Exercice 13 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2}.$$

On a

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k).$$

Or les entiers $\sigma(n+1), \dots, \sigma(2n)$ sont, à l'ordre près, au moins égaux à $1, \dots, n$ et donc

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{4n^2} \sum_{k=1}^n k = \frac{n+1}{8n} \geq \frac{1}{8}.$$

On en déduit que (S_n) diverge.

Exercice 14 : [énoncé]

Posons

$$S_n = \sum_{k=2}^n \frac{\sigma(k)}{k^2 \ln k}.$$

On a

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}} \sigma(k) \geq \frac{1}{2^{2(n+1)} \ln 2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} k$$

car les entiers $\sigma(k)$ de la première somme sont aux moins égaux aux entiers k de la seconde.

On en déduit et donc

$$S_{2^{n+1}} - S_{2^n} \geq \frac{2^n(2^n + 1)}{2^{2n+3}(n+1) \ln 2} \sim \frac{1}{8} \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{n}.$$

Puisque la série $\sum 1/n$ diverge, il en est de même de la série télescopique $\sum S_{2^{n+1}} - S_{2^n}$ et donc la suite (S_{2^n}) tend vers $+\infty$. On en déduit la divergence de la série étudiée.

Exercice 15 : [\[énoncé\]](#)

(a) La permutation des termes d'une série à termes positifs ne change ni sa nature, ni sa somme. On peut donc affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

(b) En vertu de la majoration

$$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$$

on a

$$|u_n v_n| \leq \frac{1}{2}(u_n^2 + v_n^2).$$

Par comparaison de série à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série $\sum |u_n v_n| \dots$

(c) et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

De plus, cette inégalité est une égalité quand $\sigma = \text{Id}_{\mathbb{N}}$ donc

$$\sup \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \mid \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N} \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2.$$

On a évidemment

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \geq 0.$$

Pour montrer que la borne inférieure cherchée est 0, montrons que l'on peut rendre la somme précédente aussi petite que l'on veut. Soit $\varepsilon > 0$. Par convergence de la série $\sum u_n^2$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n^2 \leq \varepsilon.$$

De plus la suite (u_n) tend vers 0, elle est donc bornée par un certain $M > 0$ et il existe un rang $N' > N$ tel que

$$\forall n \geq N', |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{M(N+1)}.$$

Considérons alors la bijection σ de \mathbb{N} déterminée par

$$\sigma(n) = \begin{cases} N' + n & \text{si } n \in \{0, \dots, N\} \\ n - N' & \text{si } n \in \{N', \dots, N' + N\} \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour cette permutation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \leq \sum_{n=0}^{N-1} |u_n| \frac{\varepsilon}{M(N+1)} + \sum_{n=N'}^{N'+N-1} \frac{\varepsilon}{M(N+1)} |u_{n-N'}| + \varepsilon \leq 3\varepsilon.$$

On peut donc affirmer

$$\inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n v_n| \mid \sigma \text{ bijection de } \mathbb{N} \right\} = 0.$$

Exercice 16 : [\[énoncé\]](#)

Pour $N \in \mathbb{N}$ posons $A_N = \{n \in \mathbb{N}, |z_n| \leq N\}$.

Pour $n, m \in A_N$ distincts, les disques ouverts de centres z_n et z_m et de rayon $1/2$ sont disjoints. La réunion de ces disques pour n parcourant A_N , est incluse dans le disque de centre 0 et de rayon $N + 1/2$. Par considération d'aire, on obtient

$$\text{Card } A_N \times \pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq \pi \left(N + \frac{1}{2}\right)^2$$

et donc

$$\text{Card } A_N \leq (2N + 1)^2.$$

Quitte à permuter les termes de la suite, supposons la suite $(|z_n|)$ croissante (ceci est possible, car il n'y a qu'un nombre fini de termes de la suite de module inférieur à une constante donnée). En vertu de l'étude qui précède

$$|z_{(2N+1)^2+1}| > N$$

et on en déduit

$$\frac{1}{|z_p|^3} = O\left(\frac{1}{p^{3/2}}\right).$$

La série permutée de terme général $1/z_n^3$ est donc absolument convergente et la série initiale l'est donc aussi.

Exercice 17 : [\[énoncé\]](#)

(a) Puisque $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante :

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

donc

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

(b) Par suite $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ a un sens si, et seulement si, $\alpha > 2$.

(c) Posons $u_{k,n} = \frac{1}{k^\alpha}$ si $k > n$ et $u_{k,n} = 0$ sinon.

Pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k \geq 0} |u_{k,n}|$ converge et $\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}|$ converge donc on peut appliquer la formule de Fubini et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n}$$

avec convergence des séries sous-jacentes.

Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{k,n} = \sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-1}}$$

donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\alpha-1}}.$$

Exercice 18 : [\[énoncé\]](#)

La série $\sum_{p \geq 1} u_{p,q}$ est absolument convergente et

$$\sum_{p=1}^{+\infty} |u_{p,q}| = \frac{|a|^{2q-1}}{1 - |a|^{2q-1}}.$$

De plus la série de terme général $\frac{|a|^{2q-1}}{1 - |a|^{2q-1}}$ est absolument convergente en vertu de la règle de d'Alembert.

La famille $(u_{p,q})_{p,q \geq 1}$ est donc sommable et on a

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{+\infty} u_{p,q} = \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} u_{p,q}$$

ce qui fournit la relation

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{a^{2q-1}}{1 - a^{2q-1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^p}{1 - a^{2p}}.$$

Exercice 19 : [\[énoncé\]](#)

D'une part $\sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$ donc $\sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} a_{p,q} = 0$.

D'autre part $\sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}$ donc $\sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{q=0}^{+\infty} a_{p,q} = 1$.

La formule de Fubini ne s'applique pas, la famille $(a_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ n'est donc pas sommable.

Exercice 20 : [\[énoncé\]](#)

Notons que les termes sommés sont positifs.

Pour chaque $q \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$ converge car

$$\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \sim \frac{1}{p^2}.$$

Par télescopage

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{p+q^2} - \frac{1}{p+q^2+1} \right) = \frac{1}{q^2}.$$

La série $\sum_{q \geq 1} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q \geq 1} \frac{1}{q^2}$ converge aussi, on peut donc affirmer que la famille

$$\left(\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*}$$

est sommable et sa somme vaut

$$\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)} = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

La série converge compte tenu des critères usuels.

$$\frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{n-p} - \frac{1}{n+p} \right).$$

Par télescopage :

$$\sum_{n=p+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2p} \right).$$

De plus

$$\sum_{n=1}^{p-1} \frac{1}{n^2 - p^2} = -\frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p-1} + \dots + 1 + \frac{1}{p+1} + \dots + \frac{1}{2p-1} \right)$$

donc

$$\sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \frac{1}{2p} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p} \right) = \frac{3}{4p^2}$$

puis

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2} > 0.$$

Cependant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p \neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{4n^2} = -\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{3}{4p^2}$$

donc

$$\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{n=1, n \neq p}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2} \neq \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1, p \neq n}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - p^2}.$$

On en déduit que la famille des $1/(n^2 - p^2)$ avec $(p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$, $p \neq n$ n'est pas sommable.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) On peut exprimer u_n en fonction de v_n et v_{n-1} .

Puisque nv_n correspond à la somme $u_1 + \dots + u_n$, on remarque

$$u_n = nv_n - (n-1)v_{n-1} \quad \text{pour } n \geq 2$$

La différence des membres de l'inégalité étudiée s'écrit alors

$$\begin{aligned} (n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 - 2u_nv_n &= (n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 - 2nv_n^2 + 2(n-1)v_nv_{n-1} \\ &= (1-n)v_n^2 + 2(n-1)v_nv_{n-1} + (1-n)v_{n-1}^2 \\ &= (1-n)(v_n - v_{n-1})^2 \leq 0 \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité voulue.

(b) Soit $n \geq 2$. On peut écrire

$$(n+1)v_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2 = v_n^2 + nv_n^2 - (n-1)v_{n-1}^2$$

ce qui fait apparaître v_n^2 et un terme télescopique. En sommant ces termes pour n allant de 2 jusqu'à un entier N , on obtient

$$\sum_{n=2}^N v_n^2 + Nv_N^2 - v_1^2 \leq 2 \sum_{n=2}^N u_nv_n$$

En ajoutant $2v_1^2$ dans chaque membre et en remarquant $u_1 = v_1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 + Nv_N^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N u_nv_n$$

puis

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 2 \sum_{n=1}^N u_nv_n$$

On majore la somme en second membre en séparant les facteurs u_n et v_n grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 2 \left(\sum_{n=1}^N u_n^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^N v_n^2 \right)^{1/2}$$

Que la somme en premier membre soit nulle ou non, on obtient

$$\left(\sum_{n=1}^N v_n^2\right)^{1/2} \leq 2 \left(\sum_{n=1}^N u_n^2\right)^{1/2}$$

Enfin, on élève au carré pour écrire

$$\sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^N u_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

On en déduit que la série de terme général v_n^2 car il s'agit d'une série à termes positifs aux sommes partielles majorées. Au surplus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2 = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N v_n^2 \leq 4 \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2$$

(c) Sans perte de généralité, on peut supposer les termes u_n positifs (ou simplement mener l'étude avec $|u_n|$ au lieu de u_n). Soit $N \geq 2$.

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{u_m u_n}{m+n} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{u_m u_n}{m+n} + \sum_{n=1}^N \sum_{m=n+1}^N \frac{u_m u_n}{m+n}$$

On échange les deux sommes du deuxième terme

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{u_m u_n}{m+n} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{u_m u_n}{m+n} + \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u_m u_n}{m+n}$$

On exploite l'inégalité $m+n \geq n$ pour majorer le premier terme et faire apparaître v_n et l'inégalité $m+n \geq m$ pour le second terme en faisant apparaître v_m quitte à adjoindre un terme positif à la somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{u_m u_n}{m+n} &\leq \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^n \frac{u_m u_n}{n} + \sum_{m=2}^N \sum_{n=1}^{m-1} \frac{u_m u_n}{m} \\ &\leq \sum_{n=1}^N u_n v_n + \sum_{m=2}^N u_m v_m \leq 2 \sum_{n=1}^N u_n v_n \end{aligned}$$

L'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ complète l'étude

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \frac{u_m u_n}{m+n} \leq \sum_{n=1}^N (u_n^2 + v_n^2) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n^2$$

Finalement, la famille étudiée est sommable car les sommes partielles sur les parties finies sont majorées.

Exercice 23 : [énoncé]

Par produit de Cauchy de série convergeant absolument

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{3^k} \frac{1}{3^{n-k}} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{3^m}\right) = \frac{9}{4}$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) On a

$$v_n = \sum_{k=0}^n u_k \times \frac{1}{2^{n-k}}$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente, donc convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon$$

On a alors

$$|v_n| \leq \frac{\sum_{k=0}^{N-1} 2^k |u_k|}{2^n} + \varepsilon \sum_{k=N}^n \frac{2^k}{2^n} \leq \frac{Cte}{2^n} + 2\varepsilon$$

puis pour n assez grand

$$|v_n| \leq 3\varepsilon$$

On peut donc affirmer que la suite (v_n) converge vers 0.

(c) En permutant les sommes

$$\sum_{n=0}^N v_n = \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n \frac{u_k}{2^{n-k}} = \sum_{k=0}^N u_k \sum_{n=k}^N \frac{1}{2^{n-k}}$$

En évaluant la somme géométrique

$$\sum_{n=0}^N v_n = 2 \sum_{k=0}^N u_k \left(1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}\right) = 2 \sum_{k=0}^N u_k - \sum_{k=0}^N \frac{u_k}{2^{N-k}}$$

et compte tenu du résultat de la question précédente

$$\sum_{n=0}^N v_n \rightarrow 2 \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

On en déduit à nouveau que la série $\sum v_n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 25 : [énoncé]

Par produit de Cauchy de séries convergent absolument

$$e \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n.n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(n-k)!} \frac{(-1)^{k-1}}{k.k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Il reste à montrer par récurrence sur $n \geq 1$ que

$$\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

ce qui se fait par

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k-1}.$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1} - \frac{(1-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \binom{n+1}{k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Exercice 26 : [énoncé]

On peut écrire

$$v_n = \sum_{k=0}^n \left(u_k \times \frac{1}{2^{n-k}} \right).$$

La série $\sum v_n$ est donc la série produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{2^n}$. Puisqu'elles sont toutes deux absolument convergentes, la série $\sum v_n$ est absolument convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \right) = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 27 : [énoncé]

Les termes de la somme définissant u_n sont positifs et celui d'indice 1 vaut $1/(n-1)^\alpha$ et donc

$$u_n \geq \frac{1}{(n-1)^\alpha} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la divergence de la série de terme général u_n pour tout $\alpha \leq 1$.

Pour $\alpha > 1$, on sait la convergence absolue de la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$. On réalise alors un produit de Cauchy de cette série par elle-même en considérant

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } a_0 = 0.$$

La série produit de Cauchy a alors pour terme général

$$\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} = u_n.$$

On peut donc affirmer la convergence absolue de la série de terme général u_n pour $\alpha > 1$.

Exercice 28 : [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, la convergence de la série définissant $f(0)$ est immédiate.

Pour $x \neq 0$, la convergence (absolue) de la série définissant $f(x)$ découle de la règle de d'Alembert

$$\left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 < 1$$

(b) Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes,

$$f(x)f(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!}$$

On fait apparaître un terme $1/n!$ et un coefficient du binôme pour conclure :

$$\begin{aligned} f(x)f(y) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x+y)^n = f(x+y) \end{aligned}$$