Fonctions réelles

Technique obsolète

Exercice 1 [03223] [Correction]
Montrer que lorsque $x \to +\infty$

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}.$$

Difféomorphisme

Exercice 2 [02818] [Correction]
Soit $f\colon]-1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}.$$

(a) Trouver le plus grand intervalle ouvert I contenant 0 sur lequel f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

(b) On note g l'application réciproque de $f_{\restriction I}$. Montrer que les coefficients du développement limité de g en 0 à un ordre quelconque sont positifs.

Étude de branche asymptotique

Exercice 3 [01409] [Correction]
Soit $f\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Montrer que f admet un point d'inflexion.
Étudier les branches infinies de la courbe représentative de f et en donner l'allure.

Exercice 4 [01408] [Correction]
Étudier la fonction

$$f\colon x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 5 [01407] [Correction]
Étudier la fonction

$$f\colon x \mapsto \frac{2\ln x + 3}{x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 6 [01406] [Correction]
Étudier la fonction

$$f\colon x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$$

en vu d'en réaliser la représentation graphique.

Exercice 7 [01467] [Correction]
Soit

$$f\colon x \mapsto (x+1)\mathrm{e}^{1/x}$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 8 [01468] [Correction]
Soit

$$f\colon x \mapsto x(\ln(2x+1) - \ln(x))$$

définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
Former un développement asymptotique de f à la précision $1/x$ en $+\infty$.
En déduire l'existence d'une droite asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Étudier la position relative de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

Exercice 9 [01469] [Correction]
Étudier les asymptotes de

$$x \mapsto \sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}.$$

Exercice 10 [01825] [Correction]
Étudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{(x+1)\ln(x+1)}{\ln x}.$$

Exercice 11 [01826] [Correction]
Étudier les branches infinies de

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{|x-1|+x}.$$

Fonctions hyperboliques inverses

Exercice 12 [01867] [Correction]
Simplifier les expressions suivantes :

(a) $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x)$
(b) $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x)$
(c) $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x)$
(d) $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x)$
(e) $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x)$
(f) $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x)$

Exercice 13 [01868] [Correction]
Simplifier :

(a) $\operatorname{argch}(2x^2-1)$
(b) $\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2})$

Exercice 14 [01870] [Correction]
Résoudre l'équation

$$\operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x = 1.$$

Exercice 15 [01871] [Correction]
Soit $G\colon \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par $G(t) = \operatorname{argsh}(\tan t)$.
Montrer que G est dérivable et que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$, $G'(t) = \operatorname{ch} G(t)$.

Exercice 16 [02454] [Correction]
Convergence et calcul de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ où $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

Exercice 17 [02846] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \frac{n!}{1\times 3\times\cdots\times(2n+1)}.$$

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$?

Exercice 18 [01567] [Correction]
Résoudre

$$(1+x^2)y'' + xy' - 4y = 0$$

en posant $x = \operatorname{sh}(t)$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

On découpe l'intégrale en deux

$$\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et on procède à une intégration par parties

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^x \frac{2t}{2t}\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2t}\right]_1^x + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi

$$\int_0^x \mathrm{e}^{x^2} = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x} + \frac{1}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + C^{te}.$$

Quand $x \to +\infty$, sachant que la constante est négligeable devant $\mathrm{e}^{x^2}/2x \to +\infty$, il suffit pour conclure de montrer

$$\int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\Big(\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t\Big).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $A \geq 1$ tel que

$$\forall t \geq A, \frac{1}{t^2} \leq \varepsilon$$

et alors

$$0 \leq \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^A \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \varepsilon \int_A^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^A \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t + \varepsilon \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \geq \int_1^x 1\,\mathrm{d}t \geq x - 1 \to +\infty$$

donc pour x assez grand

$$\int_1^A \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq \varepsilon \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$0 \leq \int_1^x \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2}\,\mathrm{d}t \leq 2\varepsilon \int_1^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

et on peut conclure.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}$$

$f'(x) \neq 0$ si, et seulement si, $x \neq \mathrm{e} - 1$.
Le plus grand intervalle cherché est $I = \left]-1\,;\mathrm{e}-1\right[$ sur lequel f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et sa dérivée ne s'annule pas, f réalise donc un $\mathcal{C}^\infty$ difféomorphisme de I vers $\left]-\infty\,;1/\mathrm{e}\right[$.

(b) On a

$$\ln(1 + g(x)) = x(1 + g(x)).$$

En dérivant

$$g'(x) = 1 + 2g(x) + g^2(x) + xg'(x) + xg'(x)g(x).$$

En dérivant à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et en évaluant en 0 on obtient

$$g^{(n+1)}(0) = 2g^{(n)}(0) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(0)g^{(n-k)}(0) + ng^{(n)}(0) + n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}g^{(k+1)}(0)g^{(n-\dots)}$$

On peut alors appliquer un raisonnement par récurrence forte pour obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) \geq 0.$$

Ceci suffit pour conclure via la formule de Taylor-Young.

Exercice 3 : [énoncé]

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ses dérivées premières et secondes sont

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, f''(x) = -\frac{1}{x^3} - 2\frac{1 - \ln x}{x^3} = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}.$$

On en déduit les variations suivantes

x	0		e		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/\mathrm{e}$	$\searrow$	0

x		$\mathrm{e}^{3/2}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$

La fonction f présente un point d'inflexion en $\mathrm{e}^{3/2}$.
Puisque $\lim_0 f = -\infty$, il y a une asymptote d'équation $x = 0$.
Puisque $\lim_{+\infty} f = 0$, il y a une asymptote d'équation $y = 0$.

```
f:=x->ln(x)/x:
a:=exp(3/2):
plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a)], x=0..2*a, y=-2..1);
```

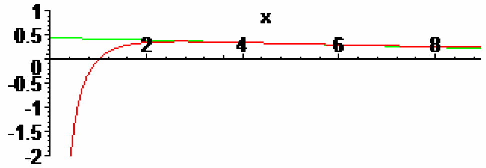

FIGURE 1 – La fonction $x \mapsto (\ln x)/x$

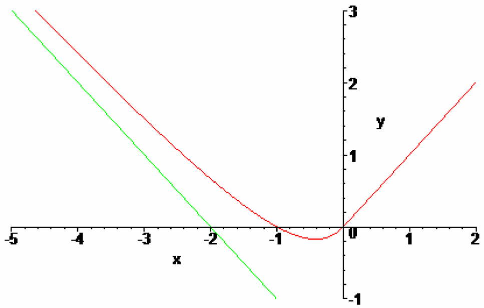

FIGURE 2 – La fonction $x \mapsto \frac{x^2+x}{|x|+1}$

Exercice 4 : [énoncé]
f est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable (par opérations) sur $\mathbb{R}^*$.
Par limite de taux de variation on constate que f est aussi dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.
Sur $\mathbb{R}_+$, $f(x) = x$ ce qui achève l'étude sur $\mathbb{R}_+$.
Sur $\mathbb{R}_-$,

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - x}$$

présente un minimum en $1 - \sqrt{2}$ de valeur $2\sqrt{2} - 3$ et f présente une asymptote d'équation $y = -x - 2$, courbe au dessus.

```
plot([(x^2+x)/(abs(x)+1), -x-2], x=-5..2, y=-1..3);
```

Exercice 5 : [énoncé]
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$f'(x) = \frac{-1 - 2\ln x}{x^2} \text{ et } f''(x) = \frac{4\ln x}{x^3}.$$

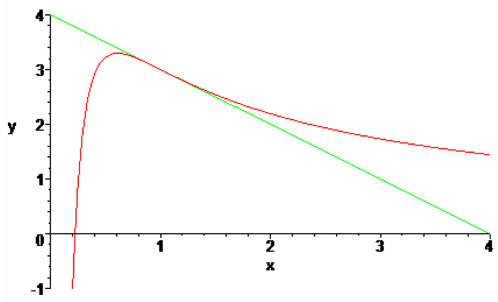

FIGURE 3 – La fonction $x \mapsto \frac{2\ln x + 3}{x}$

x	0		$1/\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2\sqrt{\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

En 0 : (Oy) est asymptote.
En $+\infty$: (Ox) est asymptote.
En 1 : f'' s'annule avec changement de signe, point d'inflexion.
L'équation de la tangente en ce point est $y = -(x-1) + 3$.

```
plot([(2*ln(x)+3)/x, -(x-1)+3], x=0..4, y=-1..4);
```

Exercice 6 : [énoncé]
f est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = x(2-x)\mathrm{e}^{-x} \text{ et } f''(x) = (x^2 - 4x + 2)\mathrm{e}^{-x}$$

f présente un minimum absolu en 0 de valeur 0 et un maximum local en 2 de valeur $4/\mathrm{e}^2$.
f présente des points d'inflexion en $2 + \sqrt{2}$ et $2 - \sqrt{2}$.
f présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$.
f présente une branche parabolique verticale en $-\infty$.

```
f:=x->x^2*exp(-x):
a:=2+sqrt(2):b:=2-sqrt(2):
plot([f(x), D(f)(a)*(x-a)+f(a), D(f)(b)*(x-b)+f(b)], x=-1..5,
color=[red, blue, green]);
```

Exercice 7 : [énoncé]
On a

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{1/x} = x + 2 + \frac{3}{2}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

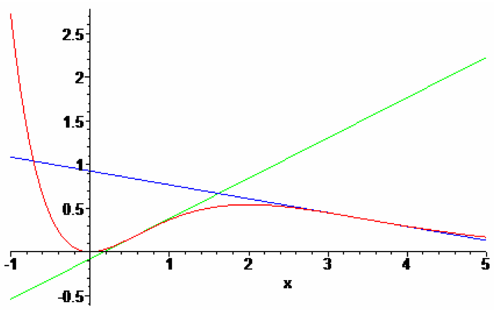

FIGURE 4 – La fonction$x \mapsto x^2 e^{-x}$

Par suite, la droite d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe et la courbe est au dessus de celle-ci.

Exercice 8 : [énoncé]
On a
$$f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln(x)) = \ln 2.x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
La droite d'équation $y = \ln 2.x + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe et la courbe est en dessous de celle-ci.

Exercice 9 : [énoncé]
On a
$$\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = x\sqrt[3]{1 + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{6}{x^3}} = x + 1 - \frac{5}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
Courbe en dessous (resp. au dessus) de l'asymptote en $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Exercice 10 : [énoncé]
f est définie et continue sur $]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
Quand $x \to +\infty$,
$$\frac{f(x)}{x} \sim \frac{x\ln x}{x\ln x} = 1, f(x) - x = \frac{\ln(x+1) + x\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{\ln x}{\ln x} = 1$$
et
$$f(x) - (x+1) = \frac{(x+1)\ln(1+1/x)}{\ln x} \sim \frac{1}{\ln x} \to 0^+.$$
La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote en $+\infty$ et la courbe $y = f(x)$ est au dessus.
Quand $x \to 1^+$, $f(x) \to +\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote.
Quand $x \to 1^-$, $f(x) \to -\infty$, la droite d'équation $x = 1$ est asymptote.
Quand $x \to 0$, $f(x) \to 0$, on prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$.

Exercice 11 : [énoncé]
f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Quand $x \to +\infty$,
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x - 1}.$$
On a
$$\frac{f(x)}{x} \to \frac{1}{2}, f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{5x}{4x-2} \to \frac{5}{4} \text{ et } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + \frac{5}{4}\right) = \frac{5}{8x-4} \to 0^+.$$
La droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$ est asymptote en $+\infty$ courbe au dessus.
Quand $x \to -\infty$,
$$f(x) = x^2 + 2x.$$
Il y a une branche parabolique verticale.
```
plot([f(x), x/2+5/4], x=-3..5);
```

Exercice 12 : [énoncé]

(a) $\operatorname{ch} a = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 a}$ donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argsh} x) = \sqrt{1 + x^2}$.
(b) $\operatorname{th}(\operatorname{argsh} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
(c) $\operatorname{sh}(2\operatorname{argsh} x) = 2\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x)\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = 2x\sqrt{1+x^2}$.
(d) $\operatorname{sh}(\operatorname{argch} x) = \sqrt{x^2 - 1}$.
(e) $\operatorname{th}(\operatorname{argch} x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.
(f) $\operatorname{th}^2 a = 1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 a}$ donc $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 13 : [énoncé]

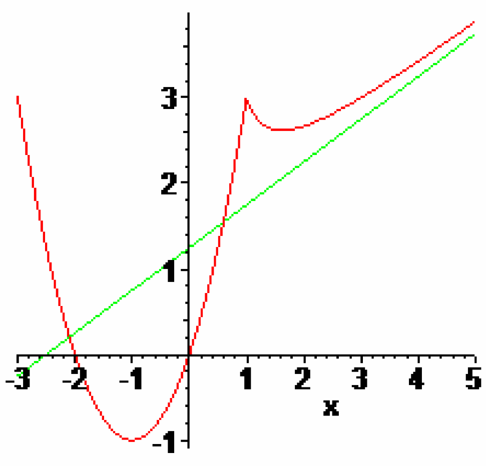

FIGURE 5 – La fonction $x \mapsto \frac{x^2+2x}{|x-1|+x}$

(a) Pour $x \geq 1$, posons $\alpha = \operatorname{argch} x$
On a

$$\operatorname{argch}(2x^2-1) = \arg\operatorname{ch}(2\operatorname{ch}^2\alpha - 1) = \operatorname{argch}(\operatorname{ch} 2\alpha) = 2\alpha = 2\operatorname{argch} x.$$

Par parité , pour $x \in \left]-\infty\,;-1\right] \cup \left[1\,;+\infty\right[$,

$$\operatorname{argch}(2x^2-1) = 2\operatorname{argch}|x|.$$

(b) Posons $\alpha = \operatorname{argsh} x$.
On a $2x\sqrt{1+x^2} = 2\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha = \operatorname{sh} 2\alpha$ donc

$$\operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}) = 2\alpha = 2\operatorname{argsh} x.$$

Exercice 14 : [énoncé]
La fonction $f\colon x \mapsto \operatorname{argsh} x + \operatorname{argch} x$ est continue et strictement croissante sur $\left[1\,;+\infty\right[$.
$f(1) = \operatorname{argsh}(1)$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Puisque $\operatorname{sh} 1 \geq 1$, $\operatorname{argsh}(1) \leq 1$.
L'équation possède donc une unique solution a. Déterminons-la.

$$\operatorname{sh}(1) = \operatorname{sh}(\operatorname{argsh} a + \operatorname{argch} a) = a^2 + \sqrt{1+a^2}\sqrt{a^2-1} = a^2 + \sqrt{a^4-1}$$

donc

$$\sqrt{a^4-1} = \operatorname{sh}(1) - a^2$$

puis

$$a^2 = \frac{\operatorname{ch}^2 1}{2\operatorname{sh} 1}$$

et enfin

$$a = \frac{\operatorname{ch} 1}{\sqrt{2\operatorname{sh} 1}}.$$

Exercice 15 : [énoncé]
G est dérivable par composition et $G'(t) = \sqrt{1+\tan^2 t}$. Or $\operatorname{ch} G(t) = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 G(t)} = \sqrt{1+\tan^2 t}$.

Exercice 16 : [énoncé]
À l'aide d'une intégration par partie :

$$a_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,\mathrm{d}t = 2(n+1)(a_n - a_{n+1})$$

donc

$$a_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3}a_n.$$

$a_n \neq 0$ et $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 1$ donc $R = 1$.
Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 ((1-t^2)x)^n\,\mathrm{d}t.$$

On peut permuter somme infinie et intégrale (par un argument de convergence uniforme par exemple) et affirmer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-x+xt^2}.$$

Pour $x = 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 1.$$

Pour $x > 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1-x}{x}+t^2} = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\arctan\left(\sqrt{\frac{x}{1-x}}\right).$$

Pour $x < 0$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{x}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\sqrt{x(x-1)}}\operatorname{argth}\left(\sqrt{\frac{x}{x-1}}\right).$$

Exercice 17 : [énoncé]
On a $a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3}a_n$. Par application de la règle de d'Alembert, on obtient $R = 2$.
La relation $(2n+3)a_{n+1} - (n+1)a_n$ avec $a_0 = 1$ permet d'affirmer que la somme S de la série entière $\sum a_n x^n$ est solution sur $]-2\,;2[$ de l'équation différentielle

$$x(x-2)S'(x) + (x-1)S(x) + 1 = 0.$$

La recherche de solution définie et continue en 0 donne

$$S(x) = \frac{\arcsin(x-1)+\frac{\pi}{2}}{\sqrt{x(2-x)}} \text{ pour } x > 0$$

et

$$S(x) = \frac{\arg\operatorname{ch}(1-x)}{\sqrt{x(x-2)}} \text{ pour } x < 0.$$

Exercice 18 : [énoncé]
Soit y une fonction deux fois dérivable définie sur $\mathbb{R}$.
Posons z la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(\operatorname{sh}(t))$. z est deux fois dérivable.
Après calculs : y est solution de l'équation différentielle proposée si, et seulement si, z est solution de l'équation $z'' - 4z = 0$.
On obtient

$$z(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2\mathrm{e}^{-2t}$$

puis

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{2\operatorname{argsh} x} + C_2\mathrm{e}^{-2\operatorname{argsh} x} = C_1(x+\sqrt{1+x^2})^2 + \frac{C_2}{(x+\sqrt{1+x^2})^2}.$$