Suites et séries de fonctions

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions

Exercice 1 [00868] [Correction]
Établir que la limite simple d'une suite de fonctions de I vers $\mathbb{R}$ convexes est convexe.

Exercice 2 [00885] [Correction]
Soient (f_n) une suite de fonctions convergeant uniformément vers une fonction f et g une fonction uniformément continue.
Montrer que la suite de fonctions $(g\circ f_n)$ converge uniformément.

Exercice 3 [00884] [Correction]
Soient (f_n) et (g_n) deux suites de fonctions convergeant uniformément vers des fonctions f et g supposées bornées.
Montrer que la suite de fonctions $(f_n g_n)$ converge uniformément vers fg.

Exercice 4 [00878] [Correction]
Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues et définies sur $[a\,;b]$. On suppose que f_n converge uniformément vers une fonction f.
Montrer

$$\inf_{[a;b]} f_n \to \inf_{[a;b]} f.$$

Exercice 5 [00879] [Correction]
On suppose qu'une suite de fonctions (f_n) de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ converge uniformément vers $f\colon [a\,;b]\to\mathbb{R}$ continue et on considère une suite (x_n) d'éléments de $[a\,;b]$ convergeant vers x. Montrer

$$f_n(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x).$$

Exercice 6 [03461] [Correction]
Soit (P_n) une suite de fonctions polynômes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que cette suite converge uniformément vers une fonction f sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est polynomiale.

Étude pratique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 7 [00871] [Correction]
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x) = x^n \ln x \text{ avec } x\in\,]0\,;1] \text{ et } u_n(0)=0.$$

Étudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ sur $[0\,;1]$.

Exercice 8 [00872] [Correction]
Étudier la convergence uniforme de $f_n\colon [0\,;+\infty[\,\to\mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

Exercice 9 [00870] [Correction]
On pose

$$u_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx) \text{ avec } x\in\mathbb{R}_+.$$

(a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (u_n) sur $[0\,;+\infty[$.
(b) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a>0$.
(c) Étudier la convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 10 [00873] [Correction]
On pose

$$f_n(x) = nx^2\mathrm{e}^{-nx} \text{ avec } x\in\mathbb{R}_+.$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}_+$ puis sur $[a\,;+\infty[$ avec $a>0$.

Exercice 11 [00874] [Correction]
On pose

$$f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ avec } x\in\mathbb{R}.$$

Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$ puis sur $]-\infty\,;-a]\cup[a\,;+\infty[$ avec $a>0$.

Exercice 12 [00875] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ pour } x \in \mathbb{R}^* \text{ et } f_n(0) = 0.$$

(a) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
(b) Étudier la convergence uniforme de (f_n) sur $[-a\,;a]$ avec $a > 0$.

Exercice 13 [02527] [Correction]
Étudier la convergence simple et uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite de fonctions (f_n) donnée par
$$f_n(x) = \sin^n(x)\cos(x).$$

Exercice 14 [02518] [Correction]
Étudier la suite de fonctions (f_n) définie par
$$f_n(x) = \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}.$$

Exercice 15 [02830] [Correction]
On pose, pour $x \geq 0$,
$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$
Étudier la convergence simple puis uniforme de la suite de fonctions $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 16 [00876] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = \frac{2^n x}{1+n2^n x^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 17 [00877] [Correction]
On pose
$$f_n(x) = 4^n(x^{2^n} - x^{2^{n+1}}) \text{ pour } x \in [0\,;1].$$
Sur quels intervalles y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 18 [00881] [Correction]
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^n.$$

(a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).
(b) Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, y a-t-il convergence uniforme ?

Exercice 19 [02972] [Correction]
Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \text{ si } x \in [0\,;n[\text{ et } f_n(x) = 0 \text{ si } x \geq n.$$
Étudier le mode de convergence de (f_n).

Exercice 20 [00890] [Correction]
Soit $f_n\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}.$$

(a) Étudier la limite simple de (f_n) et montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_n(x) \geq \lim f_n(x).$$
(b) En partant de l'encadrement suivant valable pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$
justifier que la suite (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[0\,;a]$ (avec $a > 0$).
(c) Établir qu'en fait, la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 21 [00892] [Correction]
Soit $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x) = n^2 x(1-nx) \text{ si } x \in [0\,;1/n] \text{ et } f_n(x) = 0 \text{ sinon.}$$

(a) Étudier la limite simple de la suite (f_n).

(b) Calculer
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$
Y a-t-il convergence uniforme de la suite de fonction (f_n) ?

(c) Étudier la convergence uniforme sur $[a\,;1]$ avec $a>0$.

Exercice 22 [00891] [Correction]
Pour $x\in[0\,;\pi/2]$, on pose $f_n(x)=n\sin x\cos^n x$.

(a) Déterminer la limite simple de la suite de fonctions (f_n).

(b) Calculer
$$I_n=\int_0^{\pi/2} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$
La suite (f_n) converge-t-elle uniformément ?

(c) Justifier qu'il y a convergence uniforme sur tout segment inclus dans $]0\,;\pi/2]$.

Exercice 23 [02532] [Correction]

(a) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x)=x(1+n^\alpha \mathrm{e}^{-nx})$ définies sur $\mathbb{R}_+$ pour $\alpha\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}^*$ converge simplement vers une fonction f à déterminer.

(b) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles il y a convergence uniforme.

(c) Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx})\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 24 [02860] [Correction]
Soit (f_n) la suite de fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f_0(x)=x \text{ et } f_{n+1}(x)=\frac{x}{2+f_n(x)} \text{ pour } n\in\mathbb{N}.$$
Étudier la convergence simple et uniforme de la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 25 [02970] [Correction]
On note E l'ensemble des fonctions $f\colon[0\,;1]\to\mathbb{R}_+$ continues.
On pose
$$\Phi(f)(x)=\int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$
pour toute $f\in E$.
On pose $f_0=1$ puis $f_{n+1}=\Phi(f_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(a) Étudier la suite (f_n).

(b) Soit $f=\lim(f_n)$.
Trouvez une équation différentielle dont f est solution.
Y a-t-il unicité de la solution nulle en 0 ?

Étude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 26 [00883] [Correction]
Soit $f_n\colon\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x)=x+1/n.$$
Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément mais pas (f_n^2).

Exercice 27 [00869] [Correction]
Soit $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par
$$f_n(x)=\sqrt{x^2+1/n}.$$
Montrer que chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 28 [00887] [Correction]
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable de dérivée seconde bornée.
Montrer que la suite des fonctions
$$g_n\colon x\mapsto n\bigl(f(x+1/n)-f(x)\bigr)$$
converge uniformément vers f'.

Exercice 29 [00888] [Correction]
Soit $f_n\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ décroissante telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Montrer que cette convergence est uniforme.

Exercice 30 [02833] [Correction]
On note U l'ensemble des complexes de module 1 et on considère ω un complexe de module $\neq 1$.
Exprimer une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction

$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$$

soit limite uniforme sur U d'une suite de fonctions polynomiales.

Exercice 31 [03902] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(t) = n\big(f(t+1/n) - f(t)\big).$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.

Fonction solution d'équations fonctionnelles

Exercice 32 [00893] [Correction]
On définit (u_n) suite de fonctions de $[0\,;1]$ vers $\mathbb{R}$ par

$$u_0(x) = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$0 \leq u_{n+1}(x) - u_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

(b) En déduire la convergence pour tout $x \in [0\,;1]$ de la suite $\big(u_n(x)\big)$.

(c) Établir que la suite (u_n) converge uniformément vers une fonction u non nulle vérifiant

$$u'(x) = u(x-x^2).$$

Exercice 33 [00903] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Préciser le sens de variation de S.

(c) Établir

$$\forall x > 0, S(x+1) + S(x) = 1/x.$$

(d) Donner un équivalent de S en 0.

(e) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 34 [03777] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Montrer que F est bien définie.

(b) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Simplifier

$$F(x) + F(x+1).$$

(d) Montrer que pour $x > 0$

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

(e) Donner un équivalent de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice 35 [00913] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)}.$$

(a) Justifier que S est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Former une relation liant $S(x)$ et $S(x+1)$.

(c) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$ et en 0.

Exercice 36 [00914] [Correction]
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$f_n(x) = \operatorname{th}(x+n) - \operatorname{th} n.$$

(a) Établir la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$.

(b) Justifier que la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, S(x+1) - S(x) = 1 - \operatorname{th} x.$$

(d) Étudier la convergence de S en $+\infty$.

Exercice 37 [03754] [Correction]
Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue décroissante et intégrable.
Montrer l'existence d'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, g(x+1) - g(x) = f(x).$$

Exercice 38 [00912] [Correction]
On rappelle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

et on pose pour $x > 0$,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}.$$

(a) Justifier que S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Préciser le sens de variation de S.

(c) Établir que

$$xS(x) - S(x+1) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(d) Donner un équivalent de S en $+\infty$.

(e) Donner un équivalent de S en 0.

Exercice 39 [00898] [Correction]
Justifier l'existence de

$$f(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n}$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.
Montrer que f est 1-périodique et qu'on a

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

Exercice 40 [02973] [Correction]
Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}([0\,;1], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 41 [04104] [Correction]
On étudie l'équation fonctionnelle

$$(E) : f(2x) = 2f(x) - 2f(x)^2.$$

(a) Quelles sont les solutions constantes sur $\mathbb{R}$?

(b) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $f(x) = xh(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. À quelle condition sur h, la fonction f est-elle solution de (E) ?

(c) On définit par récurrence une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ en posant : $h_0 : x \mapsto 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\left(h_n\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2.$$

Pour $x \in [0\,;1]$, soit $T_x : y \mapsto y - xy^2/2$. Montrer que T_x est 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$ et que $T_x\big([0\,;1]\big) \subset [0\,;1]$.
Montrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

(d) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $[0\,;1]$.

(e) Montrer que l'équation (E) admet une solution continue et non constante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 42 [04186] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction u_n sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$u_n(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right).$$

(a) Montrer que $\sum u_n(x)$ converge si $x > 0$.
Montrer que $f\colon x \mapsto -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) Montrer que f est l'unique fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x+1) - f(x) = \ln x \\ f \text{ est convexe} \\ f(1) = 0. \end{cases}$$

(c) Montrer que, pour $x > 0$, on a

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Étude de la convergence d'une série de fonctions

Exercice 43 [00895] [Correction]
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 44 [00896] [Correction]
Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 45 [00897] [Correction]
On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0\,;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x).$$

Exercice 46 [03785] [Correction]
On introduit l'application sur $[0\,;+\infty[$

$$f_n\colon x \mapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

(a) Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).

(b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Exercice 47 [03295] [Correction]
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n(x) = a_n x^n (1 - x) \text{ avec } x \in [0\,;1].$$

(a) Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

(b) Montrer que cette série converge normalement si, et seulement si, il y a convergence de la série $\sum a_n/n$.

(c) Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément si, et seulement si, $a_n \to 0$.

Exercice 48 [02839] [Correction]
On pose

$$u_0(x) = 1 \text{ et } u_{n+1}(x) = \int_0^x u_n(t - t^2)\,\mathrm{d}t$$

pour tout réel $x \in [0\,;1]$ et tout entier naturel n.
Montrer que la série de terme général u_n est normalement convergente.

Exercice 49 [03988] [Correction]
Soit $u_n\colon x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{x}{(1+n^2x)^2}$ avec $n \in \mathbb{N}$.
Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$.

Fonctions zêta

Exercice 50 [02834] [Correction]
Si $x > 1$, on pose
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

(a) Quelle est la limite de $\zeta(x)$ quand $x \to +\infty$?

(b) Pour quels réels x la série $\sum \frac{\zeta(n)}{n} x^n$ converge-t-elle ?

(c) Si
$$F(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{n} x^n$$
montrer que F est continue sur $[-1\,;1[$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1\,;1[$.

(d) Donner une expression plus simple de $F(x)$

Exercice 51 [00908] [Correction]
On pose
$$\eta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$
Montrer que la fonction η est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 52 [00909] [Correction]
On pose
$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}.$$
Montrer que ζ_2 est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 53 [03853] [Correction]
Déterminer la limite quand $x \to 0^+$ de
$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}.$$

Exercice 54 [00899] [Correction]
Soient
$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \text{ et } \zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}.$$

(a) Déterminer les domaines de définition des fonctions ζ et ζ_2.

(b) Justifier que les fonctions ζ et ζ_2 sont continues.

(c) Établir la relation $\zeta_2(x) = (1 - 2^{1-x})\zeta(x)$ pour tout $x > 1$.

Exercice 55 [04187] [Correction]
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs de limite $+\infty$. Lorsque cela a un sens, on pose
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n^x}.$$

(a) Montrer que la fonction f est définie sur un intervalle I et que, s'il n'est pas vide, cet intervalle est non majoré.

(b) Montrer que la fonction f est continue sur I.

(c) Donner un exemple de suite $(u_n)_{n\geq 1}$ pour laquelle :
— l'intervalle I est vide ;
— l'intervalle I est ouvert non vide ;
— l'intervalle I est fermé non vide.

Intégration de la somme d'une série de fonctions

Exercice 56 [00911] [Correction]
On pose
$$u_n(x) = (-1)^{n+1} x^{2n+2} \ln x \text{ pour } x \in \,]0\,;1] \text{ et } u_n(0) = 0.$$

(a) Calculer
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

(b) Montrer que la série des u_n converge uniformément sur $[0\,;1]$.

(c) En déduire l'égalité
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 57 [00920] [Correction]
On donne

$$\forall \alpha \in [0\,;1], \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi \frac{\operatorname{ch} \pi\alpha}{\operatorname{sh} \pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

(prolongée par continuité en 0).
En intégrant sur $[0\,;1]$, en déduire la valeur de

$$\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Limite et comportement asymptotique de la somme de série de fonctions

Exercice 58 [02558] [Correction]
Ensemble de définition et continuité de

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

En trouver la limite en $+\infty$ et un équivalent en 0^+.

Exercice 59 [00139] [Correction]
Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}.$$

Déterminer la limite de $S(t)$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 60 [00910] [Correction]
Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right).$$

(a) Étudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n$.
(b) Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$. On pourra exploiter la formule de Stirling

Exercice 61 [00918] [Correction]
Montrer que pour tout $\alpha > 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha - 1}.$$

On pourra exploiter le théorème d' interversion limite/somme infinie.

Exercice 62 [00919] [Correction]
Par une interversion série-limite, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \exp(z).$$

Étude pratique de fonctions somme de série

Exercice 63 [00901] [Correction]
Pour $x > 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+n^2x}.$$

(a) Montrer que S est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
(b) Montrer que S est continue.
(c) Étudier la monotonie de S.
(d) Déterminer la limite en $+\infty$ de S puis un équivalent de S en $+\infty$.
(e) Déterminer un équivalent à S en 0.

Exercice 64 [00902] [Correction]
Sur $I = \left]-1\,;+\infty\right[$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

(a) Montrer que S est définie et continue sur I.
(b) Étudier la monotonie de S.
(c) Calculer

$$S(x+1) - S(x).$$

(d) Déterminer un équivalent de $S(x)$ en -1^+.

(e) Établir

$$\forall n \in \mathbb{N}, S(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(f) En déduire un équivalent de $S(x)$ en $+\infty$.

Exercice 65 [00906] [Correction]
Soit

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}.$$

(a) Quel est le domaine de définition de f ?
Étudier la continuité de f sur celui-ci.

(b) Montrer que f est strictement décroissante.

(c) Étudier la limite de f en $+\infty$.

(d) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand $x \to 0^+$.

Exercice 66 [00915] [Correction]
Pour $x \geq 0$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^{2n}}.$$

(a) Pour quelles valeurs de x dans $\mathbb{R}_+$, $S(x)$ est définie ?

(b) Former une relation entre $S(x)$ et $S(1/x)$ pour $x \neq 0$.

(c) Étudier la continuité de S sur $[0\,;1[$ puis sur $]1\,;+\infty[$.

(d) Dresser le tableau de variation de S.

Exercice 67 [02837] [Correction]
On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}.$$

Étudier le domaine de définition, la continuité, la dérivabilité de S. Donner un équivalent de S en 0 et en 1^-.

Exercice 68 [03203] [Correction]
Définition, continuité et dérivabilité de

$$S\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(1 + n^2x^2)}.$$

Exercice 69 [02529] [Correction]
Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$$

est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 70 [03427] [Correction]
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$u_n(x) = \arctan\sqrt{n + x} - \arctan\sqrt{n}.$$

(a) Étudier l'existence et la continuité de la fonction S définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

(b) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 71 [03797] [Correction]
On étudie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}.$$

(a) Montrer que f est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(b) Donner, à l'aide d'une comparaison intégrale, un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.

(c) Donner un développement limité à l'ordre 2 de f en 0. On donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Exercice 72 [03194] [Correction]
Définition, continuité et classe $\mathcal{C}^1$ de

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Exercice 73 [00904] [Correction]
Pour $t > 0$, on pose

$$S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nt}.$$

(a) Justifier que S est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Étudier la limite de S en $+\infty$.

(c) Établir que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 74 [03644] [Correction]
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x}{n+x^2}.$$

(a) Montrer que la fonction S est bien définie et étudier sa parité.

(b) Montrer que la fonction S est continue.

(c) Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 75 [00916] [Correction]
Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{x^n}{1+x^n}.$$

(a) Justifier que la fonction $f\colon x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

(b) Établir que pour tout $x \neq 0$,

$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(c) Établir que f est continue sur $]-1\,;1[$ puis que f est continue sur $]-\infty\,;-1[$ et $]1\,;+\infty[$.

(d) Établir la continuité de f en 1.

Exercice 76 [02835] [Correction]
Si $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^{n} (x+k)}.$$

(a) Montrer l'existence de $\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

(b) Montrer

$$\ln \Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

(c) Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 77 [00905] [Correction]
On fixe $\alpha > 0$ et on pose

$$f_n(x) = \mathrm{e}^{-n^\alpha x} \text{ et } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

(a) Domaine de définition de f ?

(b) Continuité de f ?

(c) Étudier $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 78 [02836] [Correction]
Soit α un réel. Pour tout entier $n > 0$ et tout réel x, on pose

$$u_n(x) = \frac{n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx}}{n^2+1}.$$

On note I le domaine de définition de

$$S\colon x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x).$$

(a) Déterminer I.

(b) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) A-t-on convergence normale sur $\mathbb{R}_+$?

(d) On suppose $\alpha \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$$

ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
La convergence de la série de fonctions $\sum u_n$ est-elle uniforme sur I ?

(e) Étudier la continuité de S sur I.

Exercice 79 [02971] [Correction]
Soit des suites réelles (a_n) et (x_n) avec $a_n > 0$ pour tout n.
On suppose que la série de terme général $a_n\bigl(1 + |x_n|\bigr)$ converge.
On pose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n|x - x_n|.$$

Étudier la continuité et la dérivabilité de f.

Exercice 80 [04173] [Correction]
On définit la suite de fonctions $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$:

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{x+n} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2x}{x^2 - n^2}.$$

(a) Écrire avec **Python** une fonction `S(N,x)` renvoyant $S_N(x)$.

(b) Écrire une fonction prenant trois paramètres `N`, `a` et `b` et traçant le graphe de S_N sur le segment $[a\,;b]$.

(c) Montrer que la suite (S_N) converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ vers une fonction que l'on notera S.

(d) Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(e) Montrer que S est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, impaire et 1-périodique.

(f) Montrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ S\left(\frac{x}{2}\right) + S\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2S(x).$$

(g) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \pi \cot(\pi x) - S(x)$ vérifie la même relation.

(h) Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$. En déduire S.

Suites et séries de fonctions vectorielles

Exercice 81 [01186] [Correction]
Soit E une algèbre de dimension finie munie d'une norme $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall a, b \in E, \|ab\| \leq \|a\|\|b\|.$$

(a) Soit $a \in E$ vérifiant $\|a\| < 1$. Montrer que $1_E - a$ est inversible et exprimer son inverse comme la somme d'une série.

(b) Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E.

(c) Montrer que l'application $x \in U(E) \mapsto x^{-1}$ est continue.

Exercice 82 [00573] [Correction]
On suppose $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme notée $\|\cdot\|$ vérifiant

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $|t| < 1/\|A\|$ on pose

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} t^k A^k.$$

(a) Montrer que f est bien définie.

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que

$$(I - tA)f'(t) = A.$$

Exercice 83 [04174] [Correction]
Soit

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{avec} \quad s \in \mathbb{C}.$$

(a) Montrer la définition de $\zeta(s)$ pour $\mathrm{Re}(s) > 1$.

(b) Montrer qu'alors

$$\zeta(s)\bigl(1 - 2^{1-s}\bigr) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}.$$

(c) En déduire un prolongement continu de ζ sur

$$\Omega = \bigl\{z \in \mathbb{C} \bigm| \mathrm{Re}(z) > 0\bigr\} \setminus \{1\}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Supposons que la suite (f_n) converge simplement vers f sur I avec chaque f_n convexe.
Pour tout $a, b \in I$ et $\lambda \in [0;1]$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f_n(a) + (1-\lambda) f_n(b).$$

À la limite quand $n \to +\infty$, on obtient

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$$

ce qui fournit la convexité de f.

Exercice 2 : [énoncé]
Par uniforme continuité, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, |x-y| \leq \alpha \implies \left|g(x) - g(y)\right| \leq \varepsilon.$$

Pour n assez grand, on a

$$\forall x \in I, \left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \alpha$$

et donc

$$\forall x \in I, \left|g(f_n(x)) - g(f(x))\right| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme de $(g \circ f_n)$ vers $g \circ f$.

Exercice 3 : [énoncé]
On peut écrire

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty.$$

Or $\|f_n\|_\infty \to \|f\|_\infty$ et donc la suite $\left(\|f_n\|_\infty\right)$ est bornée car convergente. Par opération sur les limites, on obtient alors

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f_n\|_\infty \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \|f_n - f\|_\infty \to 0$$

car $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \to 0$.

Exercice 4 : [énoncé]
Posons

$$m_n = \inf_{t \in [a;b]} f_n(t).$$

Puisque la fonction f_n est continue sur le segment $[a;b]$, cet infimum est une valeur prise par f_n et donc il existe $t_n \in [a;b]$ tel que

$$m_n = f_n(t_n).$$

Montrons que $m_n \to m$ avec

$$m = \inf_{t \in [a;b]} f.$$

La fonction f est continue car limite uniforme d'une suite de fonctions continues et donc il existe $t_\infty \in [a;b]$ pour lequel

$$m = f(t_\infty).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour n assez grand,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

et donc

$$m_n = f_n(t_n) \geq f(t_n) - \varepsilon \geq m - \varepsilon$$

et

$$m = f(t_\infty) \geq f_n(t_\infty) - \varepsilon \geq m_n - \varepsilon.$$

Ainsi

$$|m_n - m| \leq \varepsilon.$$

On peut alors affirmer $m_n \to m$.

Exercice 5 : [énoncé]
On a

$$\left|f_n(x_n) - f(x)\right| \leq \left|f_n(x_n) - f(x_n)\right| + \left|f(x_n) - f(x)\right|.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_1, \|f_n - f\|_{\infty,[a;b]} \leq \varepsilon$$

et il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_2, \left|f(x_n) - f(x)\right| \leq \varepsilon$$

car $f(x_n) \to f(x)$ en vertu de la continuité de f.
Pour $n_0 = \max(n_1, n_2)$, on a

$$\forall n \geq n_0, \left|f_n(x_n) - f(x)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Exercice 6 : [énoncé]
Pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, P_n - f \text{ est bornée et } \|P_n - f\|_\infty \leq 1.$$

Pour tout $n \geq N$, on peut alors affirmer que le polynôme $P_n - P_N = (P_n - f) - (P_N - f)$ est borné et donc constant. Puisque la suite (P_n) converge uniformément vers f, la suite $(P_n - P_N)_{n\geq N}$ converge uniformément vers $f - P_N$. Or cette suite étant formée de fonctions constantes, sa convergence équivaut à la convergence de la suite de ces constantes. En posant C la limite de cette suite, on obtient

$$f = P_N + C$$

et donc f est une fonction polynôme.

Exercice 7 : [énoncé]
Les fonctions u_n sont continues sur $[0\,;1]$ pour $n \geq 1$ et dérivables sur $]0\,;1]$ avec

$$u_n'(x) = x^{n-1}(1 + n\ln x).$$

Le tableau de variation de u_n donne

$$\sup_{[0;1]}|u_n| = -u_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{ne} \to 0.$$

La suite de fonctions converge donc uniformément sur $[0\,;1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 8 : [énoncé]
Pour $x \in [0\,;+\infty[$, $f_n(x) \to 0$ car $\left|f_n(x)\right| \leq \frac{x}{n}$.
On a

$$f_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1+(1-n)x^n}{n(1+x^n)^2}.$$

Posons $x_n = \sqrt[n]{1/(n-1)}$.

x	0		x_n		$+\infty$
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	M_n	$\searrow$	0

donc

$$\|f_n\|_\infty = M_n = f_n(x_n) = \frac{\sqrt[n]{1/(n-1)}}{n(1+\frac{1}{n-1})} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{n}\ln(n-1)}}{\frac{n^2}{n-1}} \to 0.$$

Il y a donc convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Soit $x \in [0\,;+\infty[$.
Si $x = 0$ alors $u_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x > 0$ alors $u_n(x) \to 0$ car $\mathrm{e}^{-nx} \to 0$.
La suite de fonctions (u_n) converge donc simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On a

$$\sup_{x\in[a;+\infty[}\left|u_n(x)\right| \leq \mathrm{e}^{-na} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

(c) Puisque

$$\|u_n\|_\infty \geq u_n(\pi/2n) = \mathrm{e}^{-\pi/2} \not\to 0$$

il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 10 : [énoncé]
$f_n'(x) = nx(2 - nx)\mathrm{e}^{-nx}$, le tableau de variation de f_n donne

$$\sup_{\mathbb{R}_+}|f_n| = f_n(2/n) = \frac{4}{n}\mathrm{e}^{-2} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et donc *a fortiori* sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 11 : [énoncé]
$f_n(0) \to 1$ et $f_n(x) \to 0$ pour $x \neq 0$. La fonction limite n'étant pas continue, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$. En revanche si $|x| \geq |a|$ alors

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{(1+a^2)^n} \to 0$$

donc il y a convergence uniforme sur $]-\infty\,;-a] \cup [a\,;+\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 12 : [énoncé]

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, nul ou non, on a $f_n(x) \to 0$. Il y a convergence simple vers la fonction f nulle. On a

$$f_n(x) - f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{nx} = \frac{x}{n} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

La fonction $f_n - f$ n'étant pas bornée sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

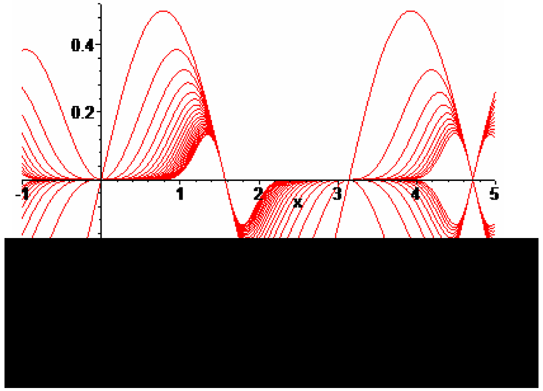

FIGURE 1 – Les premières fonctions de la suite (f_n)

(b) Sur $[-a\,;a]$,
$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{x^2}{n|x|} = \frac{|x|}{n} \leq \frac{a}{n} \to 0$$
via $|\sin t| \leq |t|$. Par suite il y a convergence uniforme sur $[-a\,;a]$.

Exercice 13 : [énoncé]
Pour $x \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ on a $|\sin x| < 1$ et donc $f_n(x) \to 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\cos x = 0$ et donc $f_n(x) = 0 \to 0$.
Ainsi (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
Par 2π périodicité et parité on ne poursuit l'étude qu'avec $x \in [0\,;\pi]$. La fonction f_n est dérivable avec
$$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)((n+1)\cos^2(x) - 1).$$
On peut dresser le tableau de variation de f_n sur $[0\,;\pi]$ et on obtient
$$\sup_{\mathbb{R}}|f_n| = \left|f_n\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\right| = \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^{n/2}\frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 0.$$
La suite de fonction (f_n) converge donc uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 14 : [énoncé]
f_n est définie sur $\mathbb{R}^*$ et peut être prolongée par continuité en 0 en posant sur $f_n(0) = n$.
Pour $x \leq 0$, $f_n(x) \to +\infty$.
Pour $x > 0$, $f_n(x) \to 0$.
Ainsi, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}_+^*$.
Il ne peut y avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$ car alors, par le théorème de la double limite :
$$\lim_{x\to 0^+}\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 0^+} f_n(x)$$
donne $0 = +\infty$.
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$,
$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{nx^2\mathrm{e}^{-nx}}{1-\mathrm{e}^{-a^2}}$$
et par étude fonctionnelle $nx^2\mathrm{e}^{-nx} \leq \frac{4}{n}\mathrm{e}^2$ (maximum en $x = 2/n$) donc
$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{4\mathrm{e}^2}{n(1-\mathrm{e}^{-a^2})} \to 0$$
qui donne la convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$.

Exercice 15 : [énoncé]
Quand $p \to +\infty$,
$$f_p(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+1/p}} \to \frac{1}{1+x} = f(x).$$
On a
$$f(x) - f_p(x) = \frac{(1+x)^{1/p} - 1}{(1+x)^{1+1/p}}.$$
Or, pour $\alpha \in \left]0\,;1\right]$, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est concave ce qui permet d'affirmer
$$0 \leq (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$
pour tout $x \geq 0$ et donc
$$\left|f(x) - f_p(x)\right| \leq \frac{1}{p}\frac{x}{(1+x)^{1+1/p}} \leq \frac{1}{p}\frac{x}{1+x} \leq \frac{1}{p}.$$
Puisque $\|f - f_p\|_{\infty,\mathbb{R}_+} \leq \frac{1}{p}$, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 16 : [énoncé]
La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle et
$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|f_n(x)\right| = \left|f_n(\pm 1/\sqrt{n2^n})\right| = \frac{\sqrt{2^n}}{2\sqrt{n}} \to +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
Or $\pm 1/\sqrt{n2^n} \to 0$ et donc d'après le tableau de variation de f_n, pour tout $a > 0$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x \geq a} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0.$$

Ainsi, il y a convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$ et de même sur $]-\infty\,;-a]$.
En revanche, il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 0.

Exercice 17 : [énoncé]
On a

$$\sup_{x \in [0;1]} |f_n(x)| = f_n\big(1/\sqrt[2^n]{2}\big) = 4^{n-1} \to +\infty$$

il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0\,;1]$.
Or $1/\sqrt[2^n]{2} \to 1$ et donc d'après le tableau de variation de f_n, pour tout $a \in [0\,;1[$, on a, pour n assez grand,

$$\sup_{x \in [0;a]} |f_n(x)| = f_n(a) \to 0.$$

Ainsi il y a convergence uniforme sur $[0\,;a]$. En revanche il n'y aura pas convergence uniforme sur les intervalles non singuliers contenant 1.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 0 \to 0$.
Si $x \in]0\,;1]$ alors $f_n(x) \to 0$ par comparaison des suites de référence.

(b) $f_n'(x) = n^\alpha(1-x)^n - n^{\alpha+1}x(1-x)^{n-1} = n^\alpha(1-x)^{n-1}(1-(n+1)x)$.
Après étude des variations

$$\|f_n\|_\infty = f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = n^\alpha \frac{1}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n.$$

Or $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ et

$$\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln(1-\frac{1}{n+1})} = \mathrm{e}^{-1+\mathrm{o}(1)} \to \mathrm{e}^{-1}$$

donc $\|f_n\|_\infty \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\mathrm{e}}$.
Il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Exercice 19 : [énoncé]
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour n assez grand

$$f_n(x) = (1 - x/n)^n = \exp\big(n\ln(1 - x/n)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-x}.$$

La suite (f_n) converge simplement vers $f\colon x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ avec $f_n \leq f$.
Étudions $\delta_n = f - f_n \geq 0$.
Pour $x \in [n\,;+\infty[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \leq \mathrm{e}^{-n}$.
Pour $x \in [0\,;n[$, $\delta_n(x) = \mathrm{e}^{-x} - (1-x/n)^n$ et $\delta_n'(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (1-x/n)^{n-1}$.
Posons

$$\varphi_n(x) = (n-1)\ln(1 - x/n) + x.$$

On a

$$\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{n}\frac{1}{x/n - 1} + 1 = \frac{x-1}{x-n}$$

est du signe de $1 - x$.
Par étude des variations de φ_n, on obtient l'existence de $x_n \in [0\,;n[$ tel que $\varphi_n(x) \geq 0$ pour $x \leq x_n$ et $\varphi_n(x) \leq 0$ pour $x \geq x_n$. On en déduit que pour $x \leq x_n$, $\delta_n'(x) \geq 0$ et pour $x \geq x_n$, $\delta_n'(x) \leq 0$. Ainsi

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} = \delta_n(x_n) = \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = \frac{x_n}{n}\mathrm{e}^{-x_n}.$$

Puisque la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est bornée par un certain M sur $\mathbb{R}_+$, on obtient

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;n[} \leq \frac{M}{n}.$$

Finalement

$$\|\delta_n\|_{\infty,[0;+\infty[} \leq \max\left(\frac{M}{n}, \mathrm{e}^{-n}\right) \to 0.$$

On peut donc affirmer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) $f_n(x) = \exp(-n\ln(1 + \frac{x}{n})) = \exp(-x + \mathrm{o}(1)) \to \mathrm{e}^{-x} = f(x)$.
On sait $\ln(1+t) \leq t$ donc par opérations : $f_n(x) \geq \mathrm{e}^{-x}$

(b) On sait

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

donc

$$\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} \leq \ln(1 + \frac{x}{n}) \leq \frac{x}{n}$$

puis
$$e^{-x} \le f_n(x) \le e^{-x+\frac{x^2}{2n}} = e^{-x}e^{\frac{x^2}{2n}}.$$
Sur $[0\,;a]$ on a $e^{\frac{x^2}{2n}} \le e^{\frac{a^2}{2n}} \to 1$.
Pour $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \ge N$, $\left|e^{a^2/2n} - 1\right| \le \varepsilon$.
On a alors pour tout $x \in [0\,;a]$,
$$\left|f_n(x) - f(x)\right| \le e^{-x}\left(e^{x^2/2n} - 1\right) \le e^{a^2/2n} - 1 \le \varepsilon.$$
Par suite $f_n \xrightarrow[{[0;a]}]{CU} f$.

(c) Les fonctions f_n sont décroissantes donc
$$\forall x \ge a, f_n(x) \le f_n(a).$$
Soit $\varepsilon > 0$.
Puisque $e^{-a} \xrightarrow[a\to+\infty]{} 0$, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \ge a$,
$$e^{-x} \le \varepsilon/3.$$
Puisque $f_n(a) \to e^{-a}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \ge N, \left|f_n(a) - e^{-a}\right| \le \varepsilon/3.$$
Mais alors $\forall x \ge a$,
$$\left|f_n(x) - e^{-x}\right| \le f_n(x) + e^{-x} \le f_n(a) + e^{-x} \le \left(f_n(a) - e^{-a}\right) + e^{-a} + e^{-x} \le \varepsilon.$$
De plus, $f_n \xrightarrow[{[0;a]}]{CU} f$ donc il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \ge N', \forall x \in [0\,;a] \left|f_n(x) - e^{-x}\right| \le \varepsilon.$$
Finalement
$$\forall n \ge \max(N, N'), \forall x \in \mathbb{R}_+, \left|f_n(x) - e^{-x}\right| \le \varepsilon.$$
Ainsi $f_n \xrightarrow[\mathbb{R}_+]{CU} f$.

Exercice 21 : [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0$ et pour $x > 0$, on a aussi $f_n(x) = 0$ pour n assez grand. Par suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.

(b) On a
$$\int_0^1 f_n(t)\,dt = \int_0^{1/n} n^2 t(1-nt)\,dt = \int_0^1 u(1-u)\,du = \frac{1}{6}.$$
Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n) puisque
$$\int_0^1 f_n(t)\,dt \not\to \int_0^1 0\,dt.$$

(c) Pour n assez grand, $\sup_{[a;1]}\left|f_n(x)\right| = 0$ donc (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a\,;1]$.

Exercice 22 : [énoncé]

(a) Pour $x = 0$, $f_n(x) = 0 \to 0$. Pour $x \in]0\,;\pi/2]$, $\cos x \in [0\,;1[$ donc $f_n(x) \to 0$.

(b) Directement
$$I_n = \left[-\frac{n}{n+1}\cos^{n+1}x\right]_0^{\pi/2} = \frac{n}{n+1}$$
donc $I_n \to 1 \ne \int_0^{\pi/2} 0.\,dx$ et il n'y a pas convergence uniforme.

(c) On a

x	0		x_n		$\pi/2$
f_n	0	$\nearrow$	$f_n(x_n)$	$\searrow$	0

avec $x_n = \arccos\sqrt{\frac{n}{n+1}} \to 0$ et
$$f_n(x_n) = \frac{\sqrt{n}}{(1+1/n)^{(n+1)/2}} \sim \sqrt{\frac{n}{e}} \to +\infty.$$
Soit $[a\,;b] \subset]0\,;\pi/2]$. On a $a > 0$ donc à partir d'un certain rang $x_n < a$ et alors $\sup_{[a;b]}|f_n| = f_n(a) \to 0$ donc il y a convergence uniforme sur $[a\,;b]$.

Exercice 23 : [énoncé]

(a) En distinguant le cas $x = 0$ du cas général, on obtient que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction f donnée par $f(x) = x$.

(b) Par étude des variations de $f_n(x) - f(x)$, on obtient qu'il y a convergence uniforme si, et seulement si, $\alpha < 1$.

(c) Par un argument de convergence uniforme, on peut échanger limite et intégrale
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Pour $x \geq 0$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)$ est une suite homographique.
L'équation $r = \frac{x}{2+r}$ possède deux solutions $r_1 = \sqrt{1+x}-1$ et $r_2 = -\sqrt{1+x}-1$.
Posons

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}.$$

On a

$$g_{n+1}(x) = \frac{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_1}}{\frac{x}{2+f_n(x)} - \frac{x}{2+r_2}} = \frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}\frac{2+r_2}{2+r_1} = \rho g_n(x)$$

avec

$$\rho = \frac{2+r_2}{2+r_1} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Puisque $|\rho| < 1$, la suite géométrique $(g_n(x))$ converge vers 0.
Or après résolution de l'équation

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)-r_1}{f_n(x)-r_2}$$

on obtient

$$f_n(x) = \frac{r_1 - g_n(x)r_2}{1-g_n(x)}$$

et on en déduit que la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $r_1 = \sqrt{1+x}-1$.
Finalement, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction $f_\infty\colon x \mapsto \sqrt{1+x}-1$.
Puisque les fonctions f_n sont rationnelles de degrés alternativement 0 et 1, la fonction $|f_n - f_\infty|$ ne peut-être bornée sur $\mathbb{R}_+$ car de limite $+\infty$ en $+\infty$; il n'y a donc pas convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.
En revanche, on peut montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0\,;a]$ pour tout $a \geq 0$.
En effet

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1-g_n(x)}2\sqrt{1+x}.$$

D'une part, la fonction $x \mapsto 2\sqrt{1+x}$ est bornée sur $[0\,;a]$.
D'autre part,

$$g_n(x) = \left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right)^n g_0(x).$$

Sur $[0\,;a]$, la fonction

$$x \mapsto \left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|$$

admet un maximum de valeur < 1 et puisque la fonction continue g_0 est bornée sur $[0\,;a]$, on peut montrer que la suite de fonctions (g_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0\,;a]$.
La relation

$$f_n(x) - f_\infty(x) = \frac{g_n(x)}{1-g_n(x)}2\sqrt{1+x}$$

permet alors d'établir que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers f_∞ sur $[0\,;a]$.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) On vérifie sans peine que la suite (f_n) est bien définie.

$$f_1(x) = x, f_2(x) = \frac{2}{3}x^{3/2}, \dots$$

Si $f(x) = \alpha x^\beta$ alors

$$\Phi(f)(x) = \sqrt{\alpha}\int_0^x t^{\beta/2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\beta+2}x^{\beta/2+1}.$$

Ainsi $f_n(x) = \alpha_n x^{\beta_n}$ avec

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{\beta_n+2} \text{ et } \beta_{n+1} = \frac{\beta_n}{2}+1.$$

On a

$$\beta_n = \frac{2^n-1}{2^{n-1}} \to 2$$

et, pour $n \geq 1$,

$$\alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

On a

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} = \frac{2\sqrt{\alpha_{n+1}}}{4-\frac{1}{2^n}} - \frac{2\sqrt{\alpha_n}}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

Or $2^n \geq 2^{n-1}$ donne

$$\frac{2}{4-\frac{1}{2^n}} \leq \frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}$$

donc

$$\alpha_{n+2} - \alpha_{n+1} \leq \frac{2}{4-\frac{1}{2^{n-1}}}\big(\sqrt{\alpha_{n+1}} - \sqrt{\alpha_n}\big).$$

Puisque $\alpha_1 = \alpha_0$, on obtient alors par récurrence que la suite (α_n) est décroissante.
Étant aussi minorée par 0, elle converge et en passant la relation de récurrence à la limite, on obtient

$$\alpha_n \to 1/4.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction

$$f\colon x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

De plus

$$f_n(x) - f(x) = \alpha_n\left(x^{\beta_n} - x^2\right) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)x^2.$$

Puisque $\beta_n \leq 2$, on a pour tout $x \in [0\,;1]$ et en exploitant $\mathrm{e}^u \leq 1 + u$

$$\begin{aligned}0 \leq x^{\beta_n} - x^2 &= \int_{\beta_n}^{2} \left|\ln(x)\right| x^t \,\mathrm{d}t \\ &\leq (2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|.x^{\beta_n} \leq (2-\beta_n)\left|\ln(x)\right|x.\end{aligned}$$

Puisque la fonction $x \mapsto x|\ln x|$ est bornée par $1/\mathrm{e}$ sur $[0\,;1]$,

$$0 \leq x^{\beta_n} - x^2 \leq 2 - \beta_n$$

et ainsi

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| = \alpha_n(2-\beta_n) + \left(\alpha_n - \frac{1}{4}\right)$$

et ce majorant uniforme tend vers 0.
Il y a donc convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) vers f.

(b) La relation

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \sqrt{f_n(t)}\,\mathrm{d}t$$

donne à la limite

$$f(x) = \int_0^x \sqrt{f(t)}\,\mathrm{d}t$$

d'où l'on tire f dérivable et $f'(x) = \sqrt{f(x)}$.
Pour l'équation différentielle $y' = \sqrt{y}$, il n'y a pas unicité de la solution nulle en 0, car outre la fonction nulle, la fonction $y\colon x \mapsto (x/2)^2$ est justement solution.

Exercice 26 : [énoncé]
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \to x$ et

$$\left|f_n(x) - x\right| = 1/n \to 0.$$

La suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction identité.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)^2 \to x^2$ et

$$f_n(n)^2 - n^2 = 2 + 1/n^2 \to 2.$$

Il n'y a pas convergence uniforme de la suite (f_n^2).

Exercice 27 : [énoncé]
Par opérations, les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ car $\sqrt{\ }$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
La suite (f_n) converge simplement vers f avec $f(x) = |x|$ qui n'est pas dérivable en 0.
En multipliant par la quantité conjuguée :

$$f_n(x) - f(x) = \frac{1/n}{\sqrt{x^2 + 1/n} + \sqrt{x^2}}.$$

Par suite $\left|f_n(x) - f(x)\right| \leq \frac{1/n}{\sqrt{1/n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$ puis $\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$.
Ainsi la suite (f_n) converge uniformément vers une fonction f qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 28 : [énoncé]
Par la formule de Taylor Lagrange :

$$\left|f(x + \frac{1}{n}) - f(x) - \frac{1}{n}f'(x)\right| \leq \frac{M}{n^2}$$

avec $M = \sup|f''|$.
Par suite

$$\left|g_n(x) - f'(x)\right| \leq \frac{M}{n}$$

et donc

$$\left\|g_n(x) - f'(x)\right\|_{\infty,\mathbb{R}} \to 0.$$

Exercice 29 : [énoncé]
On a
$$\forall x \in [0\,;1], f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0)$$
donc
$$\|f_n - 0\|_\infty = \max(f_n(0), -f_n(1)) \leq \max(\left|f_n(0)\right|, \left|f_n(1)\right|) \leq \left|f_n(0)\right| + \left|f_n(1)\right| \to 0.$$

Exercice 30 : [énoncé]
Si $|\omega| > 1$ alors
$$\frac{1}{z-\omega} = -\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\omega^n}$$
et la convergence normale sur U de la série assure la convergence uniforme d'une suite de polynômes vers
$$z \mapsto \frac{1}{z-\omega}.$$
Si $|\omega| < 1$, on peut remarquer que pour $k \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} \omega^n \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+(k+1))\theta}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$
Si $z \mapsto P_n(z)$ est une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément sur U vers $z \mapsto \frac{1}{z-\omega}$ alors
$$\int_0^{2\pi} \overline{P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega|^2} \neq 0.$$
Or par le calcul précédent, on peut affirmer
$$\int_0^{2\pi} \overline{P_n(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega}\,\mathrm{d}\theta = 0.$$
On conclut à une absurdité.
La condition cherchée est $|\omega| > 1$.

Exercice 31 : [énoncé]
Pour $t \in \mathbb{R}$, on a
$$u_n(t) = \frac{f(t+1/n)-f(t)}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f'(t).$$
La suite de fonctions $(u_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers f' sur $\mathbb{R}$.
Soient $[a\,;b] \subset \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. La fonction f' est continue sur le compact $[a\,;b+1]$ dont uniformément continue. Il existe alors $\alpha > 0$ vérifiant
$$\forall (s,t) \in [a\,;b+1]^2, |s-t| \leq \alpha \implies \left|f'(s)-f'(t)\right| \leq \varepsilon.$$
Pour n assez grand de sorte que $1/n \leq \alpha$ et $t \in [a\,;b]$. On peut écrire
$$n\big(f(t+1/n)-f(t)\big) - f'(t) = n\int_t^{t+1/n} \big(f'(s)-f'(t)\big)\,\mathrm{d}s$$
et donc
$$\left|u_n(t) - f'(t)\right| \leq n\int_t^{t+1/n} \left|f'(s)-f'(t)\right|\mathrm{d}t \leq \varepsilon.$$
Ainsi, la convergence de $(u_n)_{n\geq 1}$ est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 32 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$: $u_0(x) = 1$ et $u_1(x) = 1 + \int_0^x \mathrm{d}t = 1 + x$ donc $0 \leq u_1(x) - u_0(x) = x$.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 0$.
$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) = \int_0^x u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t$$
or $u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \geq 0$ donc $u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \geq 0$ et
$$u_{n+1}(t-t^2) - u_n(t-t^2) \leq \frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$
puis
$$u_{n+2}(x) - u_{n+1}(x) \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}.$$
Récurrence établie.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on sait qu'il y a convergence de la série exponentielle
$$\sum \frac{x^n}{n!}.$$
Par comparaison de série à termes positifs, il y a convergence de la série télescopique
$$\sum u_{n+1}(x) - u_n(x)$$
et donc convergence de la suite $\big(u_n(x)\big)$.

(c) Pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\left|u(x) - u_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(u_k(x) - u_{k-1}(x)\right)\right|$$

donc

$$\left|u(x) - u_n(x)\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi (u_n) converge uniformément vers u. On en déduit que u est continue et, toujours par convergence uniforme

$$\forall x \in [0\,;1], \int_0^x u_n(t-t^2)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\forall x \in [0\,;1], u(x) = 1 + \int_0^x u(t-t^2)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction est donc une fonction non nulle (car $u(0) = 1$) et dérivable avec

$$u'(x) = u(x-x^2).$$

Exercice 33 : [énoncé]

(a) Les fonctions $f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers S.
Soi $a > 0$. Sur $[a\,;+\infty[$,

$$\|f_n'\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{1}{(n+a)^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} < +\infty$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $[a\,;+\infty[$.
Par théorème, S est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}$. Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et la fonction S est décroissante.

(c)

$$S(x+1)+S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} = \frac{1}{x}.$$

(d) Quand $x \to 0$, $S(x) = \frac{1}{x} - S(x+1)$ et $S(x+1) \to S(1)$ donc

$$S(x) \sim \frac{1}{x}.$$

(e) Quand $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{2}(S(x) + S(x+1)) \leq S(x) \leq \frac{1}{2}(S(x) + S(x-1))$$

avec $\frac{1}{x} \sim \frac{1}{x-1}$ donne

$$S(x) \sim \frac{1}{2x}.$$

Exercice 34 : [énoncé]
Posons $u_n\colon]0\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ donnée par

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}.$$

(a) Par le critère spécial, $\sum u_n(x)$ converge pour chaque $x > 0$.
Il y a convergence simple de la série de fonctions définissant F.

(b) Les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et pour $n \geq 1$

$$u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+x)^2}.$$

On a

$$\|u_n'\|_\infty = \frac{1}{n^2}.$$

Il y a convergence normale $\sum u_n'$ pour $n \geq 1$.
Il y a donc convergence uniforme de $\sum u_n'$ (pour $n \geq 0$) et l'on peut donc conclure que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
De la même manière, on obtient F de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(c) Par décalage d'indice

$$F(x+1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1+x}=-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x}$$

et donc

$$F(x)+F(x+1)=\frac{1}{x}.$$

(d) Posons

$$G(x)=\int_0^1\frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale est bien définie pour $x>0$ et l'on remarque

$$G(x)+G(x+1)=\frac{1}{x}.$$

Posons $H=F-G$. La fonction H est 2-périodique, montrons qu'elle tend vers 0 en $+\infty$.
Par application du critère spécial, on a

$$\forall x>0, F(x)\geq 0$$

donc

$$0\leq F(x)\leq F(x)+F(x+1)=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

et par encadrement F tend vers 0 en $+\infty$.
Le même raisonnement se transpose à G.
On peut conclure que H tend vers 0 en $+\infty$ puis finalement H est nulle.

(e) Quand $x\to 0$, $F(x+1)\to F(1)$ par continuité et donc

$$F(x)=\frac{1}{x}-F(x+1)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{1}{x}.$$

On vérifie aisément que F est décroissante et puisque

$$\frac{1}{x}=F(x)+F(x+1)\leq 2F(x)\leq F(x)+F(x-1)=\frac{1}{x-1}$$

on obtient

$$F(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2x}.$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) $f_n\colon x\mapsto\prod_{k=0}^n\frac{1}{(x+k)}$, f_n est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Soit $a>0$. Sur $[a\,;+\infty[$,

$$\|f_n\|_\infty\leq\frac{1}{a}\frac{1}{n!}.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$. Par théorème, la somme S de la série $\sum f_n$ est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b)

$$S(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{(x+k)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{(x+1+k)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}S(x+1).$$

(c) Par converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0.$$

Quand $x\to+\infty$,

$$S(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}S(x+1)=\frac{1}{x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)\sim\frac{1}{x}.$$

Quand $x\to 0$,

$$S(x+1)\to S(1)$$

par continuité et

$$S(1)=\sum_{n=0}^{+\infty}\prod_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)!}=\mathrm{e}-1$$

donc

$$S(x)=\frac{1+S(x+1)}{x}\sim\frac{\mathrm{e}}{x}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) Par le théorème des accroissements finis, on peut écrire $f_n(x)=x(\mathrm{th})'(c)$ avec $c\in\,]n\,;x+n[$.Puisque $(\mathrm{th})'(c)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(c)}$, on a

$$\left|f_n(x)\right|\leq\frac{x}{\mathrm{ch}^2(n)}\sim\frac{4x}{\mathrm{e}^{2n}}.$$

Par suite $n^2f_n(x)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum f_n$ converge simplement.

(b) Pour $a \in \mathbb{R}_+$, l'étude qui précède donne

$$\|f_n\|_{\infty,[0;a]} \leq \frac{a}{\operatorname{ch}^2(n)}$$

donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0\,;a]$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonction continue, on peut affirmer que S est continue. De plus, les fonctions sommées étant toutes strictement croissantes, la somme S l'est aussi.
En effet, pour $x < y$,

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) < \sum_{k=1}^{n} f_k(y)$$

donne à la limite

$$\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f_k(y)$$

et puisque $f_0(x) < f_0(y)$, on parvient à

$$S(x) < S(y).$$

(c)

$$S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(\operatorname{th}(x+1+n)-\operatorname{th}(n)\bigr) = \sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(\operatorname{th}(x+1+n)-\operatorname{th}(n+1)\bigr)+\sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(\operatorname{th}(n+1)-\operatorname{th} n\bigr)$$

avec convergence des deux séries introduites.
Par décalage d'indice

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(\operatorname{th}(x+1+n)-\operatorname{th}(n+1)\bigr) = S(x)-\operatorname{th} x$$

et par étude la limite des sommes partielles

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\bigl(\operatorname{th}(n+1)-\operatorname{th} n\bigr) = 1.$$

On conclut à la relation proposée.

(d) S admet une limite en $+\infty$ car c'est une fonction monotone. Pour déterminer celle-ci, étudions la limite de la suite $(S(n))$. La nature de la suite $S(n)$ est celle de la série de terme général

$$S(n+1)-S(n) = 1-\operatorname{th} n.$$

Or

$$1-\operatorname{th} n = \frac{\operatorname{ch} n - \operatorname{sh} n}{\operatorname{ch} n} = \frac{\mathrm{e}^{-n}}{\operatorname{ch} n} \sim \frac{1}{2\mathrm{e}^{-2n}}$$

est terme général d'une série absolument convergente.
On en déduit que la suite $(S(n))$ converge et donc que la fonction S converge.

Exercice 37 : [énoncé]
Puisque la fonction f est décroissante, elle admet une limite en $+\infty$. Puisque la fonction f est aussi intégrable cette limite est nécessairement nulle. En particulier, la fonction f est positive.
Par télescopage, on observe

$$g(x+N)-g(x) = \sum_{k=0}^{N-1} f(x+k)$$

et s'il l'on s'adjoint la contrainte d'une limite nulle à g en $+\infty$, on est tenté de poser

$$g(x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} f(x+k).$$

Il reste à montrer que cette fonction est bien définie et continue ce qui sera obtenu par un argument de convergence normale. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a pour $k \geq 1$

$$0 \leq f(x+k) \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

donc

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+} \bigl|f(x+k)\bigr| \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par intégrabilité de f, il y a convergence de la série

$$\sum \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{k\geq 1} f(x+k).$$

L'adjonction du terme d'indice $k=0$ ne change rien et l'on peut conclure.
On vient ainsi de trouver une solution au problème posé, d'autres solutions s'en déduisent par ajout d'une constante.

Exercice 38 : [énoncé]

(a) $f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$f_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!(x+n)^2}$$

$\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ vers S.

$$\forall a > 0, \|f_n'\|_{\infty,[a;+\infty[} = \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ et } \sum \frac{1}{n!(n+a)^2} \text{ converge}$$

donc $\sum f_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$. Par théorème S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées à la série de somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!(n+x)^2}.$$

Celle-ci est donc du signe de son premier terme $\frac{-1}{x^2}$. Ainsi $S'(x) \leq 0$ et S est décroissante.

(c)

$$xS(x) - S(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x}{n!(x+n)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!(x+n)} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(d)

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \text{ et } S(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Quand $x \to 0^+$, $xS(x) \to 1$ d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{x}.$$

(e) Par le critère spécial des séries alternées,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!(x+k)}\right| \leq \frac{1}{(n+1)!(x+1+n)} \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{1}{(n+1)!} \to 0.$$

Par converge uniformément sur $]0\,;+\infty[$,

$$\lim_{x\to+\infty} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

Quand $x \to +\infty$,

$$xS(x) = \frac{1}{\mathrm{e}} + S(x+1) \to \frac{1}{\mathrm{e}}$$

d'où

$$S(x) \sim \frac{1}{\mathrm{e}x}.$$

Exercice 39 : [énoncé]

On a

$$\frac{1}{x+n} + \frac{1}{x-n} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

d'où l'existence de la somme.

$$f(x) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+k}.$$

Or

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{x+1+k} = \sum_{k=-N+1}^{N+1} \frac{1}{x+k}$$

donc à la limite quand $N \to +\infty$, on obtient $f(x+1) = f(x)$.

$$\sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x}{2}+k} + \sum_{k=-N}^{N} \frac{1}{\frac{x+1}{2}+k} = 2\sum_{k=-2N+1}^{2N+1} \frac{1}{x+k}$$

donne à la limite

$$f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2f(x).$$

Exercice 40 : [énoncé]

Les fonctions constantes sont solutions et les solutions forment un sous-espace vectoriel.

Soit f une solution. Quitte à ajouter une fonction constante, on peut supposer $f(0) = 0$.

On a

$$f(x) = \frac{f(x)}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$$

donc

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^{n+1})}{2^n}.$$

Posons $h(x) = \sup_{[0;x]} |f|$.
Pour $x > 0$, on a $x^{n+1} \in [0\,;x^2]$ pour tout $n \geq 1$. On en déduit

$$\left|f(x)\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} h(x^2) = h(x^2).$$

Ainsi $h(x) \leq h(x^2)$ puis en itérant $0 \leq h(x) \leq h(x^{2^n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Or pour $x \in [0\,;1[$, $x^{2^n} \to 0$ et $\lim_{0^+} h = 0$ (car $f(0) = 0$) donc $h(x) = 0$ sur $[0\,;1[$.
Finalement f est nulle sur $[0\,;1[$ puis en 1 par continuité.

Exercice 41 : [énoncé]

(a) Si f est constante égale à C alors l'équation (E) est vérifiée si, et seulement si, $C = 2C - 2C^2$. Cette dernière équation est vérifiée pour $C = 0$ et $C = 1/2$ seulement.

(b) Après substitution et étude séparée du cas $x = 0$, on obtient f solution de (E) si, et seulement si, h vérifie

$$h(2x) = h(x) - xh(x)^2.$$

(c) L'application T_x est de classe $\mathcal{C}^1$ et $T_x'(y) = 1 - xy$. Sur $[0\,;1]$, on vérifie $\left|T_x'(y)\right| \leq 1$ et la fonction T_x est donc 1-lipschitzienne sur $[0\,;1]$. Au surplus, la fonction T_x est croissante sur $[0\,;1]$ avec $T_x(0) = 0$ et $T_x(1) = 1 - x/2$. On en déduit $T_x\Big([0\,;1]\Big) \subset [0\,;1]$.

Par une récurrence immédiate, on vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0\,;1], h_n(x) \in [0\,;1].$$

Pour $n \geq 1$ et $x \in [0\,;1]$, on a par lipschitzianité

$$\left|h_{n+1}(x) - h_n(x)\right| \leq \left|h_n\left(\frac{x}{2}\right) - h_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right|.$$

En répétant cette majoration

$$\left|h_{n+1}(x) - h_n(x)\right| \leq \left|h_1\left(\frac{x}{2^n}\right) - h_0\left(\frac{x}{2^n}\right)\right| = \frac{x}{2^{n+1}} \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

La série télescopique $\sum h_{n+1}(x) - h_n(x)$ converge donc absolument et la suite $(h_n(x))$ est donc convergente. La suite de fonctions (h_n) converge donc simplement vers une fonction h. Au surplus

$$\left|h(x) - h_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n}^{+\infty} h_{k+1}(x) - h_k(x)\right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

La convergence de la suite (h_n) est donc uniforme sur $[0\,;1]$.

(d) La fonction h est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, elle est donc continue sur $[0\,;1]$. En passant à la limite la relation

$$\forall x \in [0\,;1], h_{n+1}(x) = h_n\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} h_n\left(\frac{x}{2}\right)^2$$

on obtient l'identité

$$\forall x \in [0\,;1], h(x) = h\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2} h\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Puisque $h_n(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h(0) = 1$ et la fonction h n'est pas nulle. On peut alors définir la fonction $f\colon x \mapsto xh(x)$ qui est continue, non constante et vérifie

$$\forall x \in [0\,;1], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

(e) On peut ensuite définir une solution sur $[0\,;2]$ en posant

$$\forall x \in \left]1\,;2\right], f(x) = 2f\left(\frac{x}{2}\right) - 2f\left(\frac{x}{2}\right)^2.$$

Cette solution est bien continue en 1 car

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = 2f\left(\frac{1}{2}\right) - 2f\left(\frac{1}{2}\right)^2 = f(1).$$

De même, on prolonge la solution sur $[0\,;4]$, $[0\,;8]$, etc.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Pour $x>0$, $u_n(x)=\mathrm{O}(1/n^2)$. La série $\sum u_n(x)$ converge absolument.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$, les fonctions u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ avec
$$u_n'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+x}.$$
Soit $[a\,;b]\subset\mathbb{R}_+^*$. Par monotonie, pour tout $x\in[a\,;b]$
$$\left|u_n'(x)\right|\leq\left|u_n'(a)\right|+\left|u_n'(b)\right|=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Il y a donc convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. La fonction somme de $\sum u_n$ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ et la fonction f l'est aussi par opérations.

(b) La fonction est de classe $\mathcal{C}^1$. Il est immédiat que $f(1)$ est nul et, pour tout $x>0$, on a après télescopage
$$f'(x+1)-f'(x)=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+x}-\frac{1}{n+x+1}\right)=\frac{1}{x}$$
et
$$\begin{aligned}f(2)-f(1)=f(2)&=-\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)\\&=-\ln 2+\sum_{n=1}^{+\infty}\bigl(2\ln(n+1)-\ln(n)-\ln(n+2)\bigr)=0.\end{aligned}$$
Ainsi, on peut affirmer $f(x+1)-f(x)=\ln x$. Enfin, f est convexe en tant que somme de fonctions qui le sont.
Inversement, soit g une autre fonction vérifiant les conditions proposées.
Étudions la fonction $h=f-g$.
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$, 1-périodique et prend la valeur 0 en 1. Nous allons montrer qu'elle est constante en observant que sa dérivée est nulle.
Pour $x>0$, on a par croissance des dérivées de f et de g
$$h'(x)=f'(x)-g'(x)\leq f'\bigl(\lfloor x\rfloor+1\bigr)-g'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)=\frac{1}{\lfloor x\rfloor}+h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$$
et parallèlement
$$h'(x)\geq h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)-\frac{1}{\lfloor x\rfloor}.$$
La fonction h' est 1-périodique, les valeurs $h'\bigl(\lfloor x\rfloor\bigr)$ sont donc constantes égales à C.
En passant à la limite quand $x\to+\infty$ l'encadrement
$$C-\frac{1}{\lfloor x\rfloor}\leq h'(x)\leq C+\frac{1}{\lfloor x\rfloor}$$
on obtient que la fonction h' présente une limite en $+\infty$. Puisque h' est périodique cette fonction est constante et, puisque la fonction h est périodique, la fonction h' est constante égale à 0.

(c) On reconnaît en premier membre la fonction Γ « connue » indéfiniment dérivable avec
$$\Gamma^{(k)}(x)=\int_0^{+\infty}(\ln t)^k t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
On sait aussi $\Gamma>0$, $\Gamma(1)=1$ et $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$.
Considérons alors $f(x)=\ln\bigl(\Gamma(x)\bigr)$.
La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f(x+1)-f(x)=\ln x$, $f(1)=0$ et f convexe car l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne
$$\bigl(\Gamma'(x)\bigr)^2\leq\Gamma(x)\Gamma''(x)$$
ce qui conduit à $f''\geq 0$.
On peut donc affirmer
$$\Gamma(x)=\mathrm{e}^{f(x)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x}\prod_{k=1}^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^x}{1+\frac{x}{k}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n!(n+1)^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$$
et on peut conclure sachant $n+1$ équivalent à n.

Exercice 43 : [énoncé]

On a
$$\forall x\in\mathbb{R},\left|f_n(x)\right|\leq 1/n^2.$$
Puisque $\sum 1/n^2$ converge, il y a convergence normale, donc uniforme, donc simple sur $\mathbb{R}$.

Exercice 44 : [énoncé]

On a $\|f_n\|_\infty=1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

Exercice 45 : [énoncé]

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, introduisons $k = \lfloor x \rfloor$. Pour $N \geq k+1$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers S avec

$$S(x) = \frac{1}{k+1} \text{ pour } x \in [k\,;k+1[.$$

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a

$$S(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < N+1 \\ S(x) & \text{si } x \geq N+1 \end{cases}$$

et donc

$$\left|S(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x)\right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.
Enfin, $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1)$ n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x\in[a;+\infty[} \left|f_n(x)\right| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}.$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à 1.
Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a\,;+\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.
En revanche sur $[0\,;a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x\in[0;a]} \left|f_n(x)\right| = f_n(a).$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur $[0\,;a]$.
Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.
Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 47 : [énoncé]

(a) Pour $x = 1$, $u_n(x) = 0$ et la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.
Pour $x \in [0\,;1[$, on peut écrire $0 \leq u_n(x) \leq a_0 x^n(1-x) = \lambda x^n$. Or il y a convergence de la série numérique $\sum x^n$ et donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge.

(b) Après étude de fonction, on obtient

$$\|u_n\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} \left|u_n(x)\right| = \frac{a_n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \sim \frac{a_n}{\mathrm{e}n}.$$

Par équivalence de séries à termes positifs, la convergence normale de $\sum u_n$ équivaut à la convergence de $\sum a_n/n$.

(c) Considérons le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k (1-x).$$

Par la décroissance de la suite (a_n)

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x).$$

Ainsi, pour $x \in [0\,;1[$ ou $x = 1$, on obtient

$$0 \leq R_n(x) \leq a_{n+1}.$$

Par cette majoration uniforme, on peut affirmer que, si (a_n) tend vers 0, alors la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément.
Inversement, supposons la série $\sum u_n$ uniformément convergente.
La suite (a_n) étant décroissante et positive, elle admet nécessairement une limite $\ell \geq 0$. On a alors

$$\forall x \in [0\,;1[, R_n(x) \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ell x^k (1-x) = \ell x^{n+1} \geq 0.$$

On obtient donc

$$\forall x \in [0\,;1[, \ell x^{n+1} \leq \|R_n\|_\infty.$$

En faisant $x \to 1^-$,

$$\ell \leq \|R_n\|_\infty$$

et ceci valant pour tout $n \in \mathbb{N}$, on conclut $\ell = 0$

Exercice 48 : [énoncé]
Remarquons que pour tout $t \in [0\,;1]$,

$$t - t^2 \in [0\,;1/4].$$

Pour $x \in [0\,;1/4]$,

$$\left|u_{n+1}(x)\right| \leq x\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4}\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]}.$$

Par une récurrence facile, on obtient

$$\|u_n\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Par la remarque initiale, pour tout $x \in [0\,;1]$,

$$\left|u_{n+1}(x)\right| \leq \|u_n\|_{\infty,[0;1/4]} \leq \frac{1}{4^n}$$

donc

$$\|u_{n+1}\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{4^n}.$$

On peut conclure que la série $\sum u_n$ est normalement convergente.

Exercice 49 : [énoncé]
La fonction u_n est dérivable avec

$$u_n'(x) = \frac{1 - n^2x}{(1+n^2x)^3}.$$

Les variations de u_n sur $[0\,;+\infty[$ fournissent

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(1/n^2\right) = \frac{1}{4n^2}.$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $[0\,;+\infty[$, *a fortiori* uniformément et simplement.
Soit $a > 0$. Pour $x \geq a$,

$$\left|u_n'(x)\right| \leq \frac{1+n^2x}{(1+n^2x)^3} = \frac{1}{(1+n^2a)^2} \sim \frac{1}{a^2}\frac{1}{n^4}.$$

La série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$.
En revanche, il n'y a pas convergence en 0, ni convergence uniforme sur $]0\,;a]$ car le théorème de la double limite ne peut s'appliquer en 0.

Exercice 50 : [énoncé]

(a) Posons $u_n(x) = 1/n^x$ définie sur $]1\,;+\infty[$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]1\,;+\infty[$ ce qui assure la bonne définition de $\zeta(x)$.
Plus précisément, pour $a > 1$, on a

$$\sup_{x\in[a;+\infty[} \left|u_n(x)\right| = u_n(a) \text{ avec } \sum u_n(a) \text{ convergente}$$

et il y a donc convergence normale (et donc uniforme) de la série de fonctions u_n sur $[a\,;+\infty[$.

Puisque

$$u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \\ 0 & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$$

on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer que ζ tend en $+\infty$ vers la somme convergente des limites

$$\zeta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

(b) Posons $v_n(x) = \zeta(n)x^n/n$. Pour $x \neq 0$, on a

$$\left|\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|.$$

Par le critère de d'Alembert, la série converge pour $|x| < 1$ et diverge pour $|x| > 1$ (en fait le rayon de convergence de cette série entière vaut 1).
Pour $x = 1$, il y a divergence car

$$\frac{\zeta(n)}{n} \sim \frac{1}{n}.$$

Pour $x = -1$, il y a convergence en vertu du critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $\big((-1)^n\zeta(n)/n\big)$ est alternée et décroît en valeur absolue vers 0 notamment car $\zeta(n+1) \leq \zeta(n)$.

(c) En tant que somme d'une série entière de rayon de convergence 1, la fonction F est assurément de classe $\mathcal{C}^1$ (et même $\mathcal{C}^\infty$) sur $]-1\,;1[$.
Les fonctions v_n sont continues sur $[-1\,;0]$ et l'on vérifie que la série $\sum v_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées pour tout $x \in [-1\,;0]$. On peut alors majorer le reste de cette série par son premier terme

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k(x)\right| \leq \left|v_{n+1}(x)\right| \leq \frac{\zeta(n)}{n}.$$

Ce dernier majorant étant uniforme de limite nulle, on peut affirmer qu'il y a convergence uniforme de la série de fonctions $\sum v_n$ sur $[-1\,;0]$ et sa somme F est donc continue.

(d) Par dérivation de la somme d'une série entière, on obtient pour $x \in\,]-1\,;1[$,

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \zeta(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{x^n}{p^{n+1}}.$$

On peut permuter les deux sommes par le théorème de Fubini car il y a convergence des séries

$$\sum_{p\geq 1}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right| \text{ et } \sum_{n\geq 1}\sum_{p=1}^{+\infty}\left|\frac{x^n}{p^{n+1}}\right|.$$

On en déduit après sommation géométrique

$$F'(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{p^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{x}{p(p-x)} = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-x}-\frac{1}{p}\right).$$

La série de fonction associée converge normalement sur tout segment de $]-1\,;1[$ et on peut donc intégrer terme à terme

$$F(x) = F(0) + \int_0^x F'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-t}-\frac{1}{p}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \sum_{p=1}^{+\infty}\int_0^x \frac{1}{p-t}-\frac{1}{p}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{+\infty}\ln\left(\frac{p}{p-x}\right)-\frac{x}{p}.$$

Exercice 51 : [énoncé]
Chaque $f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f_n'(x) = (-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n^x}.$$

Par le critère spécial des séries alternées, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers η sur $]0\,;+\infty[$.
La suite $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{\ln t}{t^x}.$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{1-x\ln t}{t^{x+1}}.$$

Pour $\ln t \geq 1/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc φ décroissante sur $[\mathrm{e}^{1/x}\,;+\infty[$. Ainsi $(f_n'(x))_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $\lfloor \mathrm{e}^{1/x}\rfloor + 1$ et tend vers 0. On peut appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq \lfloor \mathrm{e}^{1/a}\rfloor + 1$ on a pour tout $x \in [a\,;+\infty[$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^x}\right| \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^x} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ donc converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.
On peut alors conclure que la fonction η est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 52 : [énoncé]
Par le critère spécial des séries alternées, ζ_2 est bien définie sur $]0\,;+\infty[$.
$f_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$ et

$$f_n^{(p)}(x) = (-1)^{n+p}\frac{(\ln n)^p}{n^x}.$$

La suite $(f_n^{(p)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée. Étudions

$$\varphi\colon t \mapsto \frac{(\ln t)^p}{t^x}.$$

On a

$$\varphi'(t) = \frac{\ln(t)^{p-1}(p - x\ln t)}{t^{x+1}}.$$

Pour $\ln t \geq p/x$, $\varphi'(t) \leq 0$ donc φ décroissante sur $[\mathrm{e}^{p/x}\,;+\infty[$. Ainsi $(f_n^{(p)}(x))_{n\geq 1}$ est décroissante à partir du rang $E(\mathrm{e}^{p/x})+1$ et tend vers 0. On peut donc appliquer le critère spécial des séries alternées. Pour $a > 0$ et pour $n \geq E(\mathrm{e}^{p/a})+1$ on a pour tout $x \in [a\,;+\infty[$,

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+p}(\ln n)^p}{n^x}\right| \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^x} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a}$$

donc

$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{(\ln(n+1))^p}{(n+1)^a} \to 0$$

$\sum f_n^{(p)}$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ (pour tout $a > 0$) donc converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et converge uniformément sur tout segment de $]0\,;+\infty[$.
Par théorème on peut alors conclure que ζ_2 est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 53 : [énoncé]
La convergence pour $x > 0$ de la série définissant $\zeta_2(x)$ est acquise par le critère spécial des séries alternées.
On peut combiner les termes d'indices impairs avec les termes d'indices pairs qui suivent

$$\zeta_2(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{(2p-1)^x} - \frac{1}{(2p)^x}\right).$$

Considérons alors la fonction $f\colon [1\,;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(t) = \frac{1}{(2t-1)^x} - \frac{1}{(2t)^x}.$$

La fonction f est décroissante et donc

$$\int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

puis en sommant ces encadrements

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \zeta_2(x) \leq f(1) + \int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-x)}\left[(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x}\right]_1^{+\infty}$$

avec

$$(2t-1)^{1-x} - (2t)^{1-x} = -(2t)^{1-x}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2t}\right)^{1-x}\right) \sim (x-1)(2t)^{-x} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

et donc

$$\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-x)}\left(2^{1-x} - 1\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}.$$

De plus

$$f(1) = 1 - \frac{1}{2^x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

et donc par encadrement

$$\zeta_2(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}.$$

Exercice 54 : [énoncé]

(a) ζ est définie sur $]1\,;+\infty[$ et ζ_2 est définie sur $]0\,;+\infty[$ (via le critère spécial des séries alternées)

(b) $f_n\colon x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est continue.
Pour tout $a > 1$,

$$\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq \frac{1}{n^a}$$

donc

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{1}{n^a}$$

or $\sum \frac{1}{n^a}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]1\,;+\infty[$. Par théorème, on obtient que la fonction ζ est continue.
$g_n\colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$ est continue.
Par le critère spécial des séries alternées

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{(N+1)^x}.$$

Pour tout $a > 0$,

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right| \leq \frac{1}{(N+1)^x} \leq \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc $\sum g_n$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$ puis converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0\,;+\infty[$. Par théorème on obtient que la fonction ζ_2 est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(c) Pour $x > 1$

$$\zeta_2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^x} = \zeta(x) - 2^{1-x}\zeta(x).$$

Exercice 55 : [énoncé]

(a) Supposons le domaine de définition I non vide. Considérons $x \in I$. Puisque la suite (u_n) tend vers l'infini, il existe un rang N au-delà duquel tous ses termes sont supérieurs à 1. Pour tout réel $y \geq x$ et tout $n \geq N$

$$u_n^y = \mathrm{e}^{y \ln u_n} \geq \mathrm{e}^{x \ln u_n} = u_n^x \text{ donc } \frac{1}{u_n^y} \leq \frac{1}{u_n^x}.$$

Par comparaison de séries à termes positifs, on peut affirmer la convergence de la série définissant $f(y)$. Ainsi

$$x \in I \implies [x\,;+\infty[\subset I.$$

Lorsqu'il n'est pas vide, le domaine est donc un intervalle non majoré.

(b) Les fonctions $f_n\colon x \mapsto 1/u_n^x$ sont continues sur I et on a la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n\geq N} f_n$ sur tout intervalle $[a\,;+\infty[$ inclus dans I car

$$\forall n \geq N, \forall x \in [a\,;+\infty[, \left|\frac{1}{u_n^x}\right| = \frac{1}{u_n^x} \leq \frac{1}{u_n^a} = \alpha_n$$

avec $\sum \alpha_n$ convergente.
Par théorème, on peut affirmer que la fonction f somme de $\sum f_n$ est continue.

(c) — Pour $u_n = \ln n$, $I = \emptyset$.
— Pour $u_n = n$, $I =]1\,;+\infty[$ (cf. séries de Riemann).
— Pour $u_n = n(\ln n)^2$, $I = [1\,;+\infty[$ (cf. séries de Bertrand).

Exercice 56 : [énoncé]

(a) Pour $x \in]0\,;1[$, on obtient par sommation géométrique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = -\frac{x^2 \ln x}{1+x^2}.$$

Cette relation vaut aussi pour $x = 0$ ou $x = 1$.

(b) On peut appliquer le critère spécial des séries alternées et donc

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k+2} x^{2k+2} \ln x\right| \leq x^{2(n+2)}|\ln x|.$$

L'étude de $\varphi\colon x \mapsto x^{2(n+2)}|\ln x|$ donne

$$\forall x \in [0\,;1], x^{2(n+2)}|\ln x| \leq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)}$$

donc

$$\|R_n\|_\infty \leq \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2(n+2)} \to 0.$$

(c) On a

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{x^2\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

et on peut calculer la dernière intégrale par intégration terme à terme car converge uniformément sur $[0\,;1]$. Cela donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+3)^2}$$

puis le résultat.

Exercice 57 : [énoncé]

$$\left\|\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\right\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{n^2}$$

est le terme générale d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment $[0\,;1]$:

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\,\mathrm{d}\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 \frac{2\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\alpha^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right).$$

Or

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2} = \pi\frac{\operatorname{ch}\pi\alpha}{\operatorname{sh}\pi\alpha} - \frac{1}{\alpha}$$

donc

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}\,\mathrm{d}\alpha = \left[\ln\frac{\operatorname{sh}\pi\alpha}{\alpha}\right]_0^1 = \ln\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}.$$

On en déduit que

$$\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}.$$

Exercice 58 : [énoncé]

Pour $x \leq 0$, il y a divergence grossière.
Pour $x > 0$, $n^2\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}+2\ln n} \to 0$ donc $\sum \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ est absolument convergente. Ainsi f est définie sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $a > 0$, sur $[a\,;+\infty[$, $\left|\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\right| \leq \mathrm{e}^{-a\sqrt{n}}$. Cela permet d'établir la convergence normale de la série de fonctions sur $[a\,;+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.
Par convergence uniforme sur $[1\,;+\infty[$, on peut appliquer le théorème de la double limite et affirmer

$$\lim_{+\infty} f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} = 1.$$

Pour $x > 0$ fixé, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$ est décroissante donc

$$\int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^{n} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

En sommant (avec $n = 0$ à part pour la majoration) on obtient

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \leq f(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$$

avec

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x^2}.$$

On en déduit

$$f(x) \sim \frac{2}{x^2}$$

quand $x \to 0^+$.

Exercice 59 : [énoncé]

Par le critère spécial des séries alternées, il est immédiate de justifier que $S(t)$ est définie pour tout $t > 0$.
On peut réorganiser l'expression de $S(t)$ de la façon suivante :

$$S(t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^{2p}}{2pt+1} + \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p+1)t+1}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t}{(2pt+1)((2p+1)t+1)}.$$

La fonction $f_t\colon x \mapsto \frac{t}{(2xt+1)\big((2x+1)t+1\big)}$ est décroissante.
Par comparaison avec une intégrale, on obtient l'encadrement

$$\int_1^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x \leq S(t) \leq \int_0^{+\infty} f_t(x)\,\mathrm{d}x.$$

Puisque par les calculs précédents

$$\frac{t}{(2xt+1)\big((2x+1)t+1\big)} = \frac{1}{2xt+1} - \frac{1}{(2x+1)t+1}.$$

On obtient

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_0^{+\infty}=\frac{\ln(1+t)}{2t}$$

et

$$\int_1^{+\infty}\frac{t}{(2xt+1)((2x+1)t+1)}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2t}\ln\frac{(2xt+1)}{((2x+1)t+1)}\right]_1^{+\infty}=\frac{\ln(1+3t)-\ln(1+2t)}{2t}$$

Quand $t\to0^+$, on obtient par encadrement $S(t)\to1/2$.

Exercice 60 : [énoncé]

(a) Pour tout $x\in\mathbb{R}$, la série numérique $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. De plus

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{+\infty}u_n\right\|_\infty\leq\ln\left(1+\frac{x^2}{(N+1)(1+x^2)}\right)\leq\ln\left(1+\frac{1}{N+1}\right)\to0$$

donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

(b) $u_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ln(1+1/n)$. Par converge uniformément

$$\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(1+1/n).$$

Pour calculer cette somme, manipulons les sommes partielles et séparons les termes d'indice pair de ceux d'indice impair

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{N}\ln(2n+1)-\ln(2n)+\sum_{n=1}^{N}\ln(2n-1)-\ln(2n)$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln\left(\left(\frac{(2N)!}{(2^NN!)^2}\right)^2(2N+1)\right).$$

Or

$$N!\sim\sqrt{2\pi N}N^N\mathrm{e}^{-N}$$

donc

$$\sum_{n=1}^{2N}(-1)^n\ln(1+1/n)\sim\ln(2/\pi).$$

On en déduit

$$\ell=\ln(2/\pi).$$

Exercice 61 : [énoncé]

Posons

$$f_k(n)=\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha}\text{ pour }k\leq n\text{ et }f_k(n)=0\text{ sinon.}$$

Pour $k\in\mathbb{N}$ fixé,

$$f_k(n)\to\exp(-k\alpha).$$

Pour $k\leq n$

$$\left|f_k(n)\right|=\exp(n\alpha\ln(1-k/n))\leq\mathrm{e}^{-k\alpha}$$

et cette majoration vaut aussi pour $k>n$.
Ainsi

$$\|f_k\|_{\infty,\mathbb{N}}\leq\mathrm{e}^{-k\alpha}$$

et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $A=\mathbb{N}$.
Par interversion limite/somme infinie

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}f_k(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_k(n)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-k\alpha}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n\alpha}=\frac{\mathrm{e}^\alpha}{\mathrm{e}^\alpha-1}.$$

Exercice 62 : [énoncé]

Par la formule du binôme

$$\left(1+\frac{z}{p}\right)^p=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\frac{z^k}{p^k}.$$

Considérons $f_k\colon[0\,;+\infty[\,\to\mathbb{C}$ définies par

$$f_k(x)=\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}\frac{z^k}{x^k}\text{ si }x\geq k\text{ et }f_k(x)=0\text{ sinon.}$$

En tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(p) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{z^k}{p^k} = \left(1 + \frac{z}{p}\right)^p.$$

La série de fonctions $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k$ converge simplement vers $x \to \left(1 + \frac{z}{x}\right)^x$ en tout $p \in \mathbb{N}$. De plus, puisque $\left|f_k(x)\right| \leq \frac{|z|^k}{k!}$, la convergence est normale sur $\mathbb{R}_+$. Pour k fixé, quand $x \to +\infty$,

$$f_k(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{x^k} \frac{z^k}{k!} \to \frac{z^k}{k!}.$$

Par le théorème de la double limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^z.$$

Exercice 63 : [énoncé]
Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n + n^2 x} \text{ avec } x > 0.$$

(a) Soit $x \in \left]0\,;+\infty\right[$. On a $f_n(x) \sim 1/n^2 x$ donc $\sum f_n(x)$ converge absolument. On en déduit que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et donc la fonction $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bien définie.

(b) Les f_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $a > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{1}{n + n^2 a} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\left[a\,;+\infty\right[$ donc converge uniformément sur tout segment de $\left]0\,;+\infty\right[$.
On peut donc conclure que S est continue.

(c) Chaque f_n est décroissante donc la fonction S l'est aussi.

(d) Par convergence normale sur $\left[1\,;+\infty\right[$,

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0.$$

On remarque

$$x f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}.$$

Posons $g_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+nx)}$. La fonction g_n croît de 0 à $1/n^2$ sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\|g_n\|_{\infty,[0;+\infty[} = \frac{1}{n^2}.$$

La série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Par suite $xS(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$ puis

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6x}.$$

(e) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t(1+tx)}$ est décroissante donc par comparaison avec une intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \leq \frac{1}{1+x} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)}.$$

Or

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+tx)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \frac{x}{1+tx}\right) \mathrm{d}t = \left[\ln \frac{t}{1+tx}\right]_1^{+\infty} = \ln(1+x) - \ln(x)$$

donc

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln(x).$$

Exercice 64 : [énoncé]

(a) $f_n : x \mapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)}$ est définie et continue sur $\left]-1\,;+\infty\right[$
Soient $-1 < a \leq 0 \leq 1 \leq b$.

$$\|f_n\|_{\infty,[a;b]} \leq \frac{b}{n(n+a)}.$$

La série de fonction $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;b]$ et donc converge uniformément sur tout segment inclus dans $\left]-1\,;+\infty\right[$.

(b) Chaque f_n est croissante donc par sommation de monotonie, S est croissante.

(c)
$$S(x+1)-S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+x}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}$$
donc
$$S(x+1)-S(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}-1+\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x+1}.$$

(d) Quand $x\to-1$, $S(x+1)\to S(0)=0$ puis
$$S(x)=-\frac{1}{x+1}+S(x+1)\sim-\frac{1}{x+1}.$$

(e) $S(0)=0$ et $S(x+1)-S(x)=\frac{1}{x+1}$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

(f) On sait $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$ et on sait $\ln(n+1)\sim\ln n$.
Puisque $S(E(x))\le S(x)\le S(E(x)+1)$ on obtient
$$S(x)\sim\ln E(x)\sim\ln x.$$

Exercice 65 : [énoncé]

(a) Posons $f_n(x)=\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$
Pour $x\le 0$, la série $\sum\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ diverge grossièrement.
Pour $x>0$, $n^2f_n(x)\to 0$ donc $\sum\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$ converge absolument.
La fonction f est donc définie sur $]0\,;+\infty[$.
Pour $a>0$,
$$\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[}=f_n(a)$$
et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$. Comme somme de série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment, on peut affirmer que f est continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) f est somme de fonction strictement décroissante, elle donc elle-même strictement décroissante.

(c) Par convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi
$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=0.$$

(d) Par monotonie de $t\mapsto\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}$,
$$\int_n^{n+1}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\le\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}\le\int_{n-1}^{n}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
En sommant
$$\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\le f(x)\le\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$
Or
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{x^2}\text{ et }\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t\sim\frac{2}{x^2}$$
donc
$$f(x)\underset{x\to0^+}{\sim}\frac{2}{x^2}.$$

Exercice 66 : [énoncé]

(a) Notons : $f_n\colon x\mapsto\frac{x^n}{1+x^{2n}}$.
Pour $x=0$, $f_n(x)=0$ donc $S(x)$ est bien définie.
Pour $x\in\,]0\,;1[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\sim x<1$ et $S(x)$ est bien définie.
Pour $x=1$: $f_n(x)=1/2$ et $S(x)$ n'est pas définie.
Pour $x\in\,]1\,;+\infty[$: $\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\to\frac{1}{x}<1$ donc $S(x)$ est bien définie.
Finalement S est définie sur $[0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par convergence simplement de $\sum f_n$ sur ce domaine.

(b)
$$\forall x\in\,]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[,S(1/x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1/x^n}{1+1/x^{2n}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}=S(x).$$

(c) Soit $0<a<1$. Sur $[0\,;a]$,
$$\|f_n\|_{\infty,[0;a]}\le a^n\text{ et }\sum_{n=1}^{+\infty}a^n<1$$
donc $\sum_{n\ge1}f_n$ converge normalement sur $[0\,;a]$ et donc converge uniformément sur tout segment de $[0\,;1[$. Par théorème S est continue sur $[0\,;1[$.
Par composition de fonctions continues $S\colon x\mapsto S(1/x)$ est aussi continue sur $]1\,;+\infty[$.

(d)

$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}(1+x^{2n}) - 2nx^{3n-1}}{(1+x^{2n})^2} = \frac{nx^{n-1}(1-x^{2n})}{(1+x^{2n})^2}.$$

Chaque f_n est croissante sur $[0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
Par sommation de monotonie, la fonction S est croissante sur $[0\,;1[$ et décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
$S(0) = 0$.
Quand $x \to 1^-$,

$$S(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2} = \frac{2x}{1-x} \to +\infty$$

donc $\lim_{x\to 1^-} S(x) = +\infty$.
Puisque $S(1/x) = S(x)$, on obtient par composition de limites, $\lim_{x\to 1^+} S(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} S(x) = 0$.

Exercice 67 : [énoncé]
Pour $|x| \geq 1$, la série est grossièrement divergente.
Pour $|x| < 1$,

$$\frac{x^n}{1+x^n} \sim x^n$$

et donc la série est absolument convergente.
La fonction S est définie sur $]-1\,;1[$.
Posons $u_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}$.
u_n est de classe $\mathcal{C}^1$, $\sum u_n$ converge simplement,

$$u_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

donc pour $a \in [0\,;1[$,

$$\|u_n'\|_{\infty,[-a;a]} \leq n\frac{a^{n-1}}{1-a^n} \sim na^{n-1}$$

ce qui assure la convergence normale de $\sum u_n'$ sur tout segment de $]-1\,;1[$.
Par suite la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$.

$$S(0) = \frac{1}{2} \text{ donc } S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}.$$

Pour $x \in [0\,;1[$,

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{n(p+1)}.$$

Puisque $\sum_{p\geq 0}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ converge et $\sum_{n\geq 1}\sum_{p=0}^{+\infty}\left|(-1)^p x^{n(p+1)}\right|$ aussi, on peut permuter les deux sommes et affirmer

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{p+1}}{1-x^{p+1}}.$$

On a alors

$$(1-x)S(x) = \frac{1-x}{2} + \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p u_p(x)$$

avec $u_p(x) = x^{p+1}\frac{1-x}{1-x^{p+1}}$ pour $x \in [0\,;1[$.
La fonction u_p est continue sur $[0\,;1[$ et prolonge par continuité en 1 en posant $u_p(1) = 1/(p+1)$.
Le critère spécial des séries alternées s'applique à la série $\sum(-1)^p u_p(x)$ et donc

$$\left\|\sum_{k=p+1}^{\infty} (-1)^k u_k(x)\right\|_\infty \leq u_{p+1}(x)$$

et une étude de variation permet d'affirmer $u_{p+1}(x) \leq \frac{1}{p+2}$. Ainsi, la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ et donc sa somme est continue en 1. Cela permet d'affirmer

$$(1-x)S(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p+1} = \ln 2$$

et finalement

$$S(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}.$$

Exercice 68 : [énoncé]
Posons

$$f_n \colon x \mapsto \frac{x}{n(1+n^2x^2)}.$$

Sachant

$$2|nx| \leq 1 + n^2x^2$$

on a

$$\left|f_n(x)\right| \leq \frac{1}{2n^2}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n étant continue, la somme S est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1-n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2}.$$

Soit $a>0$. Pour $|x|\geq a$,

$$\left|f_n'(x)\right| \leq \frac{1+n^2x^2}{n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)} \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}^*$.
La somme S est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Montrons que la fonction S n'est pas dérivable en 0.

$$\frac{1}{x}\big(S(x)-S(0)\big) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}.$$

Par comparaison avec une intégrale

$$\frac{1}{x}\big(S(x)-S(0)\big) \geq \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2x^2)}.$$

Par le changement de variable $u=tx$

$$\frac{1}{x}\big(S(x)-S(0)\big) \geq \int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{u(1+u^2)} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

car la fonction positive $u\mapsto 1/u(1+u^2)$ n'est pas intégrable sur $]0\,;1]$.

Exercice 69 : [énoncé]
Posons

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2}\arctan(nx).$$

Chaque f_n est continue et $\|f_n\|_\infty = \frac{\pi}{2n^2}$ est terme général d'une série convergente.
Par convergence normale, on peut affirmer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Chaque f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n(1+(nx)^2)}.$$

Pour $a>0$, sur $[a\,;+\infty[$ ou $]-\infty\,;-a]$,

$$\|f_n'\|_\infty \leq \frac{1}{n(1+(na)^2)}$$

ce qui donne la convergence normale de la série des dérivées.
Ainsi, par convergence uniforme sur tout segment, on obtient f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 70 : [énoncé]

(a) En vertu du théorème des accroissements finis

$$\left|u_n(x)\right| \leq \left(\sqrt{n+x}-\sqrt{n}\right) \sup_{[\sqrt{n};\sqrt{n+x}]}\left|(\arctan)'\right| = \frac{\sqrt{n+x}-\sqrt{n}}{1+n}$$

donc

$$\left|u_n(x)\right| \leq \frac{x}{(1+n)(\sqrt{n}+\sqrt{n+x})} \leq \frac{x}{2\sqrt{n}(n+1)} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement et donc la fonction S est bien définie.
Les fonctions u_n sont continue et pour tout $a\in\mathbb{R}_+$,

$$\forall x\in[0\,;a], \left|u_n(x)\right| \leq \frac{a}{2\sqrt{n}(n+1)}.$$

On peut donc affirmer la convergence uniforme sur tout segment de la série $\sum u_n$ ce qui assure la continuité de S.

(b) Montrons que S tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Remarquons que par le théorème des accroissements finis

$$u_n(n) = \arctan\sqrt{2n} - \arctan\sqrt{n} \geq \frac{\sqrt{2n}-\sqrt{n}}{1+2n} \sim \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{n}}$$

et il y a donc divergence vers $+\infty$ de la série $\sum u_n(n)$.
Soit $A\in\mathbb{R}_+$. Il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(n) \geq A.$$

Pour $x\geq N$,

$$S(x) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(N) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(n) \geq A.$$

On peut donc affirmer

$$S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Exercice 71 : [énoncé]

(a) Posons
$$u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}.$$
Les fonctions u_n sont définies et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ car $u_n(x) \sim 1/n^2$.
On a
$$u_n'(x) = \frac{-2x}{(n^2+x^2)^2}$$
donc sur $[-a\,;a]$,
$$\|u_n'\|_\infty \leq \frac{2a}{n^4}$$
et la série de fonctions $\sum u_n'$ converge normalement et donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$.
On peut conclure que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) La fonction $t \mapsto 1/(t^2+x^2)$ est décroissante donc
$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2}.$$
Or
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} = \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x}\arctan\frac{1}{x}$$
donc
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}.$$

(c) On peut écrire
$$\frac{1}{n^2+x^2} = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{1+x^2/n^2}\right) = \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) + \frac{1}{n^4}\frac{x^4}{n^2+x^2}$$
et par convergence des sommes introduites
$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^2}{n^4} + x^4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4(n^2+x^2)}.$$
Or
$$\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4(n^2+x^2)}\right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6} < +\infty$$
donc
$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^4}{90}x^2 + \mathrm{O}(x^4).$$

Exercice 72 : [énoncé]

Posons
$$f_n \colon x \mapsto \frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right).$$
Puisque les fonctions f_n sont toutes impaires, on limite l'étude à $x \in [0\,;+\infty[$.
À partir d'un certain rang N_x, on a $x/n \leq \pi/2$ et alors
$$\sin(x/n) \in [0\,;1].$$
La série numérique $\sum f_n(x)$ vérifie alors les hypothèses du critère spécial des séries alternées à partir du rang N_x et par conséquent cette série converge.
Ainsi la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et donc sa fonction somme, que nous noterons S, est définie sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{n^2}\cos\left(\frac{x}{n}\right)$$
de sorte que
$$\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}} = \frac{1}{n^2}.$$
On en déduit que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ et donc la fonction S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, *a fortiori* cette fonction est continue.

Exercice 73 : [énoncé]

(a) Posons $f_n(t) = \frac{(-1)^n}{1+nt}$ pour $t > 0$.
Par application du critère spécial des séries alternées, $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$ et
$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{1}{1+na} \to 0$$
pour tout $a > 0$.
Par converge uniformément sur tout segment d'une série de fonctions continue, S est définie et continue sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Par converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$,
$$\lim_{+\infty} S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{t\to+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nt} = 1.$$
Par application du critère spécial des séries alternées
$$1 - \frac{1}{1+t} \leq S(t) \leq 1.$$

(c) Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement.
$$f_n'(t) = \frac{(-1)^{n+1}n}{(1+nt)^2}.$$
La série $\sum f_n'(t)$ est alternée avec $\left|f_n'(t)\right| = \frac{n}{(1+nt)^2}$.
Puisque
$$\left|f_n'(t)\right| - \left|f_{n+1}'(t)\right| = \frac{n(n+1)t^2-1}{(1+nt)^2(1+(n+1)t)^2}$$
la suite $\left(\left|f_n'(t)\right|\right)$ décroît vers 0 à partir d'un certain rang.
Soit $a > 0$.
À partir d'un certain rang n_0,
$$n(n+1)a^2 - 1 \geq 0$$
et alors pour tout $t \geq a$, on peut appliquer le critère spécial des séries alternées à partir du rang n_0.
On a alors
$$\left|R_n(t)\right| \leq \frac{n}{(1+nt)^2} \leq \frac{n}{(1+na)^2}$$
donc
$$\|R_n\|_{\infty,[a;+\infty[} \leq \frac{n}{(1+na)^2} \to 0.$$
Ainsi la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur $[a\,;+\infty[$.
Par théorème, on peut alors conclure que S est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 74 : [énoncé]
On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$u_n(x) = (-1)^{n-1}\frac{x}{n+x^2}.$$

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum u_n(x)$ satisfait le critère spécial des séries alternées et donc $\sum u_n$ converge simplement. La fonction S est donc bien définie, elle est évidemment impaire.

(b) Soit $a > 0$. Par le critère spécial des séries alternées
$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{x}{(n+1)+x^2} \leq \frac{a}{n+1} \text{ pour } x \in [-a\,;a]$$
et donc
$$\|R_n\|_{\infty,[-a;a]} \leq \frac{a}{n} \to 0.$$
Il y a convergence uniforme sur $[-a\,;a]$ pour tout $a > 0$ et donc convergence uniforme[1] sur tout segment de $\mathbb{R}$.
De plus chaque fonction u_n est continue donc S est continue.

(c) Par le critère spécial des séries alternées, on peut encadrer S par deux sommes partielles consécutives
$$\frac{x}{1+x^2} - \frac{x}{2+x^2} \leq S(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$$
et on peut donc affirmer $S(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 75 : [énoncé]

(a) Pour $x \in \left]-1\,;1\right[$,
$$\left|u_n(x)\right| = \mathrm{o}\left(|x|^n\right)$$
donc $\sum u_n(x)$ est absolument convergente donc convergente.
Pour $x = 1$,
$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n}$$
donc $\sum u_n(x)$ converge en vertu du critère spécial des séries alternées.
Pour $x \in \left]-\infty\,;-1\right[\cup \left]1\,;+\infty\right[$,
$$u_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(1 - \frac{1}{1+x^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{|x|^n}\right)$$
donc $\sum u_n(x)$ est somme d'une série convergente et d'une série absolument convergente.

(b)
$$f(x) + f(1/x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{x^n}{1+x^n} + \frac{1/x^n}{1+1/x^n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(c) Soit $a \in [0\,;1[$.
$$\|f\|_{\infty,[-a;a]} \leq \frac{a^n}{1-a^n} \leq \frac{a^n}{1-a}$$
donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[-a\,;a]$.
Par convergence uniforme d'une série de fonctions continues sur tout segment de $\left]-1\,;1\right[$, on peut affirmer que f est continue sur $\left]-1\,;1\right[$. Puisque $f(x) = C^{te} - f(1/x)$, f est aussi continue sur $\left]-\infty\,;-1\right[$ et sur $\left]1\,;+\infty\right[$ par composition de fonctions continues.

1. Une étude des variations de la fonction $x \mapsto x/((n+1)+x^2)$ permet aussi d'établir qu'il y a convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

(d) Pour $x \in [0\,;1]$, la série $\sum u_n(x)$ est alternée et la suite $\left(\frac{1}{n}\frac{x^n}{1+x^n}\right)_{n\geq 0}$ décroît vers 0 (après étude non détaillée ici) donc le critère spécial des séries alternées s'applique et

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{1}{n+1}\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}} \leq \frac{1}{n+1}$$

puis

$$\|R_n\|_{\infty,[0;1]} \leq \frac{1}{n+1} \to 0.$$

La série de fonctions continues $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0\,;1]$ donc f est continue sur $[0\,;1]$ et donc continue à gauche en 1. Par la relation du b) on obtient aussi f continue à droite en 1.

Exercice 76 : [énoncé]

(a)

$$\ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - \ln(x+n+1) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série $\sum \ln f_{n+1}(x) - \ln f_n(x)$ converge donc la suite $(\ln f_n(x))$ converge puis $(f_n(x))$ converge vers un réel strictement positif.

(b)

$$\ln\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(x\ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k)\right)$$

avec $x\ln n + \sum_{k=1}^n \ln k - \sum_{k=0}^n \ln(x+k) = x\ln n - \ln x - \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$.

Or la série $\sum\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right)$ est absolument convergente car de terme général en $\mathrm{O}(1/n^2)$ et

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right) = x\ln n + \gamma x + \mathrm{o}(1) - \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$$

donc

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

(c) Posons $f_n(x) = \frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ pour $x > 0$ et $n \geq 1$. f_n est $\mathcal{C}^1$, $\sum f_n$ converge simplement et $f_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)}$ ce qui permet d'affirmer $\sum f_n'$ converge normalement sur tout segment$[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 77 : [énoncé]

(a) Si $x \leq 0$, la série numérique $\sum f_n(x)$ diverge grossièrement.
Si $x > 0$ alors $n^2 f_n(x) = \mathrm{e}^{2\ln n - xn^\alpha} \to 0$ donc $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.
Ainsi $\sum f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$. f est définie sur $]0\,;+\infty[$.

(b) Les fonctions f_n sont continues.
Pour $a > 0$, $\|f_n\|_{\infty,[a;+\infty[} = f_n(a)$ et $\sum f_n(a)$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a\,;+\infty[$. Par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que f est continue.

(c) Par convergence uniforme sur $[a\,;+\infty[$, on peut intervertir limite en $+\infty$ et somme infinie. Ainsi $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

Exercice 78 : [énoncé]

(a) Pour $x < 0$, $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $\sum u_n(x)$ diverge grossièrement.
Pour $x = 0$, $u_n(x) = 0$ donc $\sum u_n(0)$ converge
Pour $x > 0$, $u_n(x) = \mathrm{o}(1/n^2)$ par croissance comparée et donc $\sum u_n(x)$ converge absolument.
On conclut $I = \mathbb{R}_+$

(b) Pour $[a\,;b] \subset \mathbb{R}_+^*$,

$$\|u_n\|_{\infty,[a;b]} = \sup_{x\in[a;b]} \left|u_n(x)\right| \leq \frac{n^\alpha b \mathrm{e}^{-na}}{n^2+1}$$

donc $\sum u_n$ est une série de fonctions continues convergeant normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$. Sa somme est alors continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(c) Après étude des variations de la fonction,

$$\|u_n\|_{\infty,\mathbb{R}_+} = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|u_n(x)\right| = u_n(1/n) \sim \frac{1}{n^{3-\alpha}}.$$

Il y a convergence normale si, et seulement si, $\alpha < 2$.

(d) On peut écrire

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) = \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^\alpha \mathrm{e}^{-k/n}}{k^2+1} \geq \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2+1}\mathrm{e}^{-k/n} \geq \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n}.$$

Or par sommation géométrique

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{\infty}\mathrm{e}^{-k/n} = \frac{1}{2n}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)/n}}{1-\mathrm{e}^{-1/n}} \to \frac{1}{2\mathrm{e}}$$

donc $\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n)$ ne peut tendre vers 0 quand $n \to +\infty$.
S'il y avait convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$ alors

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq \sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| \to 0$$

ce qui vient d'être exclu.

(e) Si S est continue en 0 alors par sommation de terme positif

$$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(1/n) \leq S(1/n) \to S(0) = 0$$

ce qui est encore à exclure.

Exercice 79 : [énoncé]
Puisque $a_n > 0$ et $\sum a_n(1+|x_n|)$ converge, les séries $\sum a_n$ et $\sum a_n x_n$ sont absolument convergentes.
Posons $f_n(x) = a_n|x-x_n|$.
Comme $\big|a_n|x-x_n|\big| \leq |a_n||x| + |a_n x_n|$, la série des fonctions f_n converge simplement sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions f_n sont continues et sur $[-M\,;M]$, $\|f_n\|_\infty \leq Ma_n + a_n|x_n|$.
Par convergence normale sur tout segment d'une série de fonctions continues, on peut affirmer que la somme f est continue.
Soit $[\alpha\,;\beta] \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \notin [\alpha\,;\beta]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha\,;\beta]$ et $f_n'(x) = \varepsilon a_n$ avec $|\varepsilon| = 1$.
Par convergence normale de la série des dérivées sur $[\alpha\,;\beta]$, on peut affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle ouvert $]a\,;b[$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \notin\,]a\,;b[$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $x_n = a$.
En considérant $A = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n = a\}$, on peut écrire par absolue convergence

$$f(x) = \sum_{n\in A} a_n|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A} a_n|x-x_n| = \alpha|x-a| + g(x)$$

avec $\alpha > 0$.
Puisque la série $\sum a_n$ converge, pour N assez grand, $\sum_{k=N+1}^{+\infty} a_n \leq \frac{\alpha}{2}$.
On peut alors écrire

$$f(x) = \alpha|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geq N+1} a_n|x-x_n| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leq N} a_n|x-x_n|.$$

La fonction $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\leq N} a_n|x-x_n|$ est dérivable au voisinage de a.
Cependant, la fonction

$$\varphi\colon x \mapsto \alpha|x-a| + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus A, n\geq N+1} a_n|x-x_n|$$

n'est quand à elle pas dérivable en a.
En effet, pour $h > 0$,

$$\frac{1}{h}\big(\varphi(a+h)-\varphi(a)\big) \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} \geq \frac{\alpha}{2}$$

alors que pour $h < 0$,

$$\frac{1}{h}\big(\varphi(a+h)-\varphi(a)\big) \leq -\alpha + \frac{\alpha}{2} = -\frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, les éventuels nombres dérivés à droite et à gauche ne peuvent pas coïncider.

Exercice 80 : [énoncé]

(a)
```
def S(N,x):
    if N == 0:
        return 1/x
    return S(N-1,x) + 1/(x-N) + 1/(x+N)
```

(b)
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def trace(N,a,b):
    X = linspace(a,b,100)
    Y = [S(N,x) for x in X]
    plt.plot(X,Y)
```

(c) Posons $u_n\colon \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par

$$u_n(x) = \frac{2x}{x^2-n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{2x}{n^2}.$$

Par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. On peut alors affirmer la convergence simple de la suite de fonctions (S_N) vers une certaine fonction S sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(d) Soit $[a\,;b]$ inclus dans $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Pour N_0 assez grand, on a
$$[a\,;b]\subset[-N_0\,;N_0].$$
Soit $x\in[a\,;b]$. Pour tout $N>N_0$ et tout $P\in\mathbb{N}$,
$$S_{N+P}(x)-S_N(x)=\sum_{n=N+1}^{N+P}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$
Le facteur x^2-n^2 est négatif pour chaque terme sommé et par conséquent
$$\left|S_{N+P}(x)-S_N(x)\right|\le\sum_{n=N+1}^{N+P}\frac{2|x|}{n^2-x^2}\le\sum_{n=N+1}^{N+P}\frac{2N_0}{n^2-N_0^2}.$$
En passant à la limite quand P tend vers $+\infty$, on obtient la majoration uniforme
$$\left|S(x)-S_N(x)\right|\le\alpha_N\quad\text{avec}\quad\alpha_N=\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{2N_0}{n^2-N_0^2}.$$
Puisque α_N est le reste de rang N d'une série convergente, α_N est de limite nulle et on peut conclure que la suite de fonctions (S_N) converge uniformément vers S sur $[a\,;b]$.

(e) Les fonctions S_N sont continues et par convergence uniforme sur tout segment, on peut affirmer que la fonction S est continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
Les fonctions S_N sont impaires et par convergence simple, on peut affirmer que S est une fonction impaire.
Enfin, on obtient que la fonction S est 1-périodique en passant à la limite l'égalité
$$S_N(x+1)=\sum_{n=-N+1}^{N+1}\frac{1}{x+n}=S_N(x)+\frac{1}{x+N+1}-\frac{1}{x-N}$$
valable pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.

(f) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on remarque
$$\begin{aligned}S_N\left(\frac{x}{2}\right)+S_N\left(\frac{x+1}{2}\right)&=\sum_{n=-N}^{N}\frac{2}{x-2n}+\sum_{n=-N}^{N}\frac{2}{x-(2n-1)}\\&=\sum_{n=-2N-1}^{2N}\frac{2}{x-n}=2S_{2N}(x)+\frac{2}{x+2N+1}.\end{aligned}$$
On obtient la relation voulue en passant à la limite quand N tend vers $+\infty$.

(g) Pour $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a
$$\cot\left(\pi\frac{x}{2}\right)+\cot\left(\pi\frac{x+1}{2}\right)=\frac{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}-\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$
Après réduction au même dénominateur
$$\cot\left(\pi\frac{x}{2}\right)+\cot\left(\pi\frac{x+1}{2}\right)=\frac{2\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}=2\cot(\pi x).$$
L'ensemble des fonctions vérifiant la relation proposée étant un sous-espace vectoriel, la fonction f vérifie aussi cette relation.

(h) Pour $x\in\left]-1\,;1\right[\setminus\{0\}$, on peut écrire
$$S(x)=\frac{1}{x}+T(x)\quad\text{avec}\quad T(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2x}{x^2-n^2}.$$
Par les arguments précédents, on peut affirmer que la fonction T est continue sur $\left]-1\,;1\right[$. Aussi, on a par développement limité
$$\pi\cot(\pi x)\underset{x\to 1}{=}\frac{1}{x}+\mathrm{o}(1)$$
donc
$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(1)-T(x)$$
ce qui permet de prolonger f par continuité en 0 avec la valeur $-T(0)=0$.
Par périodicité, on peut prolonger f par continuité avec la valeur 0 en tout $k\in\mathbb{Z}$.
La fonction f est continue sur le compact $[0\,;1]$ et y présente un maximum de valeur M. Celui-ci est atteint en un certain $x_0\in[0\,;1]$. Or
$$\underbrace{f\left(\frac{x_0}{2}\right)}_{\le M}+\underbrace{f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)}_{\le M}=2f(x_0)=2M$$
et donc
$$f\left(\frac{x_0}{2}\right)=f\left(\frac{x_0+1}{2}\right)=M.$$
Ainsi, le maximum de f est aussi atteint en $x_0/2$, puis en $x_0/4$, etc.
Finalement, le maximum de f est atteint en 0 et il est donc de valeur nulle.
De même, on montre que le minimum de f est nul et on peut conclure
$$\forall x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z},\ S(x)=\pi\cot(\pi x).$$

Exercice 81 : [énoncé]

(a) Puisque $\|a\| < 1$ et $\|a^n\| \leq \|a\|^n$, la série $\sum a^n$ est absolument convergente et sa somme S vérifie $(1_E - a)S = S(1_E - a) = 1_E$ donc $1_E - a$ est inversible d'inverse S.

(b) Pour $\alpha \in [0\,;1[$, on montre par convergence normale la continuité de $a \mapsto (1-a)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ sur $\overline{B}(0,\alpha)$. On en déduit que $x \mapsto x^{-1}$ est continue en 1_E.

(c) Soit $a \in U(E)$. Quand $x \in U(E) \to a$ alors $xa^{-1} \to 1_E$ donc $(xa^{-1})^{-1} \to 1_E^{-1} = 1_E$ puis $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1} \to a^{-1}$. Ainsi $x \mapsto x^{-1}$ est continue en chaque $a \in U(E)$.

Exercice 82 : [énoncé]

(a) $\left\|\frac{1}{k}t^kA^k\right\| = \frac{1}{k}|t|^k\|A\|^k$ avec $|t|\|A\| < 1$ donc la série converge simplement.

(b) Soit $\rho \in [0\,;1/\|A\|[$. $t \mapsto \frac{1}{k}t^kA^k$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $t^{k-1}A^k$ avec

$$\left\|t^{k-1}A^k\right\|_{\infty,[-\rho;\rho]} \leq \rho^{k-1}\|A\|^k$$

terme général d'une série convergente. La série des fonctions dérivées converge donc normalement sur $[-\rho\,;\rho]$ ce qui assure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1/\|A\|\,;1/\|A\|[$ et

$$f'(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^{k+1} = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^k\right)A.$$

Or

$$(I - tA)\sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^k = \sum_{k=0}^{+\infty} t^kA^k - \sum_{k=1}^{+\infty} t^kA^k = I$$

donc $(I - tA)f'(t) = A$.

Exercice 83 : [énoncé]

(a) Soit $s = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^a}.$$

Par conséquent, si $a > 1$, la série $\sum 1/n^s$ converge absolument et donc converge.

(b) Soit s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$. En développant

$$\zeta(s)\left(1 - 2^{1-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s} - \sum_{P=1}^{+\infty}\frac{2}{(2p)^s}.$$

Par absolue convergence, on peut séparer la première somme en deux paquets, celui des termes d'indices pairs et celui des termes d'indices impairs. Il vient alors

$$\zeta(s)\left(1 - 2^{1-s}\right) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s}. \tag{1}$$

En regroupant ces sommes, on obtient

$$\zeta(s)\left(1 - 2^{1-s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

avec sommabilité de la somme en second membre.

(c) En reprenant, l'expression (**??**), étudions

$$F(s) = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p-1)^s} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(2p)^s} = \sum_{p=1}^{+\infty}u_p(s)$$

avec

$$u_p(s) = \frac{(2p)^s - (2p-1)^s}{(2p)^s(2p-1)^s}$$

définie pour $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > 0$.
Pour $s = a + ib$ fixé, la fonction $f\colon t \mapsto t^s$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2p-1\,;2p]$ et

$$\left|f'(t)\right| = \left|st^{s-1}\right| = |s|t^{a-1} \leq |s|\left((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}\right).$$

Par l'inégalité des accroissements finis

$$\left|(2p)^s - (2p-1)^s\right| \leq |s|\left((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}\right)$$

donc

$$\begin{aligned}\left|u_p(s)\right| &\leq |s|\frac{\left((2p-1)^{a-1} + (2p)^{a-1}\right)}{(2p)^a(2p-1)^a}\\ &\leq |s|\left(\frac{1}{(2p)^a(2p-1)} + \frac{1}{(2p)(2p-1)^a}\right).\end{aligned}$$

Introduisons alors

$$\Omega_{\alpha,R} = \left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \alpha \text{ et } |z| \leq R\right\} \quad \text{pour} \quad \alpha, R > 0.$$

Les fonctions u_n sont continues sur $\Omega_{\alpha,R}$ et pour tout $s \in \Omega_{\alpha,R}$

$$\left|u_n(s)\right| \leq |R|\left(\frac{1}{(2p)^\alpha(2p-1)} + \frac{1}{(2p)(2p-1)^\alpha}\right) \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{p^{\alpha+1}}\right).$$

La série de fonctions $\sum u_n$ converge normalement sur $\Omega_{\alpha,R}$ et sa fonction somme F est définie et continue sur $\Omega_{\alpha,R}$. Ceci valant pour tous α et R strictement positifs, on obtient que F est définie et continue sur $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z)\right\}$. Enfin, la fonction $s \mapsto 1 - 2^{1-s}$ étant continue et ne s'annulant pas sur Ω, on peut prolonger ζ par continuité sur Ω en posant

$$\zeta(s) = \frac{F(s)}{1 - 2^{1-s}}.$$