Variables aléatoires discrètes

Variables aléatoires

Exercice 1 [04093] [Correction]
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes à valeurs dans un ensemble E et N une variable aléatoire à valeurs naturelles toutes définies sur un même espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{T})$. On définit une fonction Y par

$$\forall\omega\in\Omega, Y(\omega)=X_{N(\omega)}(\omega).$$

Justifier que Y est une variable aléatoire discrète.

Exercice 2 [04094] [Correction]
Soit T une variable aléatoire à valeurs naturelles vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, \mathrm{P}(T>n)>0.$$

On appelle taux de panne associé à T la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ déterminée par

$$\theta_n=\mathrm{P}(T=n\,|\,T\geq n).$$

Typiquement, si T est la variable aléatoire indiquant l'instant où un matériel tombe à panne, la quantité θ_n indique la probabilité qu'il tombe en panne à l'instant présent alors qu'il est actuellement fonctionnel.

(a) Justifier

$$\forall n\in\mathbb{N}, \theta_n\in[0\,;1[.$$

(b) Exprimer en fonction des termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la probabilité $\mathrm{P}(T\geq n)$. En déduire la divergence de la série $\sum\theta_n$.

(c) Inversement, soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n\in\mathbb{N}, \theta_n\in[0\,;1[\text{ et } \sum\theta_n \text{ diverge.}$$

Montrer que la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un taux de panne associé à une certaine variable aléatoire T.

Espérances et variances

Exercice 3 [04018] [Correction]
Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[a\,;b]$.

(a) Montrer que X admet une espérance m et que celle-ci est élément de $[a\,;b]$.
La variable X admet aussi une variance σ^2 que l'on se propose de majorer.
On introduit la variable aléatoire $Y=X-m$ et les quantités

$$t=\sum_{y\geq0}yP(Y=y), s=\sum_{y\geq0}y^2\mathrm{P}(Y=y) \text{ et } u=\mathrm{P}(Y\geq0).$$

(b) Vérifier

$$t^2\leq su.$$

(c) Calculer espérance et variance de Y. En déduire

$$t^2\leq(\sigma^2-s)(1-u).$$

(d) En exploitant les deux majorations précédentes, obtenir

$$t^2\leq\sigma^2/4.$$

(e) Conclure

$$\sigma^2\leq(b-a)^2/4.$$

Exercice 4 [04028] [Correction]
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi binomiale négative de paramètres n et p si

$$X(\Omega)=\{n,n+1,\dots\} \text{ et } \mathrm{P}(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n(1-p)^{k-n}.$$

(a) Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi géométrique de paramètre p.
Montrer que $X_1+\dots+X_n$ suit une loi binomiale négatives de paramètres n et p.

(b) En déduire espérance et variance d'un loi binomiale négatives de paramètres n et p.

Exercice 5 [04032] [Correction]
On suppose qu'à la roulette d'un Casino, on obtient la couleur noire avec la probabilité 1/2, la couleur rouge sinon (bref, on ne suppose pas de 0 vert...). Un joueur fortuné joue selon le protocole suivant :
— il mise initialement 1 brouzouf sur la couleur noire ;
— s'il gagne, il arrête de jouer et empoche le double de sa mise.
— s'il perd, il double sa mise et rejoue.

(a) On suppose la fortune du joueur infinie.
Montrer que le jeu s'arrête presque sûrement. Déterminer l'espérance de gain du joueur.

(b) On suppose toujours la fortune du joueur infinie.
Que se passe-t-il si au lieu de doubler, il décide de tripler sa mise lorsqu'il rejoue ?

(c) Le joueur n'est en fait pas si fortuné qu'il le prétend : il ne possède que $2^n - 1$ brouzoufs ce qui l'autorise à ne pouvoir jouer que n parties. Que devient son espérance de gain ?

Exercice 6 [04121] [Correction]
Un joueur dispose de N dés équilibrés. Il lance une première fois ceux-ci et on note X_1 le nombre de « six » obtenus. Il met de côté les dés correspondants et relance les autres dés (s'il en reste). On note X_2 le nombre de « six » obtenus et on répète l'expérience définissant ainsi une suite de variables aléatoires $X_1, X_2, \dots$.
La variable $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ correspond alors au nombre de « six » obtenu après n lancers.

(a) Vérifier que S_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe un rang n pour lequel $S_n = N$.

(c) On définit alors la variable aléatoire

$$T = \min\{n \geq 1 \mid S_n = N\} \cup \{+\infty\}.$$

Déterminer la loi de T.

(d) Vérifier que la variable T admet une espérance et donner une formule exprimant celle-ci. Calculer cette espérance pour $N = 1$ et $N = 2$.

Exercice 7 [04124] [Correction]
Dans une urne figurent N boules numérotées de 1 à N (avec $N \geq 2$). Dans celle-ci on opère des tirages successifs (avec remise) jusqu'à l'obtention d'une série de k boules consécutives identiques ($k \geq 2$). On admet qu'il est presque sûr que ce processus s'arrête et on note T la variable aléatoire déterminant le nombre de tirages opérés à l'arrêt du processus.

(a) Déterminer $\mathrm{P}(T = k)$ et $\mathrm{P}(T = k + 1)$.

(b) Soit $n \geq 1$, établir

$$\mathrm{P}(T = n + k) = \frac{N-1}{N^k}\mathrm{P}(T > n).$$

(c) En déduire que la variable T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 8 [04130] [Correction]
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ et l'on étudie la première apparition de deux succès consécutifs dans cette suite.

(a) Montrer qu'il est presque sûr qu'il existe $n \geq 2$ vérifiant

$$X_n = X_{n-1} = 1.$$

(b) On note T la variable aléatoire donnée par

$$T = \min\{n \geq 2 \mid X_n = X_{n-1} = 1\} \cup \{+\infty\}.$$

Calculer $\mathrm{P}(T = 2)$, $\mathrm{P}(T = 3)$ et exprimer, pour $n \geq 4$, $\mathrm{P}(T = n)$ en fonction de $\mathrm{P}(T = n - 1)$ et $\mathrm{P}(T = n - 2)$.

(c) Justifier que T admet une espérance finie et calculer celle-ci.

Exercice 9 [04019] [Correction]
On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois « face » et une fois « pile ».

(a) Montrer qu'il est presque sûr que le jeu s'arrête.

(b) On note X le nombre de lancers avant que le jeu cesse.
Montrer que X admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 10 [04184] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements quelconques vérifiant

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(E_n) < +\infty.$$

Pour X un ensemble quelconque, on note 1_X la fonction indicatrice de X.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(a) Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{E_n}$ (on convient $Z = +\infty$ si la série diverge).
Prouvez que Z est une variable aléatoire discrète.

(b) Soit
$$F = \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \omega \text{ n'appartient qu'à un nombre fini de } E_n\right\}.$$
Prouver que F est un événement et que $\mathrm{P}(F) = 1$.

(c) Prouver que Z admet une espérance.

Exercice 11 [04182] [Correction]
On s'intéresse à la première apparition du motif « PF » dans un tirage infini de pile ou face, indépendants et non truqués. On note A_i l'événement

« Le motif PF apparaît pour la première fois au rang i ».

(c'est-à-dire que le P est en position $i-1$ et le F en position i). On pose $q_i = \mathrm{P}(A_i)$ et T la variable aléatoire donnant le rang d'apparition du motif.

(a) Écrire un programme **Python** calculant la moyenne d'apparition du motif. Conjecture ?

(b) Montrer que
$$\mathrm{P}\Bigl(\bigcup_{i\geq 2} A_i\Bigr) = 1.$$

(c) Décrire A_n, pour $n \geq 2$ et en déduire la valeur de q_n.

(d) Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance.

On s'intéresse maintenant à la première apparition du motif « PP ». On note toujours T la variable aléatoire donnant le rang de première apparition du motif et $q_n = \mathrm{P}(T = n)$, pour $n \geq 2$.

(e) Calculer avec **Python** la moyenne d'apparition du motif. Conjecture ?

(f) Montrer que $q_2 = 1/4$, $q_3 = 1/8$ et
$$\forall n \geq 4, q_n = \frac{q_{n-1}}{2} + \frac{q_{n-2}}{4}.$$

(g) Montrer que T est d'espérance finie et calculer son espérance.

Exercice 12 [04949] [Correction]
Pour un entier $n \geq 2$, on donne une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients $m_{i,j}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées selon une loi d'espérance μ. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'espérance de $\chi_M(\lambda)$.

Covariances

Exercice 13 [04086] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires réelles admettant chacune une variance. On suppose $\mathrm{V}(X) > 0$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ minimisant la quantité
$$\mathrm{E}\Bigl(\bigl(Y - (aX + b)\bigr)^2\Bigr).$$

Exercice 14 [04048] [Correction]
Un signal est diffusé via un canal et un bruit vient malheureusement s'ajouter à la transmission. Le signal est modélisé par une variable aléatoire discrète réelle S d'espérance m_S et de variance σ_S^2 connues. Le bruit est modélisé par une variable B indépendante de S d'espérance nulle et de variance $\sigma_B^2 > 0$. Après diffusion, le signal reçu est $X = S + B$.
Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que $Y = aX + b$ soit au plus proche de S *i.e.* tel que l'espérance $\mathrm{E}\bigl((Y - S)^2\bigr)$ soit minimale.

Exercice 15 [04047] [Correction]
Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes réelles. On appelle matrice de covariance de la famille $(X_1, \dots, X_n)$ la matrice
$$\Sigma = \bigl(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\bigr)_{1\leq i,j\leq n}.$$

(a) Soit $X = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Exprimer la variance de X en fonction de la matrice Σ.

(b) En déduire que les valeurs propres de la matrice Σ sont toutes positives.

Exercice 16 [04181] [Correction]
Soit (U, V) un couple de variables aléatoires indépendantes suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

(a) Montrer que la somme de n variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

(b) On pose $S = (U - 1)^2 + (V - 1)^2$. Déterminer la loi de S.

(c) On pose $T = (U - 1)(V - 1) + 1$. Calculer $\mathrm{E}\bigl(S(T - 1)\bigr)$. Déterminer la loi de T . Calculer la covariance de (S, T). Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 17 [05001] [Correction]
Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles suivant toutes les deux la loi d'une variable aléatoire X bornée.
On suppose que $X_1 + X_2$ suit la loi de la variable $2X$. Montrer que $X_1 = X_2$ presque sûrement [1].

Lois usuelles

Exercice 18 [04021] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes.
On suppose que celles-ci suivent une même loi géométrique de paramètre p.
Déterminer la loi de $Z = X + Y$.

Exercice 19 [04034] [Correction]
Soit X une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Pour quelle valeur de $n \in \mathbb{N}$, la probabilité de l'évènement $(X = n)$ est-elle maximale ?

(b) Inversement, n étant fixé, pour quelle valeur du paramètre λ, la probabilité de $(X = n)$ est-elle maximale ?

Exercice 20 [04036] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer

$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right).$$

Exercice 21 [04045] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
Déterminer la probabilité que la valeur de X soit pair.

Exercice 22 [04115] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres $p, q \in \left]0\,;1\right[$.
Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.

1. Ceci signifie $\mathrm{P}(X_1 = X_2) = 1$.

Exercice 23 [04126] [Correction]
On lance cinq dés. Après ce premier lancer ceux des dés qui ont donné un « As » sont mis de côtés et les autres sont relancés. On procède ainsi jusqu'à l'obtention des cinq « As ». On note T la variable aléatoire déterminant le nombre de lancers nécessaires.

(a) Calculer $\mathrm{P}(T \leq n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

(b) En déduire que T admet une espérance et déterminer celle-ci.

Exercice 24 [04127] [Correction]
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres p et $q > 0$.
Quelle est la probabilité que la matrice suivante soit diagonalisable ?

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 [04129] [Correction]
On souhaite modéliser le nombre d'arrivées de « clients » dans un « service » durant un laps de temps T.
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $s, t \in \mathbb{R}$ avec $0 \leq s \leq t$, on note $A(n, s, t)$ l'événement

« il arrive n clients dans l'intervalle de temps de $[s\,;t[$ »

On admet l'existence d'un espace probabilisé permettant d'étudier la probabilité de cet événement en supposant :

(H1) pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ et tous réels $0 \leq r \leq s \leq t$, les événements $A(m, r, s)$ et $A(n, s, t)$ sont indépendants ;

(H2) la probabilité de l'événement $A(n, s, t)$ ne dépend que de n et du réel $t - s$. On note

$$p_n(t) = \mathrm{P}\big(A(n, 0, t)\big).$$

(H3) la fonction p_0 est continue et $p_0(0) = 1$;

(H4) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n(t) = 1.$$

(H5) on a le développement asymptotique

$$1 - p_0(t) - p_1(t) \underset{t \to 0^+}{=} \mathrm{o}\big(p_1(t)\big).$$

Cette dernière hypothèse signifie que, durant un laps de temps minime, la probabilité d'arrivée d'au moins deux clients est négligeable devant la probabilité d'arrivée d'un seul client.

(a) Justifier que la fonction p_0 est décroissante et que

$$\forall s,t \in \mathbb{R}_+, p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t).$$

(b) Montrer que p_0 est à valeurs strictement positives et qu'il existe un réel $\lambda \geq 0$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

(c) Justifier

$$p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t + \mathrm{o}(t) \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2, p_n(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t).$$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer

$$\forall s,t \geq 0, p_n(s+t) = \sum_{k=0}^{n} p_k(s)p_{n-k}(t).$$

En déduire que la fonction p_n est dérivable et

$$\forall t \geq 0, p_n'(t) = \lambda(p_{n-1}(t) - p_n(t)).$$

(e) Obtenir l'expression de $p_n(t)$ (on pourra étudier $q_n(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}p_n(t)$).

(f) On note X la variable aléatoire déterminant le nombre de « clients » arrivant durant le laps de temps $T > 0$. Déterminer la loi de X. Comment interpréter le paramètre λ ?

Loi conjointes, Loi marginales

Exercice 26 [04054] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que la loi de Y sachant $X = n$ est binomiale de paramètres n et $p \in \,]0\,;1[$.

(a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y).

(b) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 27 [04055] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}(X = j, Y = k) = \frac{a}{j!k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.

(c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 28 [04056] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \mathrm{P}(X = j, Y = k) = a\frac{j+k}{2^{j+k}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer les lois marginales X et Y.

(c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

(d) Calculer $\mathrm{P}(X = Y)$.

Exercice 29 [04057] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in \,]0\,;1[$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathrm{P}(X = k, Y = n) = \begin{cases} \binom{n}{k} a^n p(1-p)^n & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ avec } a \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la valeur de a.

(b) Déterminer la loi marginale de Y.

(c) Sachant

$$\forall x \in \,]-1\,;1[, \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}.$$

Reconnaître la loi de X

(d) Les variables X et Y sont elle indépendantes ?

Exercice 30 [05003] [Correction]
On réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce ayant la probabilité $p \in \,]0\,;1[$ de tomber côté Pile. On note X la longueur de la première série de lancers identiques et Y la longueur de la seconde série. Par exemple, les successions de lancers PPFFFP... et FFPPPF... correspondent à $X = 2$ et $Y = 3$.

(a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).

(b) Calculer les espérances de X et Y et comparer celles-ci.

Exercice 31 [05004] [Correction]
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune des lois géométriques de paramètres p et $q \in]0;1[$. On pose

$$U = \min(X, Y) \quad \text{et} \quad V = \max(X, Y) - \min(X, Y)(ou|X - Y|??)$$

Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 32 [05006] [Correction]
Soit $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0;1[$. Soient N une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes des précédentes et X, Y les variables déterminées par

$$X = \sum_{i=1}^{N} U_i \quad \text{et} \quad Y = N - \sum_{i=1}^{N} U_i.$$

(a) Vérifier

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = k + \ell) \quad \text{pour tout } (k, \ell) \in \mathbb{N}^2.$$

(b) On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que les variables X et Y sont indépendantes.

Inversement, on suppose que les variables X et Y sont indépendantes et que la variable N n'est pas presque sûrement nulle. On pose

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) \quad \text{et} \quad q_\ell = \mathrm{P}(Y = \ell) \quad \text{pour tous } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

(a) Justifier que les p_k et les q_ℓ sont tous strictement positifs.

(b) Vérifier que

$$(k+1)p_{k+1}q_\ell(1-p) = (\ell+1)p_k q_{\ell+1} p \quad \text{pour tous } k, \ell \in \mathbb{N}.$$

(c) En déduire une relation de récurrence sur les termes de la suite (p_k) puis identifier la loi suivie par X.

(d) En déduire que N suit une loi de Poisson.

Fonctions génératrices

Exercice 33 [04027] [Correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité $p > 0$ de réussir et $1 - p$ d'échouer.
On répète l'expérience indépendamment jusqu'à obtention de m succès et on note T_m le nombre d'essais nécessaires à l'obtention de ces m succès.

(a) Reconnaître la loi de T_1.

(b) Déterminer la loi de T_m dans le cas général $m \in \mathbb{N}^*$.

(c) Exprimer le développement en série entière de

$$\frac{1}{(1-t)^m}.$$

(d) Déterminer la fonction génératrice de T_m et en déduire son espérance.

Exercice 34 [04039] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Calculer

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$

(b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 35 [04040] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.

(a) Calculer

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big).$$

(b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

Exercice 36 [04024] [Correction]
Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(a) Rappeler la fonction génératrice de la variable X.

(b) Exploiter celle-ci pour calculer le moment centré d'ordre 3 de la variable X.

Exercice 37 [04091] [Correction]
On considère une expérience aléatoire ayant la probabilité p de réussir et $q = 1 - p$ d'échouer définissant une suite de variables de Bernoulli indépendantes $(X_n)_{n\geq 1}$.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m.$$

(a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

(b) Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geq 2$.

(c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m

Exercice 38 [04114] [Correction]
Une urne contient 4 boules rapportant $0, 1, 1, 2$ points. On y effectue n tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de S et en déduire la loi de S.

Exercice 39 [04117] [Correction]
Soit X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par

$$\mathrm{P}(X = k) = a\binom{n+k}{k}p^k \text{ (avec } a > 0 \text{ et } p \in \left]0\,;1\right[).$$

Calculer espérance et variance de X.

Exercice 40 [04194] [Correction]
Montrer par les fonctions génératrices qu'il est impossible de « truquer » deux dés cubiques et indépendants pour que la somme d'un lancer suive une loi uniforme sur $[\![2\,;12]\!]$

Exercice 41 [04169] [Correction]
Un pion se déplace sur des cases numérotées par les entiers naturels. Initialement, il se trouve sur la case 0 et à chaque instant, il se déplace d'un nombre strictement positif de cases. On note Y_i la variable aléatoire donnant le nombre de cases parcourues lors de la i-ème étape. On suppose que les Y_i sont indépendantes et suivent la même loi. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

qui donne la position du pion à l'instant n,

$$f_i = \mathrm{P}(Y_1 = i) \quad \text{et} \quad f(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i.$$

Enfin, on introduit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$.
Écrire en **Python** une fonction qui prend un paramètre entier k et qui renvoie 1 si le pion atteint la case k et 0 sinon.
Écrire une fonction qui, sur une trentaine d'essais, renvoie la proportion de fois où le pion atteint la case k. Comparer à $1/\mathrm{E}(Y_1)$.

On note E_k l'événement : « le pion atteint la case k » et $u_k = \mathrm{P}(E_k)$.

(b) Décrire l'événement E_k à l'aide des variable aléatoires S_n.

(c) Calculer $\mathrm{P}\big(E_k \cap \{Y_1 = j\}\big)$ pour $1 \leq j \leq k$.

(d) En déduire

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j.$$

(e) Justifier la définition de

$$u(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k \quad \text{pour } t \in [0\,;1]$$

et montrer que $u(t) = \frac{1}{1-f(t)}$.

(f) Calculer u dans le cas où $Y_1 - 1$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0\,;1\right[$ et en déduire les u_k.

(g) On suppose que Y_1 prend un nombre fini de valeurs et que les entiers k tels que $\mathrm{P}(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que (u_k) tend vers $1/\mathrm{E}(Y_1)$.

Exercice 42 [04180] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d suivant la loi de X et N une variable aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

(a) Soit G_X, G_S et G_N les séries génératrices de X, S et N. Montrer

$$\forall t \in [0\,;1],\ G_S(t) = G_N \circ G_X(t).$$

(b) On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.

(c) On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer la variance de S.

On étudie la transmission du nom de famille au cours des générations dans une société patriarcale. On suppose que le nombre de descendants masculins d'un individu suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \left]0\,;+\infty\right[$. On note Z_0 le nombre d'individus masculins au début de l'étude, Z_n le nombre de descendants à la n-ième génération. On suppose que $Z_0 = 1$.

(d) Écrire une fonction **Python** renvoyant le nombre de descendants masculins à la n-ième génération.

(e) Fixer λ et n. Calculer une moyenne, sur un grand nombre de mesures, du nombre de descendants masculins. Comparer à $\mathrm{E}(Z_n)$.

Exercice 43 [04943] [Correction]

(a) Donner le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n.$$

(b) Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et calculer $S(t)$ pour tout réel t convenable.

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie $G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda > 0$.

(c) Déterminer λ puis $\mathrm{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(d) Rappeler les expressions de l'espérance et de la variance à l'aide de la fonction génératrice et en déduire $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.

Applications

Exercice 44 [04049] [Correction]

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{X}$. Pour chaque valeur $x \in \mathcal{X}$, on pose

$$p(x) = \mathrm{P}(X = x).$$

On appelle entropie de la variable X le réel

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\log\bigl(p(x)\bigr)$$

où l'on convient $0\log 0 = 0$.

(a) Vérifier que $H(X)$ est un réel positif. À quelle condition celui-ci est-il nul ?
Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans des ensembles finis $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$.

(b) On appelle entropie conjointe de X et Y, l'entropie de la variable $Z = (X, Y)$ simplement notée $H(X, Y)$.
On suppose les variables X et Y indépendantes, vérifier

$$H(X, Y) = H(X) + H(Y).$$

(c) On appelle entropie de X sachant Y la quantité

$$H(X \mid Y) = H(X, Y) - H(Y).$$

Vérifier

$$H(X \mid Y) = \sum_{y\in\mathcal{Y}} \mathrm{P}(Y = y) H(X \mid Y = y)$$

avec

$$H(X \mid Y = y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} \mathrm{P}(X = x | Y = y)\log(\mathrm{P}(X = x | Y = y)).$$

Indépendance

Exercice 45 [04083] [Correction]

Soient X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et f une application définie sur $X(\Omega)$.
À quelle condition les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ sont-elles indépendantes ?

Moments

Exercice 46 [04023] [Correction]

Soit X une variable aléatoire discrète réelle. Sous réserve d'existence, on appelle fonction génératrice des moments de X l'application

$$M_X(t) = \mathrm{E}\bigl(\mathrm{e}^{tX}\bigr).$$

(a) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. Déterminer $M_X(t)$.

(b) On suppose que la fonction M_X est définie sur un intervalle $]-a\,;a[$.
Montrer qu'elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'on a

$$\mathrm{E}(X^n) = M_X^{(n)}(0).$$

Inégalités de concentration

Exercice 47 [04113] [Correction]
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n p_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Exercice 48 [04122] [Correction]
Soit $f\colon [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Soit S_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et $x \in [0\,;1]$ et $X_n = S_n/n$
Donner les valeurs de l'espérance et de la variance de X_n. Justifier

$$\forall \alpha > 0, \mathrm{P}\big(|X_n - x| > \alpha\big) \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.$$

(b) On introduit la variable aléatoire $Y_n = f(X_n)$ et on pose $B_n(f)(x) = \mathrm{E}(Y_n)$.
Vérifier que $B_n(f)(x)$ est une fonction polynôme de la variable x.
Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue sur le segment $[0\,;1]$, elle y est uniformément continue (théorème de Heine). Ceci assure l'existence d'un réel $\alpha > 0$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in [0\,;1]^2, |y-x| \leq \alpha \implies \big|f(y) - f(x)\big| \leq \varepsilon.$$

Au surplus, la fonction f étant continue sur un segment, elle y est bornée (théorème de la borne atteinte). Ceci permet d'introduire un réel M vérifiant

$$\forall x \in [0\,;1], \big|f(x)\big| \leq M.$$

(c) Avec les notations ci-dessus, établir

$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \frac{M}{2n\alpha^2}$$

et

$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|\leq\alpha} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \leq \varepsilon.$$

(d) Conclure qu'à partir d'un certain rang, on a

$$\forall x \in [0\,;1], \big|B_n(f)(x) - f(x)\big| \leq 2\varepsilon.$$

Ce résultat constitue une démonstration « probabiliste » du théorème de Stone-Weierstrass assurant que toute fonction réelle continue sur un segment peut être uniformément approchée par une fonction polynôme.

Exercice 49 [04183] [Correction]

(a) Écrire une fonction `S(n,p)` qui simule une variable aléatoire $S_n = Y/n$, où Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
En déduire une fonction `test(n,p)` qui affiche les courbes interpolant les points (k, S_k), puis

$$\left(k, p - \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right) \text{ et } \left(k, p + \sqrt{\frac{\ln k}{k}}\right).$$

Que remarque-t-on ?

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$ et $x \in [-1\,;1]$. Montrer que

$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$

(c) On considère une variable aléatoire X telle que $|X| \leq 1$ et $\mathrm{E}(X) = 0$. Montrer que $\exp(tX)$ est d'espérance finie et

$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \leq \operatorname{ch} t \leq \exp(t^2/2).$$

(d) Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires centrées indépendantes telles que, pour tout i, $|X_i| \leq a_i$. On pose

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Montrer

$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer

$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-t\varepsilon + \frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^n a_i^2\right).$$

(e) En choisissant une bonne valeur de t, montrer

$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2\sum_{i=1}^n a_i^2}\right).$$

(f) Commenter le résultat observé à la première question.

Exercice 50 [04948] [Correction]
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathrm{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire centrée prenant ses valeurs dans $[-1\,;1]$.

(a) Montrer que, pour tout $x \in [-1\,;1]$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^{tx} \leq \frac{1}{2}(1-x)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+x)\mathrm{e}^{t}.$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big)$ existe et

$$\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

(c) Soit $r > 0$. Établir

$$\mathrm{P}\big(|X| > r\big) \leq 2\mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

Exercice 51 [04087] [Correction]
Soit X une variable aléatoires réelle discrète admettant une variance σ^2 (avec $\sigma > 0$). Montrer

$$\forall \alpha > 0,\ \mathrm{P}\big(|X - \mathrm{E}(X)| < \alpha\sigma\big) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Les $X_n(\Omega)$ sont des ensembles au plus dénombrables et

$$Y(\Omega) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n(\Omega).$$

On en déduit que l'ensemble $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable.
De plus, pour tout $y \in Y(\Omega)$

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, N(\omega) = n \text{ et } X_n(\omega) = y\right\}$$

et donc

$$Y^{-1}(\{y\}) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{N(\omega) = n\right\} \cap \left\{X_n(\omega) = y\right\}$$

est bien élément de la tribu $\mathcal{T}$.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) θ_n est une probabilité donc $\theta_n \in [0\,;1]$.
Si $\theta_n = 1$ alors $\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \geq n)$ et donc $\mathrm{P}(T > n) = 0$ ce qu'exclut les hypothèses.

(b) On a $\mathrm{P}(T = n) = \theta_n \mathrm{P}(T \geq n)$ et $\mathrm{P}(T = n) + \mathrm{P}(T \geq n+1) = \mathrm{P}(T \geq n)$ donc

$$\mathrm{P}(T \geq n+1) = (1 - \theta_n)\mathrm{P}(T \geq n).$$

Sachant $\mathrm{P}(T \geq 0) = 1$, on obtient

$$\mathrm{P}(T \geq n) = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

Puisque $\mathrm{P}(T \geq n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) = \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

Ainsi, il y a divergence de la série $\sum \ln(1 - \theta_n)$.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, la série $\sum \theta_n$ est évidemment divergente.
Si la suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 alors $\ln(1 - \theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\theta_n$ et, par équivalence de séries à termes de signe constant, la série $\sum \theta_n$ diverge.

(c) Analyse : Si T est une variable aléatoire solution alors

$$\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(T \geq n) - \mathrm{P}(T \geq n+1) = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$$

ce qui détermine entièrement la loi de T.
Synthèse : Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0.$$

Vérifions aussi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de somme égale à 1.
Introduisons $P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k)$. On a

$$\ln P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 - \theta_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty.$$

En effet, la série des $\ln(1 - \theta_k)$ est divergente à terme négatifs et ce que la suite (θ_n) tend vers 0 ou non).
On a aussi $P_0 = 1$ et $P_n - P_{n+1} = u_n$, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = P_0 - P_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

On peut alors définir une variable aléatoire T dont la loi vérifie

$$\mathrm{P}(T = n) = u_n = \theta_n \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k).$$

On a alors

$$\mathrm{P}(T \geq n) = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = P_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - \theta_k) > 0$$

et

$$\mathrm{P}(T = n \,|\, T \geq n) = \theta_n.$$

La variable aléatoire T est bien solution.

Exercice 3 : [énoncé]

(a) Posons $M=\max(-a,b)$. On a $|X|\leq M$ et la constante M admet une espérance. On en déduit que X admet une espérance. De plus

$$m=\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)\geq \sum_{x\in X(\Omega)} aP(X=x)=a$$

et de même $m\leq b$.

(b) Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_{y\geq 0} yP(Y=y)\right)^2\leq \sum_{y\geq 0} y^2\mathrm{P}(Y=y)\sum_{y\geq 0}\mathrm{P}(Y=y)=su.$$

(c) De façon immédiate $\mathrm{E}(Y)=0$ et $\mathrm{V}(Y)=\sigma^2$. On en déduit

$$t=-\sum_{y<0} yP(Y=y) \text{ et } \sum_{y<0} y^2\mathrm{P}(Y=y)=\sigma^2-s.$$

En appliquant à nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$t^2\leq(\sigma^2-s)(1-u).$$

(d) Ce qui précède fournit

$$t^2\leq \min\left\{su,(\sigma^2-s)(1-u)\right\}$$

pour $u\in[0\,;1]$ et $s\in[0\,;\sigma^2]$. Sachant

$$su\leq(\sigma^2-s)(1-u)\iff s+\sigma^2u\leq\sigma^2.$$

Si $s+\sigma^2 u\leq\sigma^2$ alors

$$\min\left\{su,(\sigma^2-s)(1-u)\right\}=su\leq\sigma^2(1-u)u\leq\sigma^2/4.$$

Si $s+\sigma^2u>\sigma^2$, c'est analogue et la conclusion demeure.

(e) On a

$$\sigma^2=\mathrm{E}(Y^2)=\sum_{y\geq 0} y^2\mathrm{P}(Y=y)+\sum_{y<0} y^2\mathrm{P}(Y=y).$$

Puisque Y est à valeurs dans $[a-m\,;b-m]$, on a

$$\sum_{y\geq 0} y^2\mathrm{P}(Y=y)\leq\sum_{y\geq 0}(b-m)yP(Y=y)=(b-m)t$$

et

$$\sum_{y<0} y^2\mathrm{P}(Y=y)\leq\sum_{y<0}(a-m)yP(Y=y)=-(a-m)t.$$

On en déduit

$$\sigma^2\leq(b-a)t.$$

En élevant au carré

$$\sigma^4\leq(b-a)^2t^2=\frac{(b-a)^2}{4}\sigma^2.$$

Enfin, que σ soit nul ou non, on obtient

$$\sigma^2\leq\frac{(b-a)^2}{4}.$$

Notons que cette inégalité est une égalité lorsque X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=1/2$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Cas $n=1$. Si X suit une loi binomiale négative de paramètres 1 et p alors

$$\mathrm{P}(X=k)=\binom{k-1}{0}p(1-p)^{k-1}.$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre p.
Supposons la propriété vraie au rang $n\geq 1$.
L'évènement $X_1+\cdots+X_{n+1}=k$ peut se décomposer en la réunion des évènements incompatibles suivants

$$X_1+\cdots+X_n=\ell \text{ et } X_{n+1}=k-\ell \text{ pour } \ell\in[\![n\,;k-1]\!].$$

On en déduit par indépendance

$$\begin{pmatrix}\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\sum_{\ell=n}^{k-1}\ell-1\\ n-1p^n(1-p)^{\ell-n}p(1-p)^{k-\ell-1}\end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{pmatrix}\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}\sum_{\ell=n}^{k-1}\ell-1\\ n-1.\end{pmatrix}$$

Or par la formule du triangle de Pascal

$$\begin{pmatrix}\sum_{\ell=n}^{k-1}\ell-1\\ n-1=\binom{k-1}{n}\end{pmatrix}$$

et donc

$$\mathrm{P}(X_1+\cdots+X_{n+1}=k)=\binom{k-1}{n}p^{n+1}(1-p)^{k-(n+1)}.$$

Récurrence établie.

(b) Par linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}(X)=\frac{n}{p}.$$

Par indépendance des variables sommées

$$\mathrm{V}(X)=n\frac{1-p}{p^2}.$$

Exercice 5 : [énoncé]

(a) Notons A_n l'évènement « le jeu dure au moins n parties ». A_{n+1} est la conjonction des évènements indépendants A_n et le rouge sort au $n+1$- ième tirage ». On en déduit

$$\mathrm{P}(A_{n+1})=\frac{1}{2}\mathrm{P}(A_n).$$

Par continuité décroissante, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_n)=0.$$

L'arrêt du jeu est donc presque sûr.
Lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le joueur a perdu $1+2+\cdots+2^{n-1}$ brouzoufs et vient de gagner 2^n brouzoufs. Au total, il gagne 1 brouzouf. Son gain étant presque sûrement constant égal à 1 brouzoufs, son espérance de gain vaut 1 brouzouf.

(b) Avec ce nouveau protocole, lorsque la partie s'arrête à la n-ième tentative, le gain du joueur vaut

$$2.3^{n-1}-(1+3+\cdots+3^{n-1})=\frac{3^{n-1}+1}{2}.$$

L'espérance de gain est

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}+1}{2}\mathrm{P}(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n-1}+1}{2^{n+1}}=+\infty.$$

(c) Puisque le joueur ne peut disputer que n parties, son espérance de gain devient

$$\sum_{k=1}^{n}1\times\mathrm{P}(A_n)-(2^n-1)\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=n+1}^{+\infty}A_k\right)=1-\frac{1}{2^n}-(2^n-1)\times\frac{1}{2^n}=0.$$

Exercice 6 : [énoncé]

(a) Il est entendu que la variable S_n prend ses valeurs dans $[\![0\,;N]\!]$.
Par récurrence sur $n\geq 1$, montrons que S_n suit une binomiale de paramètres N et p_n (avec p_n à déterminer).
Pour $n=1$, $S_1=X_1$ suit, compte tenu de la modélisation, une loi binomiale de paramètres N et $1/6$.
Supposons que S_n suit une loi binomiale de paramètres N et p_n.
Lors du$(n+1)$-ième lancer, le joueur dispose de $N-M$ dés avec $M=S_n$
X_{n+1} suit alors une loi binomiale de paramètres $N-M$ et $1/6$ (avec $N-M$ qui peut être nul auquel cas X_{n+1} est une variable constante égale à 0). On a donc

$$\forall k\in[\![0\,;N-M]\!],\mathrm{P}(X_{n+1}=k\,|\,S_n=M)=\binom{N-M}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{N-M-k}.$$

On a alors, pour $m\in[\![0\,;N]\!]$

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\sum_{M=0}^{k}\mathrm{P}(S_n=M)\mathrm{P}(X_{n+1}=k-M\,|\,S_n=M).$$

Ceci donne

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\sum_{M=0}^{k}\binom{N}{M}p_n^M(1-p_n)^{N-M}\binom{N-M}{k-M}\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}.$$

Or

$$\binom{N}{M}\binom{N-M}{k-M}=\frac{N!}{M!(k-M)!(N-k)!}=\binom{N}{k}\binom{k}{M}$$

et donc

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}(1-p_n)^N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\sum_{M=0}^{k}\binom{k}{M}\left(\frac{p_n}{1-p_n}\right)^M\left(\frac{1}{6}\right)^{k-M}$$

puis

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}(1-p_n)^N\left(\frac{5}{6}\right)^{N-k}\left(\frac{p_n}{1-p_n}+\frac{1}{6}\right)^k.$$

On peut réorganiser

$$\mathrm{P}(S_{n+1}=k)=\binom{N}{k}\left(\frac{1+5p_n}{6}\right)^k\left(1-\frac{1+5p_n}{6}\right)^{N-k}.$$

Ainsi, S_{n+1} suit une loi binomiale de paramètres N et $p_{n+1}=\frac{1+5p_n}{6}$.
Récurrence établie.
On peut préciser la probabilité p_n sachant

$$p_1=\frac{1}{6} \text{ et } p_{n+1}=\frac{1+5p_n}{6}.$$

La résolution de cette relation de récurrence donne

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

(b) Connaissant la loi de S_n, on peut déterminer directement la probabilité de l'événement $(S_n=N)$

$$\mathrm{P}(S_n=N)=\binom{N}{N}p_n^N(1-p_n)^0=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

L'événement

$$A=\text{« il existe } n \text{ tel que } S_n=N \text{ »}$$

est la réunion croissante des événements $(S_n=N)$. Par continuité croissante

$$\mathrm{P}(A)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(S_n=N)=1.$$

(c) Pour déterminer la loi de T, on va calculer la probabilité de l'événement $(T\leq n)$. Ce dernier correspond à l'événement $(S_n=N)$ et donc

$$\mathrm{P}(T\leq n)=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N \text{ avec } n\in\mathbb{N}.$$

On a alors

$$\mathrm{P}(T=n)=\mathrm{P}(T\leq n)-\mathrm{P}(T\leq n-1)$$

et donc

$$\mathrm{P}(T=n)=\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right)^N.$$

En fait, la loi de T peut être comprise comme le max de N lois géométriques indépendantes.

(d) Pour calculer l'espérance de T, on exploite la formule

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T>n) \text{ avec } \mathrm{P}(T>n)=1-\mathrm{P}(T\leq n).$$

En exploitant la factorisation

$$1-a^N=(1-a)(1+a+\dots+a^{N-1})$$

on obtient

$$\mathrm{P}(T>n)=1-\left(1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^N=\sum_{k=1}^N\binom{N}{k}(-1)^{k-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{nk}.$$

Par sommation géométrique

$$\mathrm{E}(T)=\sum_{k=1}^N\binom{N}{k}\frac{(-1)^{k-1}6^k}{6^k-5^k}.$$

Numériquement
Pour $N=1$, $\mathrm{E}(T)=6$ (on reconnaît l'espérance d'une loi géométrique)
Pour $N=2$, $\mathrm{E}(T)=96/11\simeq 8{,}7$.
On peut même poursuivre un tableau de valeurs
$N=3$, $\mathrm{E}(T)=10{,}5$
$N=4$, $\mathrm{E}(T)=11{,}9$
$N=5$, $\mathrm{E}(T)=13{,}0$
et les valeurs de l'espérance qui suivent sont $13{,}9, 14{,}7, 15{,}4,\dots$

Exercice 7 : [énoncé]
Pour $i\geq 2$, on introduit l'événement

$$A_i=\text{« La } i\text{-ème boule tirée est identique à la précédente »}$$

Compte tenu de la composition de l'urne, on peut affirmer

$$\mathrm{P}(A_i)=1/N.$$

Compte tenu de l'expérience modélisée (tirage avec remise), les événements A_i sont mutuellement indépendants.

(a) L'événement $(T=k)$ correspond à $A_2\cap\ldots\cap A_k$ et donc

$$\mathrm{P}(T=k)=\frac{1}{N^{k-1}}.$$

L'événement $(T = k+1)$ correspond à $\overline{A_2} \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k+1}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = k+1) = \frac{N-1}{N} \times \frac{1}{N^{k-1}} = \frac{N-1}{N^k}.$$

(b) L'événement $(T = n+k)$ correspond à $\overline{(T \leq n)} \cap \overline{A_{n+1}} \cap A_{n+2} \cap \ldots \cap A_{n+k}$ et donc

$$\mathrm{P}(T = n+k) = \mathrm{P}(T > n) \times \frac{N-1}{N^k}.$$

(c) Sous réserve de convergence, l'espérance de T peut s'écrire

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n).$$

Ici

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = \mathrm{P}(T > 0) + \frac{N^k}{N-1} \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k).$$

Ce qui assure l'existence de l'espérance. De plus, puisque le processus s'arrête presque sûrement et que la variable$T$ prend ses valeurs dans $\{k, k+1, \ldots\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n+k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathrm{P}(T = n) - \mathrm{P}(T = k) = 1 - \frac{1}{N^{k-1}}.$$

On en déduit la valeur de l'espérance de T

$$\mathrm{E}(T) = \frac{N^k - 1}{N-1}.$$

Notons, même si ce n'est pas l'objet de cet exercice, qu'il est assez facile de justifier que le processus s'arrête presque sûrement. Considérons l'événement

$B =$ « le processus ne s'arrête pas »

Pour voir que celui-ci est négligeable, on va l'inclure dans un événement (de probabilité plus immédiatement accessible) en regroupant les tirages k par k :

$$B \subset \bigcap_{j=0}^{+\infty} \{\text{les tirages de rangs } jk+1, jk+2, \ldots, jk+k \text{ ne sont pas tous identiques}\}.$$

Par indépendance et continuité décroissante

$$\mathrm{P}(B) \leq \lim_{J \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{N^{k-1}}\right)^J = 0.$$

Exercice 8 : [énoncé]

(a) Introduisons les événements

$$A_p = \{X_{2p-1} + X_{2p} \leq 1\} \text{ avec } p \geq 1.$$

Ces événements sont indépendants et

$$\mathrm{P}(A_p) = (1-p)^2 + 2p(1-p) = 1 - p^2.$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p\right) = \lim_{N \to +\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{N} A_p\right).$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{N} A_p\right) = \prod_{p=1}^{N} \mathrm{P}(A_p) = (1-p^2)^N.$$

Par limite d'une suite géométrique de raison $1 - p^2 \in \left]0\,;1\right[$, on obtient

$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p\right) = 0.$$

Par conséquent, l'événement $\overline{\bigcup_{p=1}^{+\infty} A_p}$ est presque sûr. Ainsi, il existe presque sûrement un rang pair en lequel il y a deux succès consécutifs. *A fortiori*, il est presque sûr qu'il existe un rang (pair ou impair) en lequel il y a deux succès consécutifs.

(b) Pour $n \geq 2$, on souhaite calculer $p_n = \mathrm{P}(T = n)$.
Pour $n = 2$, l'événement $(T = 2)$ correspond à $(X_1 = 1, X_2 = 1)$ de probabilité p^2.
Pour $n = 3$, l'événement $(T = 3)$ correspond à $(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1)$ de probabilité $(1-p)p^2$.
Pour $n \geq 3$, les choses se compliquent quelque peu. Considérons le système complet d'événements

$$(X_1 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 0), (X_1 = 1, X_2 = 1).$$

Par la formule des probabilités totales
$\mathrm{P}(T = n) = P_{X_1=0}(T = n)\mathrm{P}(X_1 = 0) + P_{X_1=1,X_2=0}(T = n)\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) + P_{X_1=1,X_2=1}(T = n)\mathrm{P}(X_1 = 1, X_2 = 1)$

Or
$$P_{X_1=0}(T=n)=\mathrm{P}(T=n-1).$$
En effet, la première épreuve étant un échec, obtenir deux succès consécutifs au rang n revient maintenant à obtenir deux succès consécutifs au rang $n-1$.
Par un argument analogue
$$P_{X_1=1,X_2=0}(T=n)=\mathrm{P}(T=n-2).$$
Enfin
$$P_{X_1=1,X_2=1}(T=n)=0$$
car les deux succès consécutifs ont été obtenus au rang 2 et qu'ici $n\geq 3$.
Finalement, on obtient la relation de récurrence
$$\mathrm{P}(T=n)=(1-p)\mathrm{P}(T=n-1)+p(1-p)\mathrm{P}(T=n-2).$$

(c) Par calculer l'espérance de T, on multiplie par n la relation précédente et on somme
$$\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n)=(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-1)+p(1-p)\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-2).$$
Or
$$\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-1)=\sum_{n=3}^{+\infty}(n-1+1)\mathrm{P}(T=n-1)=\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)+1$$
car $\sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{P}(T=n)=1$
De même
$$\sum_{n=3}^{+\infty}nP(T=n-2)=\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)+2.$$
Ainsi
$$\sum_{n=2}^{+\infty}nP(T=n)-2P(T=2)=(1-p^2)\sum_{n=2}^{+\infty}\mathrm{P}(T=n)+1+p-2p^2.$$
Finalement, T admet une espérance finie et
$$E(T)=\frac{1+p}{p^2}.$$

Exercice 9 : [énoncé]

(a) Le jeu dure infiniment si, et seulement si, chaque lancer produit « face » ou bien chaque lancer produit « pile ». Notons A_n l'évènement :

« le n-ième lancer donne face ».

Par indépendance des lancers
$$\mathrm{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)=\prod_{k=1}^{n}\mathrm{P}(A_k)=\frac{1}{2^n}.$$
Par continuité décroissante
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(A_1\cap\ldots\cap A_n)=0.$$
De même
$$\mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}\overline{A_n}\right)=0.$$
L'évènement « le jeu ne s'arrête pas » est donc négligeable.

(b) X est à valeurs dans $\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a $X>n$ si les n premiers lancers sont identiques. On en déduit
$$\mathrm{P}(X>n)=\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}A_k\cup\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)=\frac{1}{2^{n-1}}.$$
On en déduit
$$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X>n)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=3.$$
En fait $X-1$ suit une loi géométrique de paramètre $1/2$.

Exercice 10 : [énoncé]

(a) La variable aléatoire prend ses valeurs dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$.
Pour $k\in\mathbb{N}$, on a $Z(\omega)=k$ lorsque ω appartient à exactement k événements parmi les E_n. Pour $i_1<i_2<\cdots<i_k\in\mathbb{N}$, appartenir aux ensembles $E_{i_1},\ldots,E_{i_k}$ et pas aux autres s'expriment comme une intersection dénombrable d'événements E_{i_k} et $\overline{E_j}$: c'est donc un événement. En faisant

varier les $i_1, \dots, i_k$ sur l'ensemble dénombrable des possibles, $(Z = k)$ se comprend comme une réunion d'événements.
Enfin, $(Z = +\infty)$ est aussi un événement car c'est le complémentaire de la réunion dénombrable des événements $(Z = k)$ pour k parcourant $\mathbb{N}$.

(b) F est le complémentaire de $(Z = +\infty)$, c'est bien un événement.
$\overline{F}$ correspond à l'ensemble des ω appartenant à une infinité de E_n. On peut l'écrire comme l'intersection décroissante

$$\overline{F} = \cap_{N\in\mathbb{N}} \cup_{n\geq N} E_n.$$

Par continuité décroissante

$$\mathrm{P}(\overline{F}) = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\big(\cup_{n\geq N} E_n\big).$$

Or

$$\mathrm{P}\big(\cup_{n\geq N} E_n\big) \leq \sum_{n\geq N} \mathrm{P}(E_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

On peut conclure $\mathrm{P}(\overline{F}) = 0$ puis $\mathrm{P}(F) = 1$.

(c) Posons $Z_N = \sum_{n=0}^{N} 1_{E_n}$. Commençons par établir

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Z_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{P}(Z = k).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$

$$\sum_{n\geq N+1} \mathrm{P}(E_n) \leq \varepsilon.$$

Posons G l'événement réunion des E_n pour $n \geq N+1$. Ce qui précède donne $\mathrm{P}(G) \leq \varepsilon$.
Or

$$(Z_N = k) \cap \overline{G} = (Z = k) \cap \overline{G}$$

et

$$P(Z_N = k) = \underbrace{\mathrm{P}(Z_N = k \cap G)}_{\leq\varepsilon} + \mathrm{P}(Z_N = k \cap \overline{G})$$

$$P(Z = k) = \underbrace{\mathrm{P}(Z = k \cap G)}_{\leq\varepsilon} + \mathrm{P}(Z = k \cap \overline{G})$$

donc

$$\big|\mathrm{P}(Z_N = k) - \mathrm{P}(Z = k)\big| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, on peut affirmer

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Z_N = k) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \mathrm{P}(Z = k).$$

Pour tout M,

$$\sum_{k=0}^{M} k\mathrm{P}(Z = k) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{M} k\mathrm{P}(Z_N = k)$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{M} k\mathrm{P}(Z_N = k) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathrm{P}(Z_N = k)\\ &= \mathrm{E}(Z_N) \underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{n=0}^{N} \mathrm{E}(1_{E_N})\\ &= \sum_{n=0}^{N} \mathrm{P}(E_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(E_n).\end{aligned}$$

On a donc

$$\sum_{k=0}^{M} k\mathrm{P}(Z = k) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(E_n) = M.$$

Les sommes partielles de la série à termes positifs des $k\mathrm{P}(Z = k)$ sont bornées, cette série converge.

Exercice 11 : [énoncé]

(a)
```
import random as rnd

def T():
    n = 0
    P = False
    PF = False
    while (not PF):
        n = n + 1
        x = rnd.random()
        if x < 0.5:
            P = True
        elif P:
            PF = True
        else:
```

```
            P = False
    return n

def repete(n):
    c = 0
    for i in range(n):
        c = c + T()
    return c/n
```

L'étude numérique amène à conjecturer $\mathrm{E}(T) = 4$.

(b) Posons A_∞ l'événement

« Le motif PF n'apparaît pas ».

L'événement A_∞ est exactement la réunion des événements correspondant à une succession de F de longeur $k \in \mathbb{N}$ suivie exlcusivement de P ainsi que de l'événement correspondant uniquement à l'obtention de F. L'événement A_∞ est alors négligeable car réunion dénombrable d'événements de probabilités nulles [2]. On en déduit que la réunion des A_i, avec $i \geq 2$, est un événement presque sûr.

(c) A_n est la réunion des configurations commençant par un certain nombre $k \in \mathbb{N}$ de F puis se poursuivant avec des P au nombre de $\ell \in \mathbb{N}^*$ tel que $k + \ell = n - 1$ et se poursuivant enfin par un F. Chacune de ces configurations est de probabilité $1/2^n$ et donc $q_n = \frac{n-1}{2^n}$.

(d) La suite des nq_n est sommable donc T admet une espérance et

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n-1)n}{2^n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{(1-1/2)^3} = 4$$

(la somme est calculée en dérivant deux fois la série entière géométrique).

(e) On adapte le code précédent

```
def T():
    n = 0
    P = False
    PP = False
    while (not PP):
        n = n + 1
        x = rnd.random()
        if x < 0.5:
            if P:
                PP = True
            P = True
        else:
            P = False
    return n
```

On conjecture cette fois-ci une espérance égale à 6.

(f) q_2 est la probabilité de PP et q_3 celle de FPP d'où les valeurs proposées. Pour $n \geq 4$, on considère le système complet constitué des événements commençant par F, PF et PP et on obtient par argument de symétrie (quand on a obtenu F, ceci remet les « compteurs à zéro »)

$$q_n = \frac{1}{2}q_{n-1} + \frac{1}{4}q_{n-2} + \frac{1}{4} \times 0. \tag{1}$$

(g) Commençons par vérifier que les A_n avec $n \geq 2$ constituent un système complet. Les événements A_n sont deux à deux incompatibles et la série des q_n converge. En sommant la relation (**??**) pour n supérieur à 2, on obtient après glissement d'indice

$$\sum_{n=2}^{+\infty} q_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{+\infty} q_n + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} q_n$$

puis

$$\sum_{n=2}^{+\infty} q_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{+\infty} q_n + \frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} q_n.$$

On en tire que la somme des q_n est égale à 1. On peut alors calculer l'espérance de T.

Pour $t \in [-1\,;1]$, la fonction génératrice de T en t est donnée par

$$G_T(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} q_n t^n = \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{t}{2}\left(G_T(t) - \frac{t^2}{4}\right) + \frac{t^2}{4}G_T(t). \tag{2}$$

On peut exprimer $G_T(t)$ par une fraction rationnelle définie sur $[-1\,;1]$, celle-ci est dérivable en 1 ce qui assure que T admet une espérance et, par dérivation de (**??**),

$$G_T'(t) = \frac{t}{2} + \frac{1}{2}G_T(t) + \frac{t}{2}G_T'(t) + \frac{t}{2}G_T(t) + \frac{t^2}{4}G_T'(t).$$

Pour $t = 1$, on obtient

$$\mathrm{E}(T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{E}(T) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{E}(T).$$

2. Par exemple, la probabilité de n'obtenir que des F est par continuité décroissante la limite des probabilités de commencer par n F à savoir $1/2^n$. Les autres calculs sont analogues et, de façon générale, la probabilité d'obtenir un tirage infini précis est nulle.

On en tire $\mathrm{E}(T) = 6$.

Exercice 12 : [énoncé]
On sait $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M)$. Par la formule définissant le déterminant et la linéarité de l'espérance

$$\mathrm{E}\big(\chi_M(\lambda)\big) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^n (\lambda\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})\right).$$

Par indépendance des variables, on a pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$,

$$\mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^n (\lambda\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i})\right) = \prod_{i=1}^n \mathrm{E}(\lambda\delta_{\sigma(i),i} - m_{\sigma(i),i}) = \prod_{i=1}^n (\lambda\delta_{\sigma(i),i} - \mu).$$

On en déduit

$$\mathrm{E}\big(\chi_M(\lambda)\big) = \chi_A(\lambda)$$

avec A la matrice dont tous les coefficients sont égaux à μ. La poursuite des calculs donne

$$\mathrm{E}\big(\chi_M(\lambda)\big) = (\lambda + n\mu)\lambda^{n-1}.$$

Exercice 13 : [énoncé]
On a

$$\mathrm{E}\Big(\big(Y - (aX+b)\big)^2\Big) = \mathrm{V}\big(Y - (aX+b)\big) + \mathrm{E}\big(Y - (aX+b)\big)^2.$$

D'une part

$$\mathrm{V}\big(Y - (aX+b)\big) = \mathrm{V}(Y - aX) = a^2\mathrm{V}(X) - 2a\,\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{V}(Y)$$

et donc

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\big(Y - (aX+b)\big) &= \mathrm{V}(Y - aX)\\ &= \left(a - \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)}\right)^2\mathrm{V}(X) + \frac{\mathrm{V}(X)\mathrm{V}(Y) - (\mathrm{Cov}(X,Y))^2}{\mathrm{V}(X)}.\end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{E}\big(Y - (aX+b)\big)^2 = 0 \text{ pour } b = \mathrm{E}(Y) - aE(X).$$

On en déduit que

$$\mathrm{E}\Big(\big(Y - (aX+b)\big)^2\Big)$$

est minimale pour

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{V}(X)} \text{ et } b = \frac{\mathrm{V}(X)\mathrm{E}(Y) - \mathrm{Cov}(X,Y)\mathrm{E}(X)}{\mathrm{V}(X)}.$$

Ces valeurs de a et b réalisent une régression linéaire : elles donnent la meilleure expression linéaire de Y en fonction de X.

Exercice 14 : [énoncé]
Par la formule de Huygens

$$\mathrm{E}\big((Y-S)^2\big) = \mathrm{V}(Y-S) + \big(\mathrm{E}(Y-S)\big)^2$$

avec

$$\mathrm{E}(Y-S) = (a-1)m_S + b$$

et

$$\mathrm{V}(Y-S) = \mathrm{V}\big((a-1)S + aB + b\big) = (a-1)^2\sigma_s^2 + a^2\sigma_B^2$$

car la covariance de S et B est nulle.
La quantité $\mathrm{V}(Y-S)$ est minimale pour

$$a = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2}$$

et l'on peut alors rendre le terme $\big(\mathrm{E}(Y-S)\big)^2$ nul pour

$$b = (1-a)m_S.$$

Au final

$$Y = \frac{\sigma_S^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2}X + \frac{\sigma_B^2}{\sigma_S^2 + \sigma_B^2}m_S.$$

Exercice 15 : [énoncé]
(a) On a

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{Cov}(X,X).$$

Par bilinéarité

$$\mathrm{V}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_ia_j\mathrm{V}(X_i,X_j).$$

Ce calcul est aussi le résultat du produit matriciel

$${}^tC\Sigma C \text{ avec } C = {}^t\begin{pmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{pmatrix}.$$

(b) Soit $C = {}^t\big(a_1 \quad \cdots \quad a_n\big)$ un vecteur propre de Σ associé à une valeur propre λ.
On a ${}^tC\Sigma C = \lambda{}^tCC = \lambda\|C\|^2$ et, pour $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$, $\mathrm{V}(X) \geq 0$ donc
$$\lambda = \frac{\mathrm{V}(X)}{\|C\|^2} \geq 0.$$

Exercice 16 : [énoncé]

(a) Le plus efficace est sans doute de raisonner par les fonctions génératrices. On obtient une loi binomiale de paramètres n et p.

(b) $(U-1)^2$ prend les valeurs 0 et 1 avec
$$\mathrm{P}\big((U-1)^2 = 1\big) = \mathrm{P}(U=1) = \frac{1}{2}.$$
Les variables $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ suivent chacune une loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Par indépendance de U et V, on a aussi celle de $(U-1)^2$ et $(V-1)^2$ et donc S suit une loi $\mathcal{B}(2, 1/2)$.

(c) Par indépendance, l'espérance d'un produit est le produit des espérances
$$\mathrm{E}\big(S(T-1)\big) = \mathrm{E}\big((U-1)^3\big)\mathrm{E}(V-1) + \mathrm{E}(U-1)\mathrm{E}\big((V-1)^3\big) = 0.$$
La variable T prend les valeurs 0, 1 et 2.
$$\mathrm{P}(T=0) = \mathrm{P}(U=0, V=2) + \mathrm{P}(U=2, V=0) = \frac{1}{8}$$
et
$$\mathrm{P}(T=2) = \mathrm{P}(U=0, V=0) + \mathrm{P}(U=2, V=2) = \frac{1}{8}.$$
On en tire $\mathrm{P}(T=1) = 3/4$.
Par la formule de Huygens
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(S,T) &= \mathrm{E}(ST) - \mathrm{E}(S)\mathrm{E}(T)\\ &= \mathrm{E}\big(S(T-1)\big) + \mathrm{E}(S) - \mathrm{E}(S)\mathrm{E}(T)\\ &= 0 + 1 - 1 = 0.\end{aligned}$$
La covariance nulle ne suffit pas à affirmer l'indépendance de S et T.
Étudions l'événement $(S=0, T=0)$.
L'événement $(S=0)$ correspond à $(U=1, V=1)$ alors que $(T=0)$ correspond à $(U=0, V=2) \cup (U=2, V=0)$. Ceux-ci sont incompatibles et donc
$$\mathrm{P}(S=0, T=0) = 0 \neq \mathrm{P}(S=0)\mathrm{P}(T=0).$$
Les variables S et T ne sont pas indépendantes.

Exercice 17 : [énoncé]

Une variable aléatoire admet une variance nulle est presque sûrement constante.

Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont presque sûrement bornées car elles suivent la loi de la variable bornée X, elles admettent donc chacune une variance et on peut aussi calculer la variance de leur somme :
$$\mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(X_1) + 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2).$$
Cependant,
$$\mathrm{V}(X_1) = \mathrm{V}(X_2) = \mathrm{V}(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(X_1 + X_2) = \mathrm{V}(2X) = 4\mathrm{V}(X).$$
On en déduit $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 2\mathrm{V}(X)$ puis
$$\mathrm{V}(X_1 - X_2) = \mathrm{V}(X_1) - 2\,\mathrm{Cov}(X_1, X_2) + \mathrm{V}(X_2) = 0.$$
La variable $X_1 - X_2$ est donc presque sûrement constante égale à 0 et on peut conclure que X_1 et X_2 sont presque sûrement égales.

Exercice 18 : [énoncé]

Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ donc $X+Y$ est à valeurs $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
Pour $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on a
$$\mathrm{P}(X+Y=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathrm{P}(X=\ell, Y=k-\ell).$$
Par indépendance
$$\mathrm{P}(X+Y=k) = \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathrm{P}(X=\ell)\mathrm{P}(Y=k-\ell).$$
Il ne reste plus qu'à dérouler les calculs :
$$\mathrm{P}(X+Y=k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}.$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) Posons
$$u_n = \mathrm{P}(X = n) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}.$$
On a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\lambda}{n+1}$$
donc si $n+1 \leq \lambda$ alors $u_{n+1} \geq u_n$ et si $n+1 > \lambda$ alors $u_{n+1} < u_n$.
La valeur maximale de u_n est donc obtenue pour $n = \lfloor \lambda \rfloor$.

(b) Il suffit d'étudier les variations de la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n$. La probabilité sera maximale si $\lambda = n$.

Exercice 20 : [énoncé]
Par la formule de transfert
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}(1-p)^{k-1}p = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^k}{k}.$$
Or pour $x \in \left]-1\,;1\right[$
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k}x^k = -\ln(1-x)$$
donc
$$\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{p}{p-1}\ln p.$$

Exercice 21 : [énoncé]
L'évènement X est pair est la réunion dénombrable des évènements $(X = 2k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Sa probabilité vaut
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X = 2k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\operatorname{ch}(\lambda) = \frac{1+\mathrm{e}^{-2\lambda}}{2}.$$

Exercice 22 : [énoncé]
L'événement $(X < Y)$ peut être décomposé en la réunion disjointes des événements
$$(X = k, Y > k) \text{ avec } k \in \mathbb{N}^*.$$
On a donc
$$\mathrm{P}(X < Y) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathrm{P}(X = k, Y > k).$$
Par indépendance des variables X et Y, on a
$$\mathrm{P}(X = k, Y > k) = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y > k)$$
avec
$$\mathrm{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \text{ et } \mathrm{P}(Y > k) = (1-q)^k.$$
On en déduit
$$\mathrm{P}(X < Y) = \sum_{k=1}^{n}p(1-q)\big((1-p)(1-q)\big)^{k-1} = \frac{p-pq}{p+q-pq}.$$

Exercice 23 : [énoncé]

(a) Distinguons les cinq dés et notons pour chacun $X_1,\dots,X_5$ les variables aléatoires donnant le nombre de lancers nécessaires avant que le dé correspondant ne produise un « As ». Ces variables aléatoires suivent des lois géométriques indépendantes de paramètre $p = 1/6$ et $T = \max(X_1,\dots,X_5)$.
On a
$$(T \leq n) = (X_1 \leq n) \cap \ldots \cap (X_n \leq n).$$
Par indépendance
$$\mathrm{P}(T \leq n) = \mathrm{P}(X_1 \leq n)\ldots\mathrm{P}(X_5 \leq n)$$
avec
$$\mathrm{P}(X_i \leq n) = 1 - \mathrm{P}(X_i > n) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$
Ainsi
$$\mathrm{P}(T \leq n) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5.$$

(b) Sous réserve de convergence
$$\mathrm{E}(T) = \sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T > n).$$
Ici
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(T > n) = \sum_{n=0}^{+\infty}1 - \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)^5.$$

En développant la puissance

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(T > n) = 5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n - 10\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{2n} + 10\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{3n} - 5\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{4n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{5n}$$

avec convergence des séries écrites.
Finalement

$$\mathrm{E}(T) = \sum_{k=1}^{5}(-1)^{k-1}\binom{5}{k}\frac{1}{1-(5/6)^k}.$$

Exercice 24 : [énoncé]
Une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

est diagonalisable si $a \neq b$ (2 valeurs propres distinctes pour une matrice de taille 2) et ne l'est pas si $a = b$ (1 seule valeur propre et n'est pas une matrice scalaire). La probabilité recherchée n'est donc autre que

$$\mathrm{P}(X \neq Y).$$

L'événement $(X \neq Y)$ est le complémentaire de l'événement $(X = Y)$ qui est la réunion d'événements deux à deux disjoints

$$(X = Y) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}(X = n, Y = n).$$

Par indépendance

$$\mathrm{P}(X = n, Y = n) = \mathrm{P}(X = n)\mathrm{P}(Y = n) = pq\big((1-p)(1-q)\big)^{n-1}.$$

Ainsi

$$\mathrm{P}(X = Y) = \frac{pq}{p+q-pq}.$$

Finalement, la probabilité que la matrice soit diagonalisable vaut

$$1 - \mathrm{P}(X = Y) = \frac{p+q-2pq}{p+q-pq}.$$

Exercice 25 : [énoncé]

(a) Pour $s \leq t$, l'événement $A(0,0,s)$ contient l'événement $A(0,0,t)$ et donc $p_0(s) \geq p_0(t)$.
Pour $s,t \geq 0$, l'événement$A(0,0,s+t)$ est la conjonction des événements $A(0,0,s)$ et $A(0,s,s+t)$. Par conséquent

$$\mathrm{P}(A(0,0,s+t) = \mathrm{P}\big(A(0,0,s) \cap A(0,s,s+t)\big).$$

Par indépendance (hypothèse H1)

$$\mathrm{P}\big(A(0,0,s+t)\big) = \mathrm{P}\big(A(0,0,s)\big)\mathrm{P}\big(A(0,s,s+t)\big).$$

Or, l'hypothèse H2 donne $\mathrm{P}\big(A(0,s,s+t)\big) = \mathrm{P}(A(0,0,t))$ et donc

$$p_0(s+t) = p_0(s)p_0(t).$$

(b) Par l'hypothèse H3, la fonction p_0 prend la valeur 1 en 0 et est continue. Si par l'absurde cette fonction prend une valeur négative, elle s'annule en un certain $t_0 > 0$. L'équation fonctionnelle obtenue ci-dessus donne par une récurrence rapide

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, p_0(kt) = p_0(t)^k.$$

En prenant $t = t_0/k$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, p_0(t_0/k) = 0.$$

En passant à limite quand k tend vers l'infini, on obtient l'absurdité $p_0(0) = 0$!
Puisqu'il est maintenant acquis que la fonction p_0 est à valeurs strictement positives, on peut introduire la fonction $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = \ln\big(p_0(t)\big).$$

L'équation fonctionnelle obtenue en a) se traduit

$$\forall s,t \in \mathbb{R}_+, f(s+t) = f(s) + f(t).$$

Sachant la fonction f continue, on peut affirmer que celle-ci est linéaire : il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, f(t) = at.$$

Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, p_0(t) = \mathrm{e}^{at}.$$

Enfin, puisque la fonction p_0 est décroissante, le réel a est nécessairement négatif ce qui permet de l'écrire $-\lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

(c) Par l'hypothèse H5 avec $p_0(t) \underset{t\to 0^+}{=} 1-\lambda t+\mathrm{o}(t)$, on obtient

$$p_1(t)+\mathrm{o}(p_1(t)) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t+\mathrm{o}(t).$$

Ainsi $p_1(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} \lambda t$ ce qui peut encore s'écrire

$$p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \lambda t+\mathrm{o}(t).$$

Aussi, l'hypothèse H4 permet d'affirmer

$$\forall n\geq 2, p_n(t)\leq 1-p_0(t)-p_1(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t)$$

et donc $p_n(t) \underset{t\to 0^+}{=} \mathrm{o}(t)$ pour tout $n\geq 2$.

(d) L'événement $A(n,0,s+t)$ est la réunion des événements deux à deux disjoints

$$A(k,0,s)\cap A(n-k,s,s+t) \text{ pour } k\in [\![0\,;n]\!].$$

On en déduit par additivité et les hypothèses H1 et H2 l'identité

$$p_n(s+t)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(A(k,0,s))\mathrm{P}(A(n-k,s,s+t))=\sum_{k=0}^{n}p_k(s)p_{n-k}(t).$$

Cette identité fournit le développement asymptotique

$$p_n(t+s) \underset{s\to 0^+}{=} (1-\lambda s+\mathrm{o}(s))p_n(t)+\lambda s p_{n-1}(t)+\mathrm{o}(s)$$

car

$$p_0(s) \underset{s\to 0^+}{=} 1-\lambda s+\mathrm{o}(s), p_1(s) \underset{s\to 0^+}{=} \lambda s+\mathrm{o}(s) \text{ et } p_k(s) \underset{s\to 0^+}{=} \mathrm{o}(s) \text{ pour } k\geq 2.$$

On obtient alors

$$\frac{1}{s}\bigl(p_n(t+s)-p_n(t)\bigr) \underset{s\to 0^+}{=} \lambda p_{n-1}(t)-\lambda p_n(t)+\mathrm{o}(1).$$

On en déduit que la fonction p_n est dérivable et

$$p_n'(t)=\lambda(p_{n-1}(t)-p_n(t)).$$

(e) En introduisant $q_n(t)=\mathrm{e}^{\lambda t}p_n(t)$, on constate

$$q_0(t)=1 \text{ et } q_n'(t)=\lambda q_{n-1}(t).$$

Par récurrence

$$q_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

puis

$$\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}_+, p_n(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

(f) L'événement $(X=n)$ a la probabilité de l'événement $A(n,0,T)$ et donc

$$\mathrm{P}(X=n)=p_n(T)=\mathrm{e}^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}.$$

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λT. L'espérance de X vaut alors λT et le paramètre λ se comprend comme le nombre moyen de clients entrant par unité de temps.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) Pour $(n,k)\in\mathbb{N}^2$. Si $k\leq n$ alors

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X=n,Y=k)&=\mathrm{P}(X=n)\mathrm{P}(Y=k\,|\,X=n)\\&=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.\end{aligned}$$

Si $k>n$ alors $\mathrm{P}(X=n,Y=k)=0$.

(b) Pour $k\in\mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=k).$$

Après réorganisation et glissement d'indice

$$\mathrm{P}(Y=k)=\frac{(\lambda p)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}(1-p)^n\lambda^n=\mathrm{e}^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}.$$

La variable Y suit une loi de Poisson de paramètre λp.

Exercice 27 : [énoncé]

(a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1.$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=a\mathrm{e}^2$$

donc $a=\mathrm{e}^{-2}$.

(b) Pour $j \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{\mathrm{e}^{-1}}{j!}$$

et donc X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda=1$. Il en est de même pour Y.

(c) Les variables sont indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=k).$$

Exercice 28 : [énoncé]

(a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=1.$$

Or

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=8a$$

car

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j+k}}=\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{2^{j-1}}=\frac{1}{(1-1/2)^2}=4.$$

On en déduit $a=1/8$

(b) Pour $j \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(X=j)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{j+1}{2^{j+2}}$$

et pour $k \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{P}(Y=k)=\sum_{j=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j,Y=k)=\frac{k+1}{2^{k+2}}.$$

(c) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}(X=j,Y=k)\neq\mathrm{P}(X=j)\mathrm{P}(Y=k)$$

pour $j=k=0$.

(d) Par probabilités totales

$$\mathrm{P}(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=n,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{2^{2n+3}}=\frac{1}{9}.$$

Exercice 29 : [énoncé]

(a) La loi conjointe de X et Y déterminant une probabilité

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k,Y=n)=1.$$

En réordonnant les sommes et en simplifiant les zéros

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k,Y=n)=\sum_{n=0}^{+\infty}p\big(2a(1-p)\big)^n=p\frac{1}{1-(2a(1-p))}.$$

On est donc amené à résoudre l'équation

$$1-2a(1-p)=p$$

ce qui conduit à la solution $a=1/2$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(Y=n)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{P}(X=k,Y=n)=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p(1-p)^n=p(1-p)^n.$$

(c) Pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}p\left(\frac{1-p}{2}\right)^n=p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k\frac{1}{(1-\frac{1-p}{2})^{k+1}}.$$

En simplifiant

$$\mathrm{P}(X=k)=\left(1-\frac{1-p}{1+p}\right)\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k.$$

(d) Les variables ne sont par indépendantes car l'on vérifie aisément

$$\mathrm{P}(X=k,Y=n)\neq\mathrm{P}(X=k)\mathrm{P}(Y=n)$$

pour $k=n=0$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 30 : [énoncé]

(a) En éliminant de l'univers des possibles l'événement négligeable où la pièce tombe toujours du même côté, la variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$. De même, en éliminant aussi l'événement négligeable où la deuxième succession est de longueur infinie, la variable Y est aussi définie à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On poursuit l'étude en supposant être dans l'univers probabiliste correspondant.
Pour $k, \ell \in \mathbb{N}^*$, calculons $\mathrm{P}(X = k, Y = \ell)$. D'une part, l'événement $(X = k, Y = \ell)$ est réalisé lorsque les k premiers lancers tombent côté Pile, les ℓ suivants coté Face et le $k + \ell + 1$-ième coté Pile. D'autre part, l'événement $(X = k, Y = \ell)$ est aussi réalisé dans la situation inverse où l'on échange Pile et Face et dans nulle autre situation. Par incompatibilité de ces deux situations et par l'indépendance des lancers, on obtient

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = p^k (1 - p)^\ell p + (1 - p)^k p^\ell (1 - p)$$

(b) Les lois marginales de X et Y se déduisent de la loi conjointe. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \sum_{\ell=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = \ell)$$

ce qui donne après sommations géométriques de raisons $1 - p$ et $p \in \left]0\,;1\right[$:

$$\mathrm{P}(X = k) = (1 - p)p^k + p(1 - p)^k$$

Un calcul analogue donne, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(Y = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = p^2 (1 - p)^{\ell-1} + (1 - p)^2 p^{\ell-1}$$

On peut ensuite calculer les espérances de X et Y en rappelant [3]

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k(1 - p)^{k-1} p = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kp^{k-1} (1 - p) = \frac{1}{1 - p}$$

On obtient

$$\mathrm{E}(X) = \frac{p}{1 - p} + \frac{1 - p}{p} = \frac{p^2 + (1 - p)^2}{p(1 - p)}$$

et

$$\mathrm{E}(Y) = \frac{p}{p} + \frac{1 - p}{1 - p} = 2$$

Enfin, l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$ valable pour tous a et b réels permet d'affirmer la comparaison

$$\mathrm{E}(X) \geq \frac{2p(1 - p)}{p(1 - p)} = 2 = \mathrm{E}(Y)$$

3. Ces formules correspondent au calcul de l'espérance de lois géométriques de paramètres p et $1 - p$.

Exercice 31 : [énoncé]

On détermine la loi conjointe de U et V afin d'en déduire les lois de U et V puis d'étudier leurs indépendance.

Les variables X et Y prennent leur valeurs dans $\mathbb{N}^*$. La variable U prend donc aussi ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$ tandis que la variable V prend les siennes dans $\mathbb{N}$.
Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $\ell \in \mathbb{N}$. On peut décrire l'événement $(U = k, V = \ell)$ à l'aide des variables X et Y : l'une est égale à k et l'autre à $k + \ell$

$$(U = k, V = \ell) = (X = k, Y = k + \ell) \cup (X = k + \ell, Y = k)$$

Si $\ell \neq 0$, on obtient par réunion d'événements incompatibles puis indépendance des variables X et Y

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = k, V = \ell) &= \mathrm{P}(X = k, Y = k + \ell) + \mathrm{P}(X = k + \ell, Y = k)\\ &= \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = k + \ell) + \mathrm{P}(X = k + \ell)\mathrm{P}(Y = k)\\ &= pq(1 - p)^{k-1}(1 - q)^{k-1}\big((1 - p)^\ell + (1 - q)^\ell\big)\end{aligned}$$

Si $\ell = 0$, il vient

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = k, V = 0) &= \mathrm{P}(X = k, Y = k) = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = k)\\ &= pq(1 - p)^{k-1}(1 - q)^{k-1}\end{aligned}$$

Ceci détermine la loi conjointe de U et V et on peut en déduire les lois des variables U et V.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathrm{P}(U = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k, V = \ell)$$

On isole de la somme le terme d'indice 0 et on poursuit le calcul à l'aide de sommations géométriques de raisons $(1 - p)$ et $(1 - q) \in \left]0\,;1\right[$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U = k) &= pq(1 - p)^{k-1}(1 - q)^{k-1}\left(1 + \frac{1 - p}{p} + \frac{1 - q}{q}\right)\\ &= (1 - p)^{k-1}(1 - q)^{k-1}(p + q - pq)\end{aligned}$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

La variable U suit une loi géométrique[4] de paramètre $r = p + q - pq$.
Pour $\ell \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(V = \ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k, V = \ell)$$

En distinguant le cas $\ell = 0$ du cas général, on obtient au terme des calculs :

$$\mathrm{P}(V = 0) = \frac{pq}{p+q-pq} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(V = \ell) = \frac{pq}{p+q-pq}\big((1-p)^\ell + (1-q)^\ell\big) \quad \text{pour } \ell \geq 1$$

On peut alors conclure que les variables U et V sont indépendantes puisque

$$\mathrm{P}(U = k, V = \ell) = \mathrm{P}(U = k)\mathrm{P}(V = \ell) \quad \text{pour tous } k \in \mathbb{N} \text{ et } \ell \in \mathbb{N}^*$$

Exercice 32 : [énoncé]

(a) Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. La somme des variables X et Y étant égales à N, on a l'égalité

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \mathrm{P}(X = k, N = k+\ell) = \mathrm{P}(X = k \,|\, N = k+\ell)\mathrm{P}(N = k+\ell). \tag{3}$$

Cependant, lorsque N vaut $k + \ell$, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $k + \ell$ et p en tant que somme de $k + \ell$ variables de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. On en déduit

$$\mathrm{P}(X = k \,|\, N = k + \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell$$

et l'égalité (**??**) donne alors celle voulue.

(b) À partir de la loi conjointe de X et Y, on peut déterminer les lois marginales. Les variables X et Y sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{P}(X = k) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!}.$$

Après simplification et factorisation des termes qui ne dépendent pas de ℓ,

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!}\big((1-p)\lambda\big)^\ell.$$

4. Voir sujet ? ? ?.

On reconnaît alors une somme exponentielle et on achève le calcul :

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(p\lambda)^k}{k!} \mathrm{e}^{\lambda(1-p)} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(p\lambda)^k}{k!}.$$

Ainsi, X suit une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$. Un calcul analogue montre que Y suit une loi de Poisson de paramètre $(1-p)\lambda$ et on vérifie alors pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$

$$\mathrm{P}(X = k, Y = \ell) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+\ell}}{(k+\ell)!} = \mathrm{P}(X = k)\mathrm{P}(Y = \ell).$$

Les variables X et Y sont indépendantes.

(c) *Pour $k \in [\![0\,;n]\!]$, l'événement $(X = k)$ contient $(X = k, N = n)$.*

La variable N n'étant pas presque sûrement constante, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(N = n) > 0$. On a alors

$$p_k = \mathrm{P}(X = k) \geq \mathrm{P}(X = k, N = n) = \binom{k+\ell}{k} p^k (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = n) > 0.$$

De la même façon, on établit $q_k > 0$ pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$. En particulier, on en déduit

$$\mathrm{P}(N = 2n) \geq \mathrm{P}(X = n, Y = n) = \mathrm{P}(X = n)\mathrm{P}(Y = n) = p_n q_n > 0$$

et l'ensemble des $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{P}(N = n) > 0$ ne peut être majoré. Le raisonnement qui précède peut alors être mené avec des valeurs de n arbitrairement grandes : les p_k et q_ℓ sont tous strictement positifs.

(d) *Les probabilités de $(X = k + 1, Y = \ell)$ et de $(X = k, Y = \ell + 1)$ sont toutes deux liées à la probabilité de $(N = k + \ell + 1)$*

Par l'égalité obtenue à la première question et l'indépendance des variables X et Y, on a

$$p_{k+1} q_\ell = \mathrm{P}(X = k + 1, Y = \ell) = \binom{k+\ell+1}{k+1} p^{k+1} (1-p)^\ell \mathrm{P}(N = k + \ell + 1)$$

et

$$p_k q_{\ell+1} = \mathrm{P}(X = k, Y = \ell + 1) = \binom{k+\ell+1}{k} p^k (1-p)^{\ell+1} \mathrm{P}(N = k + \ell + 1).$$

Sachant
$$(k+1)\binom{k+\ell+1}{k+1} = \frac{(k+\ell+1)!}{k!\,\ell!} = (\ell+1)\binom{k+\ell+1}{k}$$
on obtient
$$(k+1)p_{k+1}q_\ell(1-p) = (\ell+1)p_kq_{\ell+1}p.$$

(e) La relation précédente pour $\ell = 0$ donne
$$p_{k+1} = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{pq_1}{(1-p)q_0}p_k.$$
On en déduit par une récurrence facile
$$p_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{pq_1}{(1-p)q_0}\right)^k p_0 \quad \text{pour tout } k\in\mathbb{N}.$$
À un facteur près, l'expression de p_k s'apparente à celle d'une loi de Poisson de paramètre
$$\lambda = \frac{pq_1}{(1-p)q_0} > 0.$$
La somme des p_k devant être égale à 1, la valeur du facteur p_0 ne peut être autre que celle qui apparaît pour une loi de Poisson de paramètre λ. On en déduit que X suit cette loi de Poisson.

(f) Un calcul analogue montre que Y suit aussi une loi de Poisson et les variables X et Y étant indépendantes, leur somme N suit encore une loi de Poisson[5].

Exercice 33 : [énoncé]

(a) T_1 suit une loi géométrique de paramètre p.

(b) Notons $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des variables de Bernoulli testant la réussite de chaque expérience.
L'évènement $(T_m = n)$ est la réunion correspond à l'évènement
$X_1+\dots+X_n = m$ et $X_n = 1$ soit encore
$X_1+\dots+X_{n-1} = m-1$ et $X_n = 1$. Par indépendance
$$\mathrm{P}(T_m = n) = \mathrm{P}(X_1+\dots+X_{n-1} = m-1)\mathrm{P}(X_n = 1).$$
Puisque $X_1+\dots+X_{n-1}\sim\mathcal{B}(n-1,p)$ et $X_n\sim\mathcal{B}(p)$, on obtient
$$\mathrm{P}(T_m = n) = \binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}$$
et écriture vaut aussi quand $n\le m$ car le coefficient binomial est alors nul.

5. Voir sujet ? ? ?.

(c) En exploitant le développement connu de $(1+u)^\alpha$, on obtient
$$\frac{1}{(1-t)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}t^n \text{ pour } t\in\,]-1\,;1[.$$

(d) Par définition
$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n-1}{m-1}p^m(1-p)^{n-m}t^n.$$
En isolant les premiers termes nuls et en décalant l'indexation
$$G_{T_m}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{n+m-1}{m-1}(pt)^m\big((1-p)t\big)^n = \frac{(pt)^m}{\big(1-(1-p)t\big)^m}.$$
On en déduit
$$\mathrm{E}(X) = G'_{T_m}(1) = \frac{m}{p}.$$

Exercice 34 : [énoncé]

(a) Par la formule de transfert
$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big) = \sum_{k=r}^{+\infty}\frac{k!}{(k-r)!}\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^r.$$

(b) La fonction génératrice de X est
$$G_X(t) = \mathrm{E}(t^X) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$
Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$$G_X^{(r)}(t) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\big) = \lambda^r\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$
En particulier
$$G_X^{(r)}(1) = \mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big) = \lambda^r.$$

Exercice 35 : [énoncé]

(a) Par la formule de transfert

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)=\sum_{k=r}^{+\infty}k(k-1)\dots(k-r+1)(1-p)^{k-1}p.$$

Or

$$\sum_{k=r}^{+\infty}k(k-1)\dots(k-r+1)x^{k-r}=\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$$

donc

$$\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)=(1-p)^{r-1}\frac{r!}{p^r}.$$

(b) La fonction génératrice de X est

$$G_X(t)=\mathrm{E}(t^X)=\frac{pt}{1-(1-p)t}=\frac{p}{p-1}+\frac{\frac{p}{1-p}}{1-(1-p)t}.$$

Celle-ci est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$G_X^{(r)}(t)=\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)t^X\big)=\frac{p}{1-p}\frac{r!(1-p)^r}{(1-(1-p)t)^{r+1}}.$$

En particulier

$$G_X^{(r)}(1)=\mathrm{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)=r!\frac{(1-p)^{r-1}}{p^r}.$$

Exercice 36 : [énoncé]

(a) On a

$$G_X(t)=\mathrm{E}\big(t^X\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X=k)t^k=\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}.$$

(b) $G'_X(1)=\mathrm{E}(X)=\lambda$, $G''_X(1)=\mathrm{E}\big(X(X-1)\big)=\lambda^2$ et
$G_X^{(3)}(1)=\mathrm{E}\big(X(X-1)(X-2)\big)=\lambda^3$.
On en déduit

$$\mathrm{E}(X^2)=\lambda^2+\lambda \text{ et } \mathrm{E}(X^3)=\lambda^3+3\lambda^2+\lambda$$

puis

$$\mathrm{E}\big((X-\lambda)^3\big)=\mathrm{E}(X^3)-3\lambda\mathrm{E}(X^2)+3\lambda^2\mathrm{E}(X)-\mathrm{E}(X)^3=\lambda.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a) S_1 suit une loi géométrique de paramètre p et

$$G_{S_1}(t)=\frac{pt}{1-qt}.$$

(b) S_m-S_{m-1} suit la même loi géométrique de paramètre p.

(c) On peut écrire

$$S_m=\sum_{k=1}^{m}S_k-S_{k-1} \text{ avec } S_0=0.$$

Or les variables aléatoires de cette somme sont indépendantes car la probabilité de l'événement

$$(S_1-S_0=n_1,S_2-S_1=n_2,\dots,S_m-S_{m-1}=n_m)$$

n'est autre que celle de l'événement

$$X_{n_1}=X_{n_1+n_2}=\dots=X_{n_1+\dots+n_m}=1.$$

$$\text{et } X_k=0 \text{ pour les autres indice } k \text{ de } [\![1\,;n_1+\dots+n_m]\!]$$

et les variables $X_1,\dots,X_{n_1+\dots+n_m}$ sont indépendantes.
On en déduit

$$G_{S_m}(t)=\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m.$$

Puisque

$$G_{S_m}(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{m+n-1}{m-1}q^np^mt^{n+m}$$

on obtient

$$\mathrm{P}(S_m=n)=\binom{n-1}{m-1}q^{n-m}p^m \text{ pour } n\geq m.$$

Exercice 38 : [énoncé]

Notons $X_1,\dots,X_n$ les variables aléatoires fournissant les points obtenus lors des tirages.
Les variables X_i suivent la même loi de fonction génératrice

$$G_X(t)=\frac{1}{4}+\frac{2}{4}t+\frac{1}{4}t^2=\left(\frac{1+t}{2}\right)^2.$$

Puisque $S = X_1 + \cdots + X_n$ avec $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes on a

$$G_S(t) = G_{X_1}(t) \ldots G_{X_n}(t) = \big(G_X(t)\big)^n = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{2n}.$$

En développant la somme

$$G_S(t) = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} t^k.$$

Ceci détermine la loi de S :

$$\forall k \in [\![0\,;2n]\!], \mathrm{P}(S = k) = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{k}$$

S suit une loi binomiale de paramètre $2n$ et $1/2$: cela s'explique aisément car l'expérience de chaque tirage peut être modélisée par deux tirages successifs d'une pièce équilibrée.

Exercice 39 : [énoncé]
On introduit la fonction génératrice de X :

$$G_X(t) = \frac{a}{n!} \sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) \ldots (k+1)(pt)^k.$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (n+k) \ldots (k+1) x^k = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

on obtient

$$G_X(t) = \frac{a}{(1-pt)^{n+1}}.$$

Sachant $G_X(1) = 1$, on en tire la valeur de a

$$a = (1-p)^{n+1}.$$

On peut ensuite calculer espérance et variance

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1) = (n+1)\frac{p}{1-p} \text{ et } \mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = (n+1)\frac{p}{(1-p)^2}.$$

Exercice 40 : [énoncé]
La fonction génératrice d'une variable Y suivant une loi uniforme sur $[\![2\,;12]\!]$ est la fonction polynomiale

$$G_Y(t) = \frac{1}{12}\big(t^2 + t^3 + \cdots + t^{12}\big).$$

Notons G_{X_1} et G_{X_2} les fonctions génératices de chacun des dés.

$$G_{X_1}(t) = \big(p_1 t + p_2 t^2 + \cdots + p_6 t^6\big) \text{ et } G_{X_2}(t) = \big(q_1 t + q_2 t^2 + \cdots + q_6 t^6\big).$$

La fonction génératrice de la somme $X_1 + X_2$ est donnée par

$$G_{X_1+X_2}(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) = t^2 \big(p_1 + p_2 t + \cdots + p_6 t^5\big)\big(q_1 + q_2 t + \cdots + q_6 t^5\big).$$

Pour que $G_Y = G_{X_1} G_{X_2}$, il faut $p_1 q_1 > 0$ et $p_6 q_6 > 0$ auquel cas les facteurs de degré 5 possèdent chacune une racine réelle non nulle. Cependant

$$G_Y(t) = \frac{1}{12} t^2 \frac{1-t^{11}}{1-t}$$

n'en possède pas !

Exercice 41 : [énoncé]

(a)
```
import random as rnd

def atteint(k,p):
    Y = 0
    while Y < k:
        x = rnd.random()
        if x < p:
            Y = Y + 2
        else:
            Y = Y + 1
    if Y == k:
        return 1
    else:
        return 0

def repete(k,p,N):
    x = 0
    for i in range(N):
        x = x + atteint(k,p)
    return x/N,1/(1+p)
```

(b)
$$E_k = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (S_n = k).$$

(c) Si $j = k$,
$$\mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big) = \mathrm{P}(Y_1 = k).$$
Si $j < k$, par incompatibilité des événements $(S_n = k)$ (car les Y_i prennent des valeurs strictement positives)
$$\begin{aligned}\mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}\big(S_n = k, Y_1 = j\big)\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = k \,|\, Y_1 = j)\mathrm{P}(Y_1 = j)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(S_n = k \,|\, Y_1 = j)\mathrm{P}(Y_1 = j)\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \mathrm{P}(S_{n-1} = k - j \,|\, \mathrm{P})(Y_1 = j)\\ &= \mathrm{P}(E_{k-j})\mathrm{P}(Y_1 = j).\end{aligned}$$

(d) La famille des $(Y_1 = j)$ avec $j \in \mathbb{N}^*$ est un système complet d'événements et donc
$$\begin{aligned}\mathrm{P}(E_k) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}\big(E_k \cap (Y_1 = j)\big) + 0\\ &= \sum_{j=1}^{k} \mathrm{P}(E_{k-j})\mathrm{P}(Y_1 = j) + \mathrm{P}(Y_1 = k) = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j\end{aligned}$$
en posant $u_0 = 1$.

(e) La suite u_k est une suite de probabilité : elle est bornée et la série entière $\sum u_k t^k$ est de rayon de convergence au moins égale à 1.
Par produit de Cauchy de série absolument convergentes
$$f(t)u(t) = \sum_{i=1}^{+\infty} f_i t^i \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i+k=n} f_i u_k t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n t^n = u(t) - 1.$$
On en déduit la relation proposée.

(f) Si Y_1 suit une loi de Bernoulli
$$f(t) = (1-p)t + pt^2 \quad \text{et} \quad u(t) = \frac{1}{1-(1-p)t - pt^2} = \frac{1}{(1-t)(1+pt)}.$$
Par décomposition en éléments simples
$$u(t) = \frac{1}{1+p}\cdot\frac{1}{1-t} + \frac{p}{1+p}\cdot\frac{1}{1+pt}$$
et donc
$$u_k = \frac{1 + (-1)^k p^{k+1}}{(1+p)}.$$

(g) La fonction f est un polynôme qui prend la valeur 1 en 1 :
$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i t^i.$$
Vérifions que $f(t) - 1$ ne possède pas d'autres racines que 1 de module inférieur à 1.
Supposons $|t| \leq 1$. Si $f(t) = 1$, on a par inégalité triangulaire
$$1 = \left|\sum_{i=1}^{n} f_i t^i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} f_i |t|^i \leq \sum_{i=1}^{n} f_i = 1.$$
On en déduit $f_i|t|^i = f_i$ pour tout i compris entre 1 et n. Les indices i tels que les f_i sont non nuls étant premiers dans leur ensemble, il vient[6] $|t| = 1$. De plus, par égalité dans l'inégalité triangulaire complexe, les $f_i t^i$ ont le même argument lorsqu'ils sont non nuls. Aussi, leur somme est égale à 1 et on en tire que les t^i sont tous égaux à 1. Par le même argument qu'au-dessus, il vient $t = 1$.
1 est racine simple de la fraction u et ses autres racines complexes sont de modules strictement supérieurs à 1. La décomposition en éléments simples de u donne l'écriture
$$u(t) = \frac{a}{1-t} + v(t)$$
avec $a = f'(1) = \mathrm{E}(Y_1)$ et $v(t)$ dont la décomposition en série entière est de rayon de convergence > 1 et dont les coefficients sont donc de limite nulle. On en déduit que u_k tend vers $\mathrm{E}(Y_1)$ quand k tend vers l'infini.

6. Si $i_1, \dots, i_p$ sont les indices pour lesquels $f_i \neq 0$, il suffit d'écrire $|t| = |t|^{i_1 u_1 + \cdots + i_p u_p}$ avec $u_1, \dots, u_p$ entiers tels que $i_1 u_1 + \cdots + i_p u_p = 1$.

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 42 : [énoncé]

(a) Pour $t \in [-1\,;1]$

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{P}(S=m)t^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n, X_1+\dots+X_n=m)t^m \end{aligned}$$

car l'événement $(S=m)$ est la réunion disjointe des événements $(N=n, X_1+\dots+X_n=m)$. Par indépendance puis réoganisation du calcul de la somme d'une famille sommable, il vient

$$\begin{aligned} G_S(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)\mathrm{P}(X_1+\dots+X_n=m)t^m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)\sum_{m=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X_1+\dots+X_n=m)t^m \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N=n)G_{X_1+\dots+X_n}(t). \end{aligned}$$

Enfin, par indépendance, $G_{X_1+\dots+X_n}(t) = G_{X_1}(t)\times\dots\times G_{X_n}(t) = \big(G_X(t)\big)^n$ et on conclut $G_S = G_N\big(G_X(t)\big)$.

(b) G_N et G_X sont dérivables en 1 donc aussi $G_N\circ G_X$ et alors S admet une espérance :

$$\mathrm{E}(S) = G_S'(1) = G_X'(1)\times G_N'\big(G_X(1)\big) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(N).$$

(c) G_N et G_X sont deux fois dérivables en 1 donc aussi $G_N\circ G_X$ et alors S admet un moment d'ordre 2.

$$\begin{aligned} \mathrm{V}(S) &= \mathrm{E}(S^2)-\mathrm{E}(S)^2 = \mathrm{E}\big(S(S-1)\big)+\mathrm{E}(S)-\mathrm{E}(S)^2 \\ &= G_S''(1)+G_S'(1)-\big(G_S'(1)\big)^2. \end{aligned}$$

Au terme des calculs,

$$\mathrm{V}(S) = \mathrm{E}(N)\mathrm{V}(X)+\mathrm{E}(X)^2\mathrm{V}(N).$$

(d) On évite d'écrire `lambda` qui est un mot clé **Python**.

```
import random as rnd
import math

def poisson(l):
    x = rnd.random()
    n = 0
    p = math.exp(-l)
    while x > p:
        x = x - p
        n = n + 1
        p = p * l/n
    return n

def generation(n,l):
    Z = 1
    for k in range(n):
        S = 0
        for z in range(Z):
            S = S + poisson(l)
        Z = S
    return Z
```

(e)
```
def esperance(N):
    n = 10
    l = 1.8
    E = 0
    for i in range(N):
        E = E + generation(n,l)
    E = E / N
    return E, l**n
```

car $\mathrm{E}(Z_{n+1}) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Z_n)$ (car N correspond à Z_n) et donc $\mathrm{E}(Z_n) = \lambda^n$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) Par application de la règle de d'Alembert, $R=+\infty$.

(b) Pour tout $t\in\mathbb{R}$

$$\mathrm{e}^t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n$$

et donc

$$\begin{aligned}S(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)+2n+1}{n!}t^n\\ &= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-2)!}t^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)!}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}t^n\\ &= (t^2+2t+1)\mathrm{e}^t = (t+1)^2\mathrm{e}^t.\end{aligned}$$

(c) $G_X(1) = 1$ détermine $\lambda = \mathrm{e}^{-1}/4$. On en déduit

$$\mathrm{P}(X=n) = \frac{n^2+n+1}{4\mathrm{e}\cdot n!}.$$

(d) Si G_X est deux fois dérivable en 1,

$$\mathrm{E}(X) = G_X'(1) \quad\text{et}\quad \mathrm{V}(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \big(G_X'(1)\big)^2.$$

Ici, on obtient $\mathrm{E}(X) = 2$ et $\mathrm{V}(X) = 3/2$.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) Pour tout $x\in\mathcal{X}$, on a $-p(x)\log\big(p(x)\big)\geq 0$ car $p(x)\leq 1$. On en déduit $H(X)\in\mathbb{R}_+$.
Si $H(X) = 0$ alors, par somme nulle de positifs, on a

$$\forall x\in\mathcal{X}, p(x)\log\big(p(x)\big) = 0$$

et donc

$$\forall x\in\mathcal{X}, p(x) = 0 \text{ ou } p(x) = 1.$$

Sachant que

$$\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x) = \mathrm{P}(X\in\mathcal{X}) = 1$$

on peut affirmer qu'il existe $x\in\mathcal{X}$ tel que $p(x) = \mathrm{P}(X=x) = 1$.
La variable X est alors presque sûrement constante.

(b) Par définition

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(X=x,Y=y)\big).$$

Or les variables X et Y étant indépendantes

$$\mathrm{P}(X=x,Y=y) = \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)$$

puis

$$H(X,Y) = -\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} \mathrm{P}(X=x)\mathrm{P}(Y=y)\Big(\log\big(\mathrm{P}(X=x)\big)+\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\Big).$$

On sépare la somme en deux et l'on somme tantôt d'abord en x, tantôt d'abord en y et l'on obtient

$$H(X,Y) = H(X) + H(Y)$$

car

$$\sum_{x\in\mathcal{X}}\mathrm{P}(X=x) = \sum_{y\in\mathcal{Y}}\mathrm{P}(Y=y) = 1.$$

(c) On sait

$$\mathrm{P}(X=x\,|\,Y=y) = \mathrm{P}(X=x,Y=y)\mathrm{P}(Y=y)$$

donc

$$\mathrm{P}(Y=y)H(X\mid Y=y) = -\sum_{x\in\mathcal{X}}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\times\Big(\log\big(\mathrm{P}(X=x,Y=y)\big)-\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\Big).$$

On sépare la somme en deux et l'on somme le résultat sur $y\in\mathcal{Y}$ pour obtenir

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}}\mathrm{P}(Y=y)H(X\mid Y=y) = H(X,Y) + \sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big).$$

Or

$$\begin{aligned}&\sum_{(x,y)\in\mathcal{X}\times Y}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\\ &= \sum_{y\in\mathcal{Y}}\sum_{x\in\mathcal{X}}\mathrm{P}(X=x,Y=y)\log\big(\mathrm{P}(Y=y)\big)\end{aligned}$$

avec

$$\sum_{x\in\mathcal{X}}\mathrm{P}(X=x,Y=y) = \mathrm{P}(Y=y)$$

donc

$$\sum_{y\in\mathcal{Y}}\mathrm{P}(Y=y)H(X\mid Y=y) = H(X,Y) - H(Y).$$

Exercice 45 : [énoncé]
Supposons les variables aléatoires X et $Y = f(X)$ indépendantes.
Il existe au moins une valeur x par X vérifiant $\mathrm{P}(X = x) > 0$. En effet, la variable X étant discrète $\mathrm{P}(\Omega) = 1$ est la somme des probabilités des événements valeurs $(X = x)$. Considérons ensuite la valeur $y = f(x)$.

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = \frac{\mathrm{P}(f(X) = y \cap X = x)}{\mathrm{P}(X = x)}.$$

Or $(X = x) \subset (f(X) = y)$, donc

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = 1.$$

Cependant, les variables X et $f(X)$ étant supposées indépendantes

$$\mathrm{P}(f(X) = y \,|\, X = x) = \mathrm{P}(f(X) = y).$$

Ainsi, l'événement $(f(X) = y)$ est presque sûr. La variable aléatoire Y est donc presque sûrement constante. La réciproque est immédiate et donc X et $Y = f(X)$ sont indépendantes si, et seulement si, Y est presque sûrement constante.

Exercice 46 : [énoncé]

(a) Soit $t \in \mathbb{R}$, on a, avec convergence absolue

$$M_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{kt} = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}.$$

(b) Si X ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{x_1, \dots, x_n\}$, l'affaire est entendue : la fonction génératrice des moments de X est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ avec

$$M_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{tx_k} \mathrm{P}(X = x_k)$$

et après permutation des sommes

$$M_X(t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{k=1}^{n} (x_k)^\ell \mathrm{P}(X = x_k) t^\ell = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \mathrm{E}(X^\ell) t^\ell.$$

Si X prend une infinité de valeurs, c'est plus technique...

Notons $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des valeurs de X. Pour $t \in \left]-a\,;a\right[$

$$M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{tx_n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

avec

$$u_n(t) = \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{tx_n}.$$

Par hypothèse, la série de fonctions convergence simplement sur $\left]-a\,;a\right[$.
Les fonctions u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec

$$u_n^{(k)}(t) = \mathrm{P}(X = x_n) x_n^k \mathrm{e}^{tx_n}.$$

Soit $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha\,;\alpha] \subset \left]-a\,;a\right[$.
Pour $t \in [-\alpha\,;\alpha]$, on peut écrire

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \le \mathrm{P}(X = x_n) \left|x_n^k\right| \mathrm{e}^{\alpha|x_n|}.$$

Introduisons $\rho \in \left]\alpha\,;a\right[$. On peut écrire

$$\mathrm{P}(X = x_n)|x_n|^k \mathrm{e}^{\alpha|x_n|} = |x_n|^k \mathrm{e}^{(\alpha-\rho)|x_n|} \times \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho|x_n|}.$$

D'une part, la fonction $t \mapsto t^k \mathrm{e}^{(\alpha-\rho)t}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ et de limite nulle en $+\infty$, elle est donc bornée ce qui permet d'introduire une constante M_k vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n|^k \mathrm{e}^{(\alpha-\rho)|x_n|} \le M_k.$$

D'autre part,

$$\mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho|x_n|} \le \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho x_n} + \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{-\rho x_n}.$$

En vertu de la convergence en $\pm\rho$ de la série définissant $M_X(t)$, on peut assurer la convergence de la série positive

$$\sum \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho|x_n|}.$$

La majoration uniforme

$$\left|u_n^{(k)}(t)\right| \le M_k \mathrm{P}(X = x_n) \mathrm{e}^{\rho|x_n|}$$

donne la convergence normale de $\sum u_n^{(k)}$ sur $[-\alpha\,;\alpha]$.
Via convergence uniforme sur tout segment, on peut conclure que M_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\left]-a\,;a\right[$.
De plus, on a pour tout ordre de dérivation k et avec sommabilité la relation

$$M_X^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^k \mathrm{P}(X = x_n) = \mathrm{E}(X^k).$$

Diffusion autorisée à titre entièrement gratuit uniquement - dD

Exercice 47 : [énoncé]
Posons
$$X = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$
Par linéarité de l'espérance
$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i.$$
Les variables étant deux à deux indépendantes
$$\mathrm{V}(X) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{V}(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} p_i(1-p_i) \le \frac{1}{4n}$$
car $x(1-x) \le 1/4$ pour tout $x \in [0\,;1]$.
En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on écrit
$$\mathrm{P}\Big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \ge \varepsilon\Big) \le \frac{\mathrm{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$
En passant au complémentaire, on obtient
$$\mathrm{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$
ce qui permet de conclure.

Exercice 48 : [énoncé]

(a) On sait $\mathrm{E}(S_n) = nx$ et $\mathrm{V}(S_n) = nx(1-x)$. On en déduit
$$\mathrm{E}(X_n) = x \text{ et } \mathrm{V}(X_n) = \frac{x(1-x)}{n}.$$
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer
$$\mathrm{P}\Big(\big|X_n - \mathrm{E}(X_n)\big| > \alpha\Big) \le \frac{\mathrm{V}(X_n)}{\alpha^2}.$$
On en déduit
$$\mathrm{P}\big(|X_n - x| > \alpha\big) \le \frac{x(1-x)}{n\alpha^2} \le \frac{1}{4n\alpha^2}$$
car $x(1-x) \le 1/4$ pour tout $x \in [0\,;1]$.

(b) Sachant que les valeurs prises par X_n figurent parmi les k/n avec $k \in [\![0\,;n]\!]$, la formule de transfert donne
$$\mathrm{E}(Y_n) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\mathrm{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) \text{ avec } \mathrm{P}\left(X_n = \frac{k}{n}\right) = \mathrm{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$
Ainsi
$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k(1-x)^{n-k}.$$
La fonction $x \mapsto B_n(f)(x)$ est bien une fonction polynôme.

(c) Sachant
$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \le \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \big|f(x)\big| \le 2M$$
on obtient
$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \le 2M\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha}\mathrm{P}(X_n = k/n) = 2MP\big(|X_n - x$$
et donc
$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \le \frac{M}{2n\alpha^2}.$$
Aussi, lorsque $|k/n - x| \le \alpha$, on a
$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \le \varepsilon$$
et donc
$$\left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| \le \varepsilon\sum_{|\frac{k}{n}-x|\le\alpha}\mathrm{P}(X_n = k/n) \le \varepsilon.$$

(d) Pour n assez grand, on a $M/2n\alpha^2 \le \varepsilon$ et alors
$$\big|B_n(f)(x) - f(x)\big| \le \left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|\le\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right)\mathrm{P}(X_n = k/n)\right| + \left|\sum_{|\frac{k}{n}-x|>\alpha}\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x\right.$$

Exercice 49 : [énoncé]

(a)
```
import random as rnd
import math

def S(n,p):
    R = 0
    for k in range(n+1):
        if rnd.random() < p: R = R + 1
    return R/n

import matplotlib.pyplot as plt

def test(n,p):
    Lk = range(1,n)
    LS = [S(k,p) for k in Lk]
    Linf = [p - math.sqrt(math.log(k)/k) for k in Lk]
    Lsup = [p + math.sqrt(math.log(k)/k) for k in Lk]
    plt.clf()
    plt.plot(Lk,LS)
    plt.plot(Lk,Linf)
    plt.plot(Lk,Lsup)
```
On remarque que la courbe expérimentale est plutôt bien encadrée.

(b) On a
$$tx = (1-\lambda)\times(-t) + \lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{2}(1+x) \in [0\,;1].$$
La convexité de la fonction exponentielle produit alors le résultat voulu.

(c) La variable aléatoire X est bornée donc aussi $\exp(tX)$ qui est alors d'espérence finie. L'inégalité au-dessus permet d'écrire la comparaison
$$\exp(tX) \le \frac{1}{2}(1-X)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)\mathrm{e}^{t}.$$
Par croissance et linéarité de l'espérance, il vient
$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \le \frac{1}{2}\big(1-\mathrm{E}(X)\big)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\big(1+\mathrm{E}(X)\big)\mathrm{e}^{t}.$$
Enfin, la nullité de l'espérance de X permet de conclure
$$\mathrm{E}\big(\exp(tX)\big) \le \operatorname{ch} t.$$
En développant en série entière $\operatorname{ch} t$ et $\exp(t^2/2)$, on remarque
$\operatorname{ch} t \le \exp(t^2/2)$ car on peut comparer les termes sommés respectifs.

(d) On écrit $X_i = a_iY_i$ avec $\mathrm{E}(Y_i) = 0$ et $|Y_i| \le 1$ et alors
$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) = \mathrm{E}\left(\prod_{i=1}^{n}\exp(ta_iY_i)\right).$$
Par indépendance et l'inégalité précédente
$$\mathrm{E}\big(\exp(tS)\big) = \prod_{i=1}^{n}\mathrm{E}\big(\exp(ta_iY_i)\big) \le \prod_{i=1}^{n}\exp\left(\frac{1}{2}t^2a_i^2\right) = \exp\left(\frac{t^2}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right).$$
Par l'inégalité de Markov
$$\mathrm{P}(S_n > \varepsilon) = \mathrm{P}\big(\exp(tS_n) > \exp(t\varepsilon)\big) \le \exp(-t\varepsilon)\mathrm{E}\big(\exp(tS_n)\big)$$
ce qui donne l'inégalité voulue.

(e) On prend
$$t = \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}.$$

(f) S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes. En centrant celle-ci, on peut (avec largesse) prendre $a_i = 1$ et alors
$$\mathrm{P}(S_n - p > \varepsilon) \le \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{2n}\right).$$
Avec $\varepsilon = \sqrt{(\ln n)/n}$, on obtient
$$\mathrm{P}\left(S_n > p + \sqrt{\frac{\ln n}{n}}\right) \le \exp\left(-\frac{\ln n}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
Par passage à l'opposé de S_n, on obtient l'autre inégalité.

Exercice 50 : [énoncé]

(a) On pose $\lambda = (1+x)/2 \in [0\,;1]$ et la convexité de l'exponentielle donne
$$\mathrm{e}^{(1-\lambda)(-t)+\lambda t} \le (1-\lambda)\mathrm{e}^{-t} + \lambda\mathrm{e}^{t}$$
ce qui produit la comparaison voulue.

(b) La variable X est bornée et donc $Y = \mathrm{e}^{tx}$ l'est aussi et par conséquent admet une espérance. Par ce qui précède, on a la comparaison
$$Y \le \frac{1}{2}(1-X)\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}(1+X)\mathrm{e}^{t}.$$

Par croissance de l'espérance et nullité de l'espérance de X

$$\mathrm{E}(Y) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t} = \mathrm{ch}(t).$$

Par développement en série entière et en employant $(2n)! \geq 2^n n!$, on obtient

$$\mathrm{ch}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = \mathrm{e}^{t^2/2}.$$

(c) Par l'inégalité de Markov, on a pour tout $t > 0$,

$$\mathrm{P}(X > r) = \mathrm{P}\big(\mathrm{e}^{tX} > \mathrm{e}^{tr}\big) \leq \mathrm{e}^{-tr}\mathrm{E}\big(\mathrm{e}^{tX}\big) \leq \mathrm{e}^{-tr+t^2/2}.$$

Pour $t = r$, il vient

$$\mathrm{P}(X > r) \leq \mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

En considérant $X' = -X$, on obtient

$$\mathrm{P}(X < -r) \leq \mathrm{e}^{-r^2/2}$$

et on conclut

$$\mathrm{P}\big(|X| > r\big) \leq 2\mathrm{e}^{-r^2/2}.$$

Exercice 51 : [énoncé]
Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

$$\mathrm{P}\big(\big|X - \mathrm{E}(X)\big| \geq \alpha\sigma\big) < \frac{\sigma^2}{(\alpha\sigma^2)} = \frac{1}{\alpha^2}.$$

On conclut par considération d'évènement complémentaire.