Espaces vectoriels

Structure d'espace vectoriel

Exercice 1 [01680] [Correction]
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

et de la multiplication externe par les complexes définie par

$$(a + \mathrm{i}b).(x, y) = (a.x - b.y, a.y + b.x).$$

Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
Celui-ci est appelé complexifié de E.

Sous espaces vectoriels

Exercice 2 [01681] [Correction]
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

(a) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}$
(b) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$
(c) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\right\}$
(d) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\right\}$
(e) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\right\}$
(f) $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\right\}$

Exercice 3 [01682] [Correction]
Soient $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\right\}$ et $G = \left\{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}$.
(a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
(b) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 4 [01683] [Correction]
Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

(a) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\right\}$
(b) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\right\}$
(c) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\right\}$
(d) $\left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ arithmétique}\right\}$

Exercice 5 [01684] [Correction]
Soit $F = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = nu_{n+1} + u_n\right\}$.
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6 [01685] [Correction]
Les parties de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels ?

(a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est monotone}\}$
(b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule en } 0\}$
(c) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ s'annule}\}$
(d) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ est impaire}\}$.

Exercice 7 [01686] [Correction]
Montrer que les parties de $\mathcal{F}([a\,;b], \mathbb{R})$ suivantes sont des sous-espaces vectoriels :
(a) $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1([a\,;b], \mathbb{R}) \mid f'(a) = f'(b)\right\}$
(b) $G = \left\{f \in \mathcal{C}^0([a\,;b], \mathbb{R}) \;\middle|\; \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$

Exercice 8 [01687] [Correction]
Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note $\omega.\mathbb{R} = \{\omega x \mid x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que $\omega.\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
À quelle condition $\omega.\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}$ vu comme $\mathbb{C}$-espace vectoriel ?

Exercice 9 [01688] [Correction]
Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que l'ensemble $F = \{\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$ est un sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.

Exercice 10 [01689] [Correction]
Soient $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions de E croissantes et

$$\Delta = \{f - g \mid f, g \in \mathcal{C}\}.$$

Montrer que Δ est un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 11 [01690] [Correction]
Démontrer que le sous-ensemble constitué des suites réelles périodiques est un sous-espace vectoriel d'une structure que l'on précisera.

Opérations sur les sous-espaces vectoriels

Exercice 12 [01691] [Correction]
Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer

$$F \cap G = F + G \iff F = G.$$

Exercice 13 [00160] [Correction]
Soient F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Comparer :

(a) $F \cap (G + H)$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

(b) $F + (G \cap H)$ et $(F + G) \cap (F + H)$.

Exercice 14 [00161] [Correction]
À quelle condition la réunion de deux sous-espaces vectoriels est-elle est un sous-espace vectoriel ?

Exercice 15 [01694] [Correction]
Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Montrer que

$$F \subset G \implies F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H).$$

Exercice 16 [01695] [Correction]
Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \cap G = F' \cap G'$.
Montrer que

$$(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F.$$

Espaces engendrés par une partie

Exercice 17 [01696] [Correction]
Comparer $\mathrm{Vect}(A \cap B)$ et $\mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$.

Exercice 18 [01625] [Correction]
On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$

$$u = (1, 1, 1) \text{ et } v = (1, 0, -1).$$

Montrer

$$\mathrm{Vect}(u, v) = \left\{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 19 [01626] [Correction]
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $x = (1, -1, 1)$ et $y = (0, 1, a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $u = (1, 1, 2)$ appartienne à $\mathrm{Vect}(x, y)$. Comparer alors $\mathrm{Vect}(x, y)$, $\mathrm{Vect}(x, u)$ et $\mathrm{Vect}(y, u)$.

Espaces supplémentaires

Exercice 20 [01698] [Correction]
Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$ et $G = \left\{x \mapsto ax + b \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 21 [01699] [Correction]
Soient $F = \left\{f \in \mathcal{C}([-1\,;1], \mathbb{C}) \;\middle|\; \int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}$ et
$G = \left\{f \in \mathcal{C}([-1\,;1], \mathbb{C}) \mid f \text{ constante}\right\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1\,;1], \mathbb{C})$.

Exercice 22 [01700] [Correction]
Soient

$$H = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\right\}$$

et $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{K}^n$.
Montrer que H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 23 [01701] [Correction]
Dans l'espace $E = \mathcal{C}([0\,;\pi],\mathbb{R})$ on considère les parties

$$F = \left\{f \in E \mid f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)\right\} \text{ et } G = \mathrm{Vect}(\sin,\cos).$$

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice 24 [01702] [Correction]
Soit $F = \left\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) + f(1) = 0\right\}$.

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel.

(b) Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Familles de vecteurs

Exercice 25 [01627] [Correction]
Les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ?
Si ce n'est pas le cas, former une relation linéaire liant ces vecteurs :

(a) (x_1, x_2) avec $x_1 = (1,0,1)$ et $x_2 = (1,2,2)$

(b) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,0,0)$, $x_2 = (1,1,0)$ et $x_3 = (1,1,1)$

(c) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,2,1)$, $x_2 = (2,1,-1)$ et $x_3 = (1,-1,-2)$

(d) (x_1, x_2, x_3) avec $x_1 = (1,-1,1)$, $x_2 = (2,-1,3)$ et $x_3 = (-1,1,-1)$.

Exercice 26 [01628] [Correction]
On pose $f_1, f_2, f_3, f_4 \colon [0\,;2\pi] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :
$f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x\cos x$, $f_3(x) = \sin x$ et $f_4(x) = x\sin x$.
Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est libre.

Exercice 27 [01629] [Correction]
Pour tout entier $0 \le k \le n$, on pose $f_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(x) = \mathrm{e}^{k.x}$.
Montrer que la famille $(f_k)_{0 \le k \le n}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 28 [01632] [Correction]
Soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ une famille libre de vecteurs de E et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.
On pose

$$\vec{u} = \alpha_1.\vec{x}_1 + \dots + \alpha_n.\vec{x}_n \text{ et } \forall 1 \le i \le n, \vec{y}_i = \vec{x}_i + \vec{u}.$$

À quelle condition sur les α_i, la famille $(\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n)$ est-elle libre ?

Exercice 29 [01633] [Correction]
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)$, la famille $(e_1 + a, \dots, e_p + a)$ est libre.

Exercice 30 [02464] [Correction]
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Les fonctions $x \mapsto \sin(x + a)$, $x \mapsto \sin(x + b)$ et $x \mapsto \sin(x + c)$ sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 31 [00167] [Correction]
Pour $a \in \mathbb{R}$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f_a(x) = |x - a|$.
Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre d'éléments de l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$

Exercice 32 [00169] [Correction]
Pour $a \in \mathbb{R}_+$, on note f_a l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$f_a(t) = \cos(at).$$

Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}_+}$ est une famille libre d'éléments de l'espace de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 33 [00171] [Correction]
Soit E l'ensemble des applications $f \colon [-1\,;1] \to \mathbb{R}$ continues telles que les restrictions $f|_{[-1;0]}$ et $f|_{[0;1]}$ soient affines.

(a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(b) Donner une base de E.

Somme d'un nombre fini de sous-espaces

Exercice 34 [00190] [Correction]
Soient F, G, F', G' des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E vérifiant

$$F \oplus G = F' \oplus G' = E \text{ et } F' \subset G.$$

Montrer

$$F \oplus F' \oplus (G \cap G') = E.$$

Exercice 35 [00217] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, on note

$$F_i = \left\{P \in E \,\middle|\, \forall j \in [\![0\,;n]\!] \setminus \{i\}\,, P(j) = 0\right\}.$$

Montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels et que

$$E = F_0 \oplus \cdots \oplus F_n.$$

Exercice 36 [00220] [Correction]
Pour $d \in \mathbb{N}$, notons H_d l'ensemble formé des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ homogènes de degré d *i.e.* pouvant s'écrire comme combinaison linéaire de fonction monôme de degré d.
Montrer que $(H_d)_{0 \le d \le n}$ est une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

Exercice 37 [00222] [Correction]
Soient $E_1, \dots, E_n$ et $F_1, \dots, F_n$ sous-espaces vectoriels de E tel que $E_i \subset F_i$ et

$$\underset{i=1}{\overset{n}{\oplus}} E_i = \underset{i=1}{\overset{n}{\oplus}} F_i.$$

Montrer que $E_i = F_i$.

Sous espaces affines

Exercice 38 [01727] [Correction]
À quelle condition simple le sous-espace affine $V = \vec{a} + F$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Exercice 39 [01728] [Correction]
Soient $V = \vec{a} + F$ et $W = \vec{b} + G$ deux sous-espaces affines d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.
Montrer que

$$V \cap W \neq \emptyset \iff \vec{b} - \vec{a} \in F + G.$$

L'espace des polynômes

Exercice 40 [02146] [Correction]
Soient $P_1 = X^2 + 1$, $P_2 = X^2 + X - 1$ et $P_3 = X^2 + X$.
Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 41 [02147] [Correction]
Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on pose $P_k = (X+1)^{k+1} - X^{k+1}$.
Montrer que la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 42 [02150] [Correction]
Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère F la partie de E constituée des applications de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x \text{ avec } P, Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

(a) Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
(b) Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Exercice 43 [02151] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $A \in \mathbb{K}_n[X]$ un polynôme non nul.
Montrer que $F = \left\{P \in \mathbb{K}_n[X] \,\middle|\, A \mid P\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$ et en déterminer la dimension et un supplémentaire.

Exercice 44 [02665] [Correction]
Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qu'il existe un unique $P_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $P_n(0) = 0$ et $P_n(X+1) - P_n(X) = X^n$.

Exercice 45 [01761] [Correction]
(a) Montrer que la famille $(X+k)^n$ pour $k \in \{0, \dots, n\}$ constitue une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
(b) Redémontrer la formule donnant l'expression du déterminant de Vandermonde

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Il est aisé de constater que l'addition sur $E \times E$ est commutative, associative, possède un neutre $(0_E, 0_E)$ et que tout élément est symétrisable dans $(E \times E, +)$, le symétrique de (x, y) étant $(-x, -y)$.
Ainsi $(E \times E, +)$ est un groupe abélien.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $u, v \in E \times E$. On peut écrire $\lambda = a + \mathrm{i}b$, $\mu = a' + \mathrm{i}b'$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$ et $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ avec $x, y, x', y' \in E$. On a

$$\begin{aligned}\lambda.(u+v) &= (a+\mathrm{i}b).(x+x', y+y') \\ &= (ax+ax'-by-by', ay+ay'+bx+bx') = \lambda.u + \lambda.v.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu).u &= ((a+a')+\mathrm{i}(b+b')).(x,y) \\ &= (ax+a'x-by-b'y, ay+a'y+bx+b'x) = \lambda.u + \mu.u.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda.(\mu.u) &= (a+\mathrm{i}b)(a'x-b'y, a'y+b'x) \\ &= ((aa'-bb')x-(ab'+a'b)y, (aa'-bb')y+(ab'+a'b)x) \\ &= (\lambda\mu).u\end{aligned}$$

et

$$1.u = u.$$

On peut donc conclure que $(E \times E, +, .)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) non : pas stable par multiplication scalaire : $(0,1)$ appartient mais pas $-(0,1)$
(b) non : pas stable par addition : $(1,0)+(0,1)$
(c) oui
(d) non : ne passe pas par $(0,0)$.
(e) non : pas stable par addition : $(1,1)+(1,-1)$
(f) oui (c'est l'espace nul !)

Exercice 3 : [énoncé]

(a) $F \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{o} = (0,0,0) \in F$ car $0+0-0=0$ et pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in F$, on peut écrire $\vec{u} = (x,y,z)$ et $\vec{v} = (x',y',z')$ avec $x+y-z=0$ et $x'+y'-z'=0$.
On a alors $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$ avec
$(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')-(\lambda z+\mu z') = \lambda(x+y-z)+\mu(x'+y'-z') = 0$ donc $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in F$.
$G \subset \mathbb{R}^3$, $\vec{o} = (0,0,0) \in G$ car $(0,0,0) = (a-b, a+b, a-3b)$ pour $a=b=0$.
Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\vec{u}, \vec{v} \in G$, on peut écrire $\vec{u} = (a-b, a+b, a-3b)$ et $\vec{v} = (a'-b', a'+b', a'-3b')$ avec $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. On a alors
$\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} = \ldots = (a''-b'', a''+b'', a''-3b'')$ avec $a'' = \lambda a+\mu a'$ et $b'' = \lambda b+\mu b'$ donc $\lambda\vec{u}+\mu\vec{v} \in G$. Finalement F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(b) $\vec{u} = (x,y,z) \in F \cap G$ si, et seulement s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x = a-b \\ y = a+b \\ z = a-3b \\ x+y-z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = a-b \\ y = a+b \\ z = a-3b \\ a+3b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -4b \\ y = -2b \\ z = -6b \\ a = -3b. \end{cases}$$

Ainsi $F \cap G = \left\{(-4b, -2b, -6b) \mid b \in \mathbb{R}\right\} = \left\{(2c, c, 3c) \mid c \in \mathbb{R}\right\}$.

Exercice 4 : [énoncé]

(a) oui
(b) non
(c) oui
(d) oui.

Exercice 5 : [énoncé]
$F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $0 = (0)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ car $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = n.0 + 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $(u_n), (v_n) \in F$. On a

$$\lambda(u_n) + \mu(v_n) = (\lambda u_n + \mu v_n)$$

avec pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda u_{n+2} + \mu v_{n+2} = \lambda(nu_{n+1}+u_n) + \mu(nv_{n+1}+v_n) = n(\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}) + \lambda u_n + \mu v_n$$

donc $\lambda(u_n) + \mu(v_n) \in F$.
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) non

(b) oui

(c) non

(d) oui.

Exercice 7 : [énoncé]

(a) $F \subset \mathcal{F}([a\,;b], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(b) = \lambda f'(b) + \mu g'(b) = (\lambda f + \mu g)'(b)$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.

(b) $G \subset \mathcal{F}([a\,;b], \mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in G$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur $[a\,;b]$ et

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$.

Exercice 8 : [énoncé]

$\omega\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $0 \in \omega\mathbb{R}$ car $0 = \omega \times 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in \omega.\mathbb{R}$ on peut écrire $z = \omega x$ et $z' = \omega x'$ avec $x, x' \in \mathbb{R}$ et on a $(\lambda z + \mu z') = \omega(\lambda.x + \mu x')$ avec $\lambda x + \mu x' \in \mathbb{R}$ donc $\lambda z + \mu z' \in \omega\mathbb{R}$.
Ainsi $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
Si $\omega\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ alors puisque $\omega = \omega \times 1 \in \omega\mathbb{R}$ et $i \in \mathbb{C}$, on a $i.\omega \in \omega\mathbb{R}$. Cela n'est possible que si $\omega = 0$.
Inversement, si $\omega = 0$ alors $\omega\mathbb{R} = \{0\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Exercice 9 : [énoncé]

$F \subset E$ et $0_E \in F$ car

$$0_E = 0.u_1 + \dots + 0.u_n.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ et $x, y \in F$. On peut écrire

$$x = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u \text{ et } y = \mu_1 u_1 + \dots + \mu_n u_n$$

avec $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{K}$. On a alors

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\lambda_1 + \beta\mu_1)u_1 + \dots + (\alpha\lambda_n + \beta\mu_n)u_n$$

avec $\alpha\lambda_i + \beta\mu_i \in \mathbb{K}$ donc $\alpha x + \beta y \in F$. Ainsi F est un sous-espace vectoriel de E.
De plus

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}\,, u_i = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$$

avec

$$\lambda_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi $u_i \in F$.

Exercice 10 : [énoncé]

$\Delta \subset E$. $0 = 0 - 0$ avec $0 \in \mathcal{C}$ donc $0 \in \Delta$.
Soient $h, h' \in \Delta$. On peut écrire $h = f - g$ et $h' = f' - g'$ avec $f, g, f', g' \in \mathcal{C}$. On a alors $h + h' = (f + f') - (g + g')$ avec $(f + f'), (g + g') \in \mathcal{C}$.
Soit $h \in \Delta$. On peut écrire $h = f - g$ avec $f, g \in \mathcal{C}$.
$\forall \lambda \geq 0$, on a $\lambda h = \lambda f - \lambda g$ avec $\lambda f, \lambda g \in \mathcal{C}$.
$\forall \lambda < 0$, on a $\lambda h = (-\lambda)g - (-\lambda f)$ avec $(-\lambda)g, (-\lambda)f \in \mathcal{C}$.
Dans les deux cas $\lambda h \in \Delta$.

Exercice 11 : [énoncé]

Montrons que l'ensemble F étudié est un sous-espace vectoriel de l'ensemble E des suites réelles.
Assurément $F \subset E$. La suite nulle est périodique donc $0 \in F$. Pour $u, v \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on peut affirmer que $\lambda u + \mu v$ est TT'-périodique (et même $\operatorname{ppcm}(T, T')$-périodique) en notant T et T' des périodes non nulles de u et v.
Ainsi, $\lambda u + \mu v \in F$.

Exercice 12 : [énoncé]

$(\Longleftarrow)$ ok
$(\Longrightarrow)$ Supposons $F \cap G = F + G$. $F \subset F + G = F \cap G \subset G$ et de même $G \subset F$ et $F = G$.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) Soit $x \in (F \cap G) + (F \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F \cap G$ et $v \in F \cap H$.
Comme $u, v \in F$ on a $x \in F$ et comme $u \in G$ et $v \in H$ on a $u + v \in G + H$.
Par suite $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$.
L'égalité n'est pas possible, prendre F, G, H trois droites distinctes d'un même plan.

(b) Soit $x \in F + (G \cap H)$, on peut écrire $x = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G \cap H$.
Comme $u \in F$ et $v \in G$ on a $x \in F + G$ et de même $x \in F + H$ donc $x \in (F + G) \cap (F + H)$.
L'égalité n'est pas possible, prendre à nouveau trois droites distinctes d'un même plan.

Exercice 14 : [énoncé]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
Si $F \subset G$ ou $G \subset F$ alors $F \cup G$ vaut F ou G et est évidemment un sous-espace vectoriel de E.
Inversement, supposons que $F \cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E et $F \not\subset G$. Il existe $x \in F$ tel que $x \notin G$. Pour tout $y \in G$, $x + y \in F \cup G$ par stabilité du sous-espace vectoriel $F \cup G$. Si $x + y \in G$ alors $x = (x + y) - y \in G$ ce qui est exclu. Il reste $x + y \in F$ et alors $y = (x + y) - x \in F$. Ainsi $G \subset F$.

Exercice 15 : [énoncé]
$F + (G \cap H) \subset F + G$ et $F + (G \cap H) \subset F + H$ donc $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$.
Supposons de plus $F \subset G$.
Soit $\vec{x} \in (F + G) \cap (F + H)$. On a $\vec{x} \in F + G = G$ et $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in H$.
$\vec{v} = \vec{x} - \vec{u} \in G$ donc $\vec{v} \in G \cap H$ puis $x \in F + (G \cap H)$.

Exercice 16 : [énoncé]
$\supset$: ok
Soit $\vec{x} \in (F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G'))$.
On peut écrire $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G \cap F'$ et $\vec{x} = \vec{u}' + \vec{v}'$ avec $\vec{u}' \in F$ et $\vec{v}' \in G \cap G'$.
$\vec{u} - \vec{u}' = \vec{v}' - \vec{v} \in F \cap G = F' \cap G'$. $\vec{v} = -(\vec{v}' - \vec{v}) + \vec{v}' \in G'$ donc $\vec{v} \in G \cap F' \cap G' = F \cap G \subset F$ puis $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \in F$. Ainsi $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) \subset F$ puis l'égalité

Exercice 17 : [énoncé]
$A \cap B \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ et $\text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B)$ est un sous-espace vectoriel donc

$$\text{Vect}(A \cap B) \subset \text{Vect}(A) \cap \text{Vect}(B).$$

L'inclusion réciproque n'est pas vraie : prendre $A = \{u\}$ et $B = \{2u\}$ avec $u \neq 0_E$

Exercice 18 : [énoncé]
On peut écrire

$$\left\{(2\alpha, \alpha + \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}(x, y)$$

avec $x = (2, 1, 0)$ et $y = (0, 1, 2)$.
On a $u = \frac{1}{2}(x + y)$ et $v = \frac{1}{2}(x - y)$ donc $u, v \in \text{Vect}(x, y)$ puis $\text{Vect}(u, v) \subset \text{Vect}(x, y)$.
Aussi $x = u + v$ et $y = u - v$ donc $x, y \in \text{Vect}(u, v)$ puis $\text{Vect}(x, y) \subset \text{Vect}(u, v)$.
Par double inclusion l'égalité.

Exercice 19 : [énoncé]
On a

$$u = \lambda x + \mu y \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda + \mu = 1 \\ \lambda + a\mu = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 2 \\ a = 1/2. \end{cases}$$

Ainsi

$$u \in \text{Vect}(x, y) \iff a = 1/2$$

et alors $u = x + 2y$.
$x, u \in \text{Vect}(x, y)$ donc $\text{Vect}(x, u) \subset \text{Vect}(x, y)$.
$x, y \in \text{Vect}(y, u)$ donc $\text{Vect}(x, y) \subset \text{Vect}(y, u)$.
$y, u \in \text{Vect}(x, u)$ donc $\text{Vect}(y, u) \subset \text{Vect}(x, u)$.
Finalement les trois espaces sont égaux.

Exercice 20 : [énoncé]
$F \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\tilde{o} \in F$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in F$,

$$(\lambda f + \mu g)(0) = \lambda f(0) + \mu g(0) = 0$$

et

$$(\lambda f + \mu g)'(0) = \lambda f'(0) + \mu g'(0) = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.

$G \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $\tilde{o} \in G$ (en prenant $a = b = 0$).
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $f, g \in G$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax + b \text{ et } g(x) = cx + d$$

et on a alors

$$(\lambda f + \mu g)(x) = ex + f$$

avec

$$e = \lambda a + \mu c \in \mathbb{R} \text{ et } f = \lambda b + \mu d \in \mathbb{R}$$

donc $\lambda f + \mu g \in G$.
Soit $h \in F \cap G$. Il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = ax + b$$

car $h \in G$. Or $h \in F$ donc $h(0) = b = 0$ et $h'(0) = a = 0$ puis $h(x) = 0$ *i.e.* $h = \tilde{o}$.
Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{0}\}.$$

Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Posons $a = h'(0) \in \mathbb{R}$, $b = h(0)$, $g\colon x \mapsto ax + b$ et $f = h - g$.
Clairement $g \in G$ et $h = f + g$.
De plus $f(0) = h(0) - b = 0$ et $f'(0) = h'(0) - a = 0$ donc $f \in F$.
Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Finalement, F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 21 : [énoncé]
$F \subset \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{C})$ et $\tilde{0} \in F$ car $\int_{-1}^1 0\,\mathrm{d}t = 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f, g \in F$, on a

$$\int_{-1}^1 (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^1 g(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

donc $\lambda f + \mu g \in F$.
$G \subset \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{R})$ et $\tilde{0} \in G$ car c'est une fonction constante.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et $f, g \in G$. On a $\lambda f + \mu g \in G$ car il est clair que c'est une fonction constante.
Soit $h \in F \cap G$. On a h constante car $h \in G$. Posons C la valeur de cette constante.
Puisque $h \in F$, on a

$$\int_{-1}^1 h(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 C\,\mathrm{d}t = 2C = 0$$

et donc $h = \tilde{0}$. Ainsi

$$F \cap G = \{\tilde{0}\}.$$

Soit $h \in \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{C})$. Posons $C = \int_{-1}^1 h(t)\,\mathrm{d}t$, g la fonction constante égale à $\frac{1}{2}C$ et $f = h - g$.
Clairement $g \in G$ et $f + g = h$. De plus $\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 h(t)\,\mathrm{d}t - C = 0$ donc $f \in F$.
Ainsi

$$F + G = \mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{C}).$$

Finalement F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}([-1\,;1],\mathbb{C})$.

Exercice 22 : [énoncé]
$H \subset \mathbb{K}^n$, $\vec{0} = (0, \dots, 0) \in H$ car $0 + \dots + 0 = 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in H$, $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in H$. On a

$$\lambda x + \mu \vec{y} = (\lambda x_1 + \mu y_1, \dots, \lambda x_n + \mu y_n)$$

avec

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + \mu(y_1 + \dots + y_n) = 0$$

donc $\lambda x + \mu \vec{y} \in H$.
$\mathrm{Vect}(u) = \mathbb{K}u$ est un sous-espace vectoriel.
Soit $v \in H \cap \mathrm{Vect}(u)$. On peut écrire $v = \lambda u = (\lambda, \dots, \lambda)$ car $v \in \mathrm{Vect}(u)$.
Or $v \in H$ donc $\lambda + \dots + \lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et donc $v = 0$. Ainsi

$$H \cap \mathrm{Vect}(u) = \{0\}.$$

Soit $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{K}^n$. Posons $\lambda = \frac{1}{n}(v_1 + \dots + v_n)$, $\vec{y} = \lambda u$ et $x = v - \vec{y}$.
Clairement $x + \vec{y} = v$, $\vec{y} \in \mathrm{Vect}(u)$. De plus $x = (x_1, \dots, x_n)$ avec

$$x_1 + \dots + x_n = (v_1 - \lambda) + \dots + (v_n - \lambda) = (v_1 + \dots + v_n) - n\lambda = 0$$

donc $x \in H$. Ainsi

$$H + \mathrm{Vect}(u) = \mathbb{K}^n.$$

Finalement, H et $\mathrm{Vect}(u)$ sont supplémentaires dans $\mathbb{K}^n$.

Exercice 23 : [énoncé]
F et G sont clairement des sous-espaces vectoriels de E.
Soit $f \in F \cap G$. On peut écrire $f = \lambda.\sin + \mu.\cos$.
De plus $f(0) = f(\pi/2) = f(\pi)$ donne : $\mu = \lambda = -\mu$ d'où $\lambda = \mu = 0$ puis $f = 0$.

Soit $f \in E$. Posons $\lambda = \frac{2f(\pi/2)-f(0)-f(\pi)}{2}$, $\mu = \frac{f(0)-f(\pi)}{2}$, $h = \lambda \sin + \mu \cos$ et $g = f - h$.
On a $f = g + h$ avec $g \in F$ et $h \in G$.
Ainsi F et G sont supplémentaires dans E.

Exercice 24 : [énoncé]

(a) sans peine

(b) L'ensemble des fonctions constantes convient.

Exercice 25 : [énoncé]

(a) oui b) oui c) non $x_3 = x_2 - x_1$ d) non $x_3 = -x_1$.

Exercice 26 : [énoncé]
Supposons
$$af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0.$$
On a
$$\forall x \in [0\,;2\pi], (a+bx)\cos x + (c+dx)\sin x = 0.$$
Pour $x = 0$ et $x = \pi$ on obtient le système :
$$\begin{cases} a = 0 \\ a + b\pi = 0 \end{cases}$$
d'où $a = b = 0$.
Pour $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{3\pi}{2}$ on obtient le système
$$\begin{cases} c + d\pi/2 = 0 \\ c + 3d\pi/2 = 0 \end{cases}$$
d'où $c = d = 0$.
Finalement ; la famille étudiée est libre.

Exercice 27 : [énoncé]
Supposons $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n = 0$.
On a
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_0 + \lambda_1 \mathrm{e}^x + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0.$$
Quand $x \to -\infty$, en passant la relation ci-dessus à la limite, on obtient $\lambda_0 = 0$.
On a alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda_1 \mathrm{e}^x + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{nx} = 0$$
donc
$$\lambda_1 + \lambda_2 \mathrm{e}^x + \cdots + \lambda_n \mathrm{e}^{(n-1)x} = 0.$$
En reprenant la démarche ci-dessus, on obtient $\lambda_1 = 0$, puis de même $\lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exercice 28 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1 \vec{y}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{y}_n = \vec{0}$. On a
$$(\lambda_1 + \alpha_1(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)).\vec{x}_1 + \cdots + (\lambda_n + \alpha_n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)).\vec{x}_n = \vec{0}$$
donc
$$\begin{cases} (\lambda_1 + \alpha_1(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)) = 0 \\ \vdots \\ (\lambda_n + \alpha_n(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)) = 0. \end{cases}$$
En sommant les équations on obtient :
$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)(1 + (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)) = 0.$$
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq -1$ alors $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 0$ puis, par le système, $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.
Si $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -1$ alors $\alpha_1 \vec{y}_1 + \cdots + \alpha_n \vec{y}_n = \vec{0}$.
Finalement, la famille $(\vec{y}_1, \ldots, \vec{y}_n)$ est libre si, et seulement si,
$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq -1.$$

Exercice 29 : [énoncé]
Supposons
$$\lambda_1(e_1 + a) + \cdots + \lambda_p(e_p + a) = 0_E.$$
On a $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_p).a$.
Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p \neq 0$ alors
$$a = -\frac{\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p}{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p} \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p).$$
C'est exclu.
Si $\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = 0$ alors $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E$ puis $\lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$.

Exercice 30 : [énoncé]
Non car ces trois fonctions sont combinaisons linéaires des deux suivantes

$$x \mapsto \sin x \text{ et } x \mapsto \cos x.$$

Exercice 31 : [énoncé]
Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels deux à deux distincts. Supposons $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n} = 0$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, si $\lambda_i \neq 0$ alors $\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_n f_{a_n}$ n'est pas dérivable en a_i alors que la fonction nulle l'est.
Nécessairement $\lambda_i = 0$ et la famille étudiée est donc libre.

Exercice 32 : [énoncé]
Montrons que toute sous-famille finie à n éléments de $(f_a)_{a \in \mathbb{R}_+}$ est libre.
Par récurrence sur $n \geq 1$.
Pour $n = 1$: ok
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.
Soient $a_1, \dots, a_{n+1}$ des réels positifs distincts et supposons

$$\lambda_1 f_{a_1} + \dots + \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0 \quad (1)$$

En dérivant 2 fois cette relation :

$$a_1^2 \lambda_1 f_{a_1} + \dots + a_{n+1}^2 \lambda_{n+1} f_{a_{n+1}} = 0 \quad (2)$$

La combinaison $a_{n+1}^2(1) - (2)$ donne

$$\lambda_1(a_{n+1}^2 - a_1^2) f_{a_1} + \dots + \lambda_n(a_{n+1}^2 - a_n^2) f_{a_n} = 0.$$

Par hypothèse de récurrence et en exploitant que les a_i^2 sont deux à deux distincts, on obtient $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ puis ensuite aisément $\lambda_{n+1} = 0$. Récurrence établie.

Exercice 33 : [énoncé]

(a) E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}([-1\,;1], \mathbb{R})$.
(b) $x \mapsto 1$, $x \mapsto x$ et $x \mapsto |x|$ forment une base de E.

Exercice 34 : [énoncé]
Supposons $x + x' + y = 0$ avec $x \in F$, $x' \in F'$ et $y \in G \cap G'$.
Puisque $x' \in F' \subset G$ et $y \in G \cap G' \subset G$, on a $x' + y \in G$.
Or F et G sont en somme directe donc $x + (x' + y) = 0$ avec $x \in F$ et $x' + y \in G$ entraîne $x = 0$ et $x' + y = 0$.
Sachant $x' + y = 0$ avec $x \in F'$, $y \in G'$ et F', G' en somme directe, on a $x' = y = 0$.
Finalement $x = x' = y = 0$ et on peut affirmer que les espaces F, F' et $G \cap G'$ sont en somme directe.
Soit $a \in E$. Puisque $E = F \oplus G$, on peut écrire $a = x + b$ avec $x \in F$ et $b \in G$.
Sachant $E = F' \oplus G'$, on peut écrire $b = x' + y$ avec $x' \in F'$ et $y \in G'$.
Or $y = b - x'$ avec $b \in G$ et $x' \in F' \subset G$ donc $y \in G$ et ainsi $y \in G \cap G'$.
Finalement, on obtient $a = x + x' + y$ avec $x \in F$, $x' \in F'$ et $y \in G \cap G'$.
On peut conclure $E \subset F \oplus F' \oplus (G \cap G')$ puis $E = F \oplus F' \oplus (G \cap G')$.

Exercice 35 : [énoncé]
Les F_i sont clairement des sous-espaces vectoriels.
Supposons $P_0 + \dots + P_n = 0$ avec $P_i \in F_i$.
P_i possède par définition n racines et $(P_0 + \dots + P_n)(i) = 0$ donc $P_i(i) = 0$ ce qui fournit une $n+1$ème racine. Par suite $P_i = 0$ car $\deg P_i \leq n$.
Soit $P \in E$.
Analyse : Supposons $P = P_0 + \dots + P_n$ avec $P_i \in F_i$.
On a $P(i) = P_i(i)$ car $P_j(i) = 0$ pour $j \neq i$.
Par suite

$$P_i = P(i) \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{(X - j)}{(i - j)}.$$

Synthèse : Les P_i précédemment proposés conviennent car $P_i \in F_i$ par construction et $P = P_0 + \dots + P_n$ puisque $P - (P_0 + \dots + P_n)$ est le polynôme nul car de degré $\leq n$ et possédant au moins $n+1$ racines : $0, 1, \dots, n$.

Exercice 36 : [énoncé]
H_d est définit comme le sous-espace vectoriel engendré par les monômes de degré d, c'est donc un sous-espace vectoriel. Si $\sum_{k=0}^{n} P_k = 0$ avec $P_k \in H_k$ alors l'unicité de l'écriture d'un polynôme en somme de monôme permet de conclure $P_k = 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$. La famille $(H_d)_{0 \leq d \leq n}$ est donc bien une famille de sous-espaces vectoriels en somme directe.

Exercice 37 : [énoncé]
Soit $x \in F_i$.
Puisque a $x \in \oplus_{i=1}^{n} F_i = \oplus_{i=1}^{n} E_i$, on peut écrire $x = x_1 + \dots + x_n$ avec $x_i \in E_i$.

On a alors
$$x_1 + \cdots + (x_i - x) + \cdots + x_n = 0_E$$
avec $x_1 \in F_1, \ldots, x_i - x \in F_i, \ldots, x_n \in F_n$.
Or les espaces $F_1, \ldots, F_n$ sont en somme directe, donc les vecteurs précédents sont nuls et en particulier
$$x = x_i \in E_i.$$

Exercice 38 : [énoncé]
Si $\vec{a} \in F$ alors $V = \vec{a} + F = F$ est un sous-espace vectoriel.
Inversement, si V est un sous-espace vectoriel alors $\vec{o} \in V$ donc il existe $\vec{b} \in F$ tel que $\vec{o} = \vec{a} + \vec{b}$.
On a alors $\vec{a} = -\vec{b} \in F$. La condition cherchée et $\vec{a} \in F$.

Exercice 39 : [énoncé]
$(\Longrightarrow)$ Supposons $V \cap W \neq \emptyset$. Soit $\vec{x} \in V \cap W$. On peut écrire $\vec{x} = \vec{a} + \vec{u} = \vec{b} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$.
On a alors $\vec{b} - \vec{a} = \vec{u} + (-\vec{v}) \in F + G$.
$(\Longleftarrow)$ Inversement, si $\vec{b} - \vec{a} \in F + G$ alors on peut écrire $\vec{b} - \vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ avec $\vec{u} \in F$ et $\vec{v} \in G$.
On alors $\vec{x} = \vec{a} + \vec{u} = \vec{b} - \vec{v} \in V \cap W$.

Exercice 40 : [énoncé]
Supposons $\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0$. Par égalité de coefficients de polynômes :
$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$
Après résolution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.
La famille (P_1, P_2, P_3) est une famille libre formée de $3 = \dim \mathbb{K}_2[X]$ polynômes de $\mathbb{K}_2[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice 41 : [énoncé]
On remarque que $\deg P_k = k$ donc $P_k \in \mathbb{K}_n[X]$.
Supposons $\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n = 0$.
Si $\lambda_n \neq 0$ alors $\deg(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_n P_n) = n$ car
$\deg(\lambda_0 P_0 + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1}) \leq n - 1$ et $\deg \lambda_n P_n = n$
Ceci est exclu, donc $\lambda_n = 0$.
Sachant $\lambda_n = 0$, le même raisonnement donne $\lambda_{n-1} = 0$ et ainsi de suite $\lambda_{n-2} = \ldots = \lambda_0 = 0$.
La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une famille libre de $n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$ éléments de $\mathbb{K}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 42 : [énoncé]

(a) $F \subset E$ et la fonction nulle appartient à F (en prenant $P = Q = 0 \in \mathbb{R}_n[X]$)
Soient $f, g \in F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On peut écrire $f(x) = P(x) \sin x + Q(x) \cos x$ et $g(x) = \hat{P}(x) \sin x + \hat{Q}(x) \cos x$ avec $P, Q, \hat{P}, \hat{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$.
On a alors $\lambda f + \mu g = (\lambda P + \mu \hat{P})(x) \sin x + (\lambda Q + \mu \hat{Q})(x) \cos x$ avec $\lambda P + \mu \hat{P}, \lambda Q + \mu \hat{Q} \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $\lambda f + \mu g \in F$ et finalement F est un sous-espace vectoriel de E.

(b) Posons $f_k(x) = x^k \sin x$ et $g_k(x) = x^k \cos x$ avec $k \in \{0, \ldots, n\}$.
Les fonctions $f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_n$ sont des fonctions de F formant clairement une famille génératrice.
Supposons $\lambda_0 f_0 + \cdots + \lambda_n f_n + \mu_0 g_0 + \cdots + \mu_n g_n = 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $(\lambda_0 + \lambda_1 x + \cdots + \lambda_n x^n) \sin x + (\mu_0 + \mu_1 x + \cdots + \mu_n x^n) \cos x = 0$.
Pour $x = \pi/2 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on obtient une infinité de racine au polynôme $\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_n X^n$.
Ceci permet d'affirmer $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Pour $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on peut affirmer $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = 0$.
On peut conclure que $(f_0, \ldots, f_n, g_0, \ldots, g_n)$ est libre et donc une base de F puis $\dim F = 2(n + 1)$.

Exercice 43 : [énoncé]
$F \subset \mathbb{K}_n[X]$, $0 \in F$ car $A \mid 0$.
Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in F$.
$A \mid P$ et $A \mid Q$ donc $A \mid (\lambda P + \mu Q)$ puis $\lambda P + \mu Q \in F$.
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_n[X]$.
Notons $p = \deg(A)$. On a
$$F \oplus \mathbb{K}_{p-1}[X] = \mathbb{K}_n[X]$$
ce qui détermine un supplémentaire de F et donne $\dim F = n + 1 - p$.

Exercice 44 : [énoncé]
Considérons l'application $\varphi \colon \mathbb{R}_{n+1}[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = P(X + 1) - P(X)$. L'application φ est bien définie, linéaire et de noyau

$\mathbb{R}_0[X]$. Par le théorème du rang elle est donc surjective et les solutions de l'équation $\varphi(P) = X^n$ se déduisent les unes des autres par l'ajout d'un élément de $\mathbb{R}_0[X]$ c'est-à-dire d'une constante. Ainsi il existe une unique solution vérifiant $P(0) = 0$.

Exercice 45 : [énoncé]

(a) La matrice de la famille étudiée dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ a pour coefficient général

$$a_{i,j} = \binom{n}{i} j^i \text{ avec } 0 \leq i, j \leq n.$$

En factorisant par ligne le déterminant de cette matrice est

$$\prod_{i=0}^{n} \binom{n}{i} V_{n+1}(0, 1, \ldots, n) \neq 0$$

avec $V_{n+1}(a_0, \ldots, a_n)$ déterminant de Vandermonde.

(b) cf. cours.