Les fractions rationnelles

Généralités

Exercice 1 [02007] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible P/Q.
Montrer que F est paire si, et seulement si, les polynômes P et Q sont tous deux pairs.

Exercice 2 [02008] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

(a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant $P(\omega X) = P(X)$.
Montrer qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^n)$.

(b) En déduire la réduction au même dénominateur de la fraction rationnelle

$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}.$$

Exercice 3 [00539] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ non pôle de F, $F(n) \in \mathbb{Q}$.
Montrer que $F \in \mathbb{Q}(X)$.

Exercice 4 [04203] [Correction]
Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des complexes deux à deux distincts et $P = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_n)$.
Exprimer en fonction de P et de ses dérivées les fractions

$$F = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \lambda_k}, \qquad G = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(X - \lambda_k)^2} \quad \text{et} \quad H = \sum_{\substack{1 \le k, \ell \le n \\ k \ne \ell}} \frac{1}{(X - \lambda_k)(X - \lambda_\ell)}.$$

Degré

Exercice 5 [02004] [Correction]
Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle F telle que $F^2 = X$.

Exercice 6 [02006] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Montrer que $\deg F' < \deg F - 1 \implies \deg F = 0$.

Exercice 7 [02005] [Correction]
Déterminer un supplémentaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Racines et pôles

Exercice 8 [02009] [Correction]
Soient p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
Déterminer les racines et les pôles de

$$F = \frac{X^p - 1}{X^q - 1}$$

en précisant les multiplicités respectives.

Exercice 9 [02010] [Correction]
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.

(a) Soit a un zéro d'ordre $\alpha \ge 1$ de F. Montrer que a est zéro d'ordre $\alpha - 1$ de F'.

(b) Comparer les pôles de F et de F', ainsi que leur ordre de multiplicité.

Exercice 10 [02011] [Correction]
Montrer qu'il n'existe pas de $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que

$$F' = \frac{1}{X}.$$

Décomposition en éléments simples

Exercice 11 [02013] [Correction]
Effectuer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ des fractions rationnelles suivantes :

(a) $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$

(b) $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$

(c) $\frac{1}{X(X-1)^2}$

(d) $\frac{2X}{X^2+1}$

(e) $\frac{1}{X^2+X+1}$

(f) $\frac{4}{(X^2+1)^2}$

(g) $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$

(h) $\frac{1}{X^4+X^2+1}$

(i) $\frac{3}{(X^3-1)^2}$

Exercice 12 [02676] [Correction]
Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ la fraction rationnelle

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}.$$

Applications de la décomposition en éléments simples

Exercice 13 [02015] [Correction]
Soit la fraction

$$F=\frac{1}{X(X+1)}.$$

(a) Réaliser la décomposition en éléments simples de F.

(b) En déduire une simplification pour $n\geq 1$ de $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$.

(c) Procéder de même pour calculer : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

Exercice 14 [02016] [Correction]
Exprimer la dérivée d'ordre n de

$$\frac{1}{X(X^2+1)}.$$

Exercice 15 [02017] [Correction]
Soit

$$F=\frac{1}{X^2+1}\in\mathbb{C}(X).$$

(a) En réalisant la décomposition en éléments simples de F, exprimer $F^{(n)}$.

(b) Montrer qu'il existe $P_n\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$F^{(n)}=\frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}.$$

(c) Déterminer les zéros de P_n.

Exercice 16 [02018] [Correction]
Soit

$$F=\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}.$$

(a) Quelle relation existe entre la partie polaire de F en 1 et celle en -1.

(b) Former la décomposition en éléments simples de la fraction F.

(c) En déduire un couple $(U,V)\in\mathbb{R}[X]^2$ tel que :

$$(X+1)^3U+(X-1)^3V=1.$$

Exercice 17 [02019] [Correction]
On pose $\omega_k=\mathrm{e}^{2ik\pi/n}$ avec $k\in\{0,\dots,n-1\}$ et $n\geq 2$.
Réduire au même dénominateur

$$F=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-\omega_k}.$$

Exercice 18 [02020] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$ et $p\in\{0,1,\dots,n-1\}$. On pose pour $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$, $\omega_k=\exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.
Mettre sous forme irréductible la fraction

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\omega_k^p}{X-\omega_k}.$$

Exercice 19 [02021] [Correction]
Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $z_1,z_2,\dots,z_n\in\mathbb{C}$ deux à deux distincts. On pose

$$Q=\prod_{k=1}^{n}(X-z_k).$$

(a) Pour $p\in\{0,1,\dots,n-1\}$, exprimer la décomposition en éléments simples de X^p/Q à l'aide des $Q'(z_k)$.

(b) En déduire, pour $p \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}.$$

Exercice 20 [02022] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples $x_1, \ldots, x_n$.

(a) Former la décomposition en éléments simples de la fraction $1/P$.

(b) On suppose $P(0) \neq 0$. Observer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Exercice 21 [02023] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme scindé à racines simples : $x_1, \ldots, x_n$.

(a) Former la décomposition en éléments simples de P''/P.

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Exercice 22 [02372] [Correction]
Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples $(x_1, \ldots, x_n)$. Montrer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Exercice 23 [02024] [Correction]
Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, deux à deux distincts, tels que

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, a_i + \alpha_j \neq 0.$$

Résoudre le système

$$\begin{cases} \frac{x_1}{a_1+\alpha_1} + \frac{x_2}{a_2+\alpha_1} + \cdots + \frac{x_n}{a_n+\alpha_1} = 1 \\ \frac{x_1}{a_1+\alpha_2} + \frac{x_2}{a_2+\alpha_2} + \cdots + \frac{x_n}{a_n+\alpha_2} = 1 \\ \qquad \vdots \\ \frac{x_1}{a_1+\alpha_n} + \frac{x_2}{a_2+\alpha_n} + \cdots + \frac{x_n}{a_n+\alpha_n} = 1. \end{cases}$$

Exercice 24 [03335] [Correction]
Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ un polynôme réel dont toutes les racines sont réelles.

(a) Montrer

$$\forall x \in \mathbb{R}, (P'^2 - PP'')(x) \geq 0.$$

(b) En déduire

$$\forall k \in \{1, \ldots, n-1\}, a_{k-1} a_{k+1} \leq a_k^2.$$

Exercice 25 [04204] [Correction]
Soit p et n deux entiers avec $0 \leq p < n$. Former la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de

$$\frac{X^p}{X^n - 1}.$$

Exercice 26 [05036] [Correction]
Soit P un polynôme de degré n vérifiant

$$\int_0^1 x^k P(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pour tout } k \in [\![1\,;n]\!].$$

Montrer

$$\int_0^1 \bigl(P(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}x = (n+1)^2 \biggl(\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x\biggr)^2.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Si F est paire alors $F(-X) = F(X)$ donc $P(-X)Q(X) = P(X)Q(-X)$. Le polynôme $Q(X)$ divise $P(X)Q(-X)$ et $P \wedge Q = 1$ donc $Q(X)$ divide $Q(-X)$. De même $Q(-X)$ divise $Q(X)$ Or $\text{coeff}(Q(X)) = 1$ et $\text{coeff}(Q(-X)) = (-1)^n$ avec $n = \deg Q$.
Si n est pair alors $Q(-X) = Q(X)$ puis $P(-X) = P(X)$. Les deux polynômes sont pairs
Si n est impair alors $Q(-X) = -Q(X)$ puis $P(-X) = -P(X)$. Les deux polynômes sont impairs mais alors non premiers entre eux ce qui est exclu.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) Écrivons
$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$
avec (a_k) suite de complexe nulle au-delà d'un certain rang.
La relation $P(\omega X) = P(X)$ donne
$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \omega^k X^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$
puis
$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \omega^k = a_k.$$
Par suite $a_k = 0$ pour tout $k \neq 0\ [n]$. En posant $b_\ell = a_{n\ell}$ et $Q = \sum_{\ell=0}^{+\infty} b_\ell X^\ell$ on obtient
$$P(X) = Q(X^n).$$

(b) La réduction au même dénominateur de la fraction
$$F = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X + \omega^k}{X - \omega^k}$$
donne
$$F = \frac{P}{X^n - 1} \text{ avec } \deg P = n.$$
Comme $F(\omega X) = F(X)$ on obtient
$$\frac{P(\omega X)}{X^n - 1} = \frac{P(X)}{X^n - 1}$$
puis $P(\omega X) = P(X)$.
Par suite P est de la forme $P = aX^n + b$.
En étudiant la partie entière de F on obtient $a = n$.
En étudiant la valeur de F en 0 on obtient $b = n$.
Par suite
$$F = n\frac{X^n + 1}{X^n - 1}.$$

Exercice 3 : [énoncé]
Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $F = P/Q$.
Le cas où $P = 0$ étant immédiat, supposons-le désormais exclu.
Posons $p = \deg P$ et $q = \deg Q$ et écrivons
$$P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \text{ et } Q = \sum_{\ell=0}^{q} b_\ell X^\ell, a_k, b_\ell \in \mathbb{C}.$$
Considérons $p + q + 1$ naturels n n'annulant pas Q. Pour chacun, la relation
$$P(n) - y_n Q(n) = 0 \text{ avec } F(n) = y_n \in \mathbb{Q}$$
définit une équation
$$a_0 + na_1 + \cdots + n^p a_p - y_n b_0 - \cdots - y_n n^q b_q = 0.$$
Le système formé par ses équations est compatible (dans $\mathbb{C}$) et à coefficients rationnels. Par application de la méthode de Gauss (par exemple), on peut affirmer que ce système possède une solution rationnelle. Il existe donc
$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbb{Q}$$
tels que pour
$$R = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k X^k \in \mathbb{Q}[X] \text{ et } S = \sum_{\ell=0}^{q} \beta_\ell X^\ell \in \mathbb{Q}[X]$$
on ait
$$R(n) - y_n S(n) = 0$$
pour chacun de $p + q + 1$ naturels n initialement considéré. On a alors pour ces n,
$$P(n)S(n) = Q(n)R(n)$$
et donc le polynôme
$$PS - QR$$

admet au moins $p+q+1$ racines.
Or
$$\deg(PS-QR)\leq p+q$$
donc
$$PS=QR$$
puis
$$F=\frac{R}{S}\in\mathbb{Q}(X).$$

Exercice 4 : [énoncé]
La dérivée d'un produit est la somme des produits obtenus en ne dérivant qu'un facteur :
$$P'=\sum_{k=1}^{n}\prod_{\substack{1\leq j\leq n\\ j\neq k}}(X-\lambda_j).$$
En divisant par P, on fait apparaître F :
$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-\lambda_k}=F.$$

G et H se déduisent par dérivation et élévation au carré.

En dérivant F on fait apparaître $-G$:
$$G=-\left(\frac{P'}{P}\right)'=\frac{P'^2-PP''}{P^2}.$$
En développant F^2, on fait apparaître G et H :
$$F^2=G+H\quad\text{donc}\quad H=F^2-G=\frac{P''}{P}.$$
Cette dernière formule aurait aussi pu être découverte par un calcul direct.

Exercice 5 : [énoncé]
Si F est solution alors $\deg F^2=2\deg F=1$ avec $\deg F\in\mathbb{Z}$. C'est impossible.

Exercice 6 : [énoncé]
Supposons $\deg F'<\deg F-1$. $F=\frac{A}{B}$ et $F'=\frac{A'B-AB'}{B^2}$.
Si A ou B sont constants : c'est assez rapide
Sinon : $\deg F'<\deg F-1\implies\deg(A'B-AB')<\deg A'B=\deg AB'$ donc $\operatorname{coeff}(A'B)=\operatorname{coeff}(AB')$ d'où $\deg A=\deg B$ puis $\deg F=0$.

Exercice 7 : [énoncé]
Soit $V=\left\{F\in\mathbb{K}(X)\;\middle|\;\deg F<0\right\}$. $V\subset\mathbb{K}(X)$, $0\in V$ et $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}$, $\forall F,G\in V$, $\deg(\lambda F+\mu G)\leq\max(\deg F,\deg G)<0$ donc $\lambda F+\mu G\in V$. V est un sous-espace vectoriel.
Clairement $V\cap\mathbb{K}[X]=\{0\}$.
De plus $\forall F\in\mathbb{K}(X)$, $F=P+G$ avec $P=\operatorname{Ent}(F)\in\mathbb{K}[X]$ et $G\in V$.

Exercice 8 : [énoncé]
Déterminons les racines communes à X^p-1 et X^q-1. Soit ω un telle racines.
On a $\omega^p=\omega^q=1$. Puisque p et q sont premiers entre eux, il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $pu+qv=1$.
On a alors $\omega=\omega^{pu+qv}=(\omega^p)^u(\omega^q)^v=1$. Inversement, 1 est racine commune.
De plus, notons que toutes les racines de X^p-1 et X^q-1 sont simples.
Les racines de F sont les racines p ème de l'unité autres que 1. Elles sont simples.
Les pôles de F sont les racines q ème de l'unité autres que 1. Ils sont simples.
1 n'est ni pôle, ni racine.

Exercice 9 : [énoncé]
Notons P/Q le représentant irréductible de F.

(a) Soit a zéro de multiplicité $\alpha\geq1$. On a $P=(X-a)^\alpha\hat{P}$ avec $\hat{P}(a)\neq0$ et $Q(a)\neq0$.
$$F'=\frac{(X-a)^{\alpha-1}(\alpha\hat{P}Q+(X-a)\hat{P}'Q-(X-a)\hat{P}Q')}{Q^2}$$
a n'est pas racine de $\alpha\hat{P}Q+(X-a)\hat{P}'Q-(X-a)\hat{P}Q'$, donc a est racine de multiplicité $\alpha-1$ de F'.

(b) Soit a pôle de F de multiplicité α. On a $P(a)\neq0$ et $Q=(X-a)^\alpha\hat{Q}$ avec $\hat{Q}(a)\neq0$.
$$F'=\frac{(X-a)P'\hat{Q}-\alpha P\hat{Q}-(X-a)P\hat{Q}'}{(X-a)^{\alpha+1}\hat{Q}^2}$$
a n'est pas racine de $(X-a)P'\hat{Q}-\alpha P\hat{Q}-(X-a)P\hat{Q}'$, donc a est pôle de multiplicité $\alpha+1$ de F'.

Exercice 10 : [énoncé]
Par l'absurde supposons qu'une telle fraction F existe et considérons P/Q son représentant irréductible :

$$\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}=\frac{1}{X}.$$

On étudie la multiplicité[1] *de 0 en tant que pôle de F'.*

On a $X(P'Q-PQ')=Q^2$ et donc 0 est racine du polynôme Q d'une certaine multiplicité $\alpha\geq 1$. 0 est alors racine de Q' de multiplicité $\alpha-1$ mais n'est pas racine de P car P et Q sont premiers entre eux. On en déduit que 0 est racine de multiplicité exactement $\alpha-1$ de $P'Q-PQ'$. Or 0 est aussi racine de Q^2 de multiplicité $2\alpha>\alpha-1$ et donc 0 est pôle de F' de multiplicité $2\alpha-(\alpha-1)=\alpha+1>1$. C'est absurde.

Exercice 11 : [énoncé]

(a) $\frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}=1-\frac{8}{X-1}+\frac{13}{X-2}$

(b) $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)}=\frac{1}{X-1}-\frac{5}{X-2}+\frac{5}{X-3}$

(c) $\frac{1}{X(X-1)^2}=\frac{1}{X}+\frac{1}{(X-1)^2}-\frac{1}{X-1}$

(d) $\frac{2X}{X^2+1}=\frac{1}{X-\mathrm{i}}+\frac{1}{X+\mathrm{i}}$

(e) $\frac{1}{X^2+X+1}=-\frac{\mathrm{i}/\sqrt{3}}{X-j}+\frac{\mathrm{i}/\sqrt{3}}{X-j^2}$

(f) $\frac{4}{(X^2+1)^2}=-\frac{1}{(X-\mathrm{i})^2}-\frac{\mathrm{i}}{X-\mathrm{i}}-\frac{1}{(X+\mathrm{i})^2}+\frac{\mathrm{i}}{X+\mathrm{i}}$

(g) $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}=-\frac{1}{X^2}+\frac{5}{X}-\frac{4}{(X+1)^2}-\frac{5}{(X+1)}$

(h) $\frac{1}{X^4+X^2+1}=\frac{(1-j)/6}{X-j}+\frac{(1-j^2)/6}{X-j^2}-\frac{(1-j)/6}{X+j}-\frac{(1-j^2)/6}{X+j^2}$.

(i) En exploitant l'astuce $F(j^2X)=F(jX)=F(X)$:
$\frac{3}{(X^3-1)^2}=\frac{1/3}{(X-1)^2}-\frac{2/3}{(X-1)}+\frac{j^2/3}{(X-j)^2}-\frac{2j/3}{(X-j)}+\frac{j/3}{(X-j^2)^2}-\frac{2j^2/3}{(X-j^2)}$.

Exercice 12 : [énoncé]
Les pôles de cette fraction rationnelles sont simples et sont les racines n-ième de l'unité $\omega_0,\dots,\omega_{n-1}$. Sachant que la fraction rationnelle est de degré strictement négatif, sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples cherchée s'écrit

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha_k}{X-\omega_k}.$$

La partie polaire

$$\frac{\lambda}{X-a}$$

d'un pôle simple a d'une fraction rationnelle P/Q s'obtient par la relation

$$\lambda=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

En effet, si $Q(X)=(X-a)R(X)$ on a $Q'(a)=R(a)$
Ici

$$\alpha_k=\left(\frac{X^{n-1}}{(X^n-1)'}\right)(\omega_k)=\frac{1}{n}$$

et donc

$$\frac{X^{n-1}}{X^n-1}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-\omega_k}.$$

Exercice 13 : [énoncé]

(a) On obtient

$$F=\frac{X+1-X}{X(X+1)}=\frac{1}{X}-\frac{1}{X+1}.$$

(b) Par télescopage

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}.$$

(c) On a

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}=\frac{1/2}{X}-\frac{1}{X+1}+\frac{1/2}{X+2}$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+4}.$$

Exercice 14 : [énoncé]
Par décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{X(X^2+1)}=\frac{1}{X}-\frac{1/2}{X-\mathrm{i}}-\frac{1/2}{(X+\mathrm{i})}$$

1. Par ce raisonnement, on voit que les multiplicités des pôles d'une fraction dérivée sont au moins égales à 2.

et on sait

$$\left(\frac{1}{X-a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(X-a)^{n+1}}$$

donc

$$\left(\frac{1}{X(X^2+1)}\right)^{(n)} = (-1)^n n!\left(\frac{1}{X^{n+1}} - \frac{1/2}{(X-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1/2}{(X+\mathrm{i})^{n+1}}\right).$$

Exercice 15 : [énoncé]

(a) La décomposition en éléments simples est

$$F = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{X-\mathrm{i}} - \frac{1}{X+\mathrm{i}}\right)$$

donc

$$F^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{(X-\mathrm{i})^{n+1}} - \frac{1}{(X+\mathrm{i})^{n+1}}\right).$$

(b) $F^{(n)} = \frac{P_n}{(X^2+1)^{n+1}}$ avec

$$P_n = \frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\big((X+\mathrm{i})^{n+1} - (X-\mathrm{i})^{n+1}\big) \in \mathbb{C}_n[X].$$

Mais $\overline{P_n} = P_n$ donc $P_n \in \mathbb{R}_n[X]$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P_n(x) = 0 &\iff (x+\mathrm{i})^{n+1} = (x-\mathrm{i})^{n+1} \\ &\iff \exists k \in \{1,\dots,n\}, x = \cot\left(\frac{k\pi}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Cela fournit n racines réelles et il n'en peut y en avoir d'autres complexes.

Exercice 16 : [énoncé]

(a) On remarque que $F(-X) = F(X)$.
Si $\frac{P(X)}{(X-1)^3}$ est la partie polaire de F en 1, alors $\frac{-P(-X)}{(X+1)^3}$ est sa partie polaire en -1.

(b) On obtient

$$\frac{1}{(X-1)^3(X+1)^3} = \frac{1/8}{(X-1)^3} - \frac{3/16}{(X-1)^2} + \frac{3/16}{X-1} - \frac{1/8}{(X+1)^3} - \frac{3/16}{(X+1)^2} - \frac{3/16}{X+1}.$$

(c) En réduisant au même dénominateur

$$U = \frac{1}{16}(2 - 3(X-1) + 3(X-1)^2) \text{ et } V = -\frac{1}{16}(2 + 3(X+1) + 3(X+1)^2).$$

Exercice 17 : [énoncé]

La réduction au même dénominateur de F s'écrit

$$F = \frac{P}{X^n - 1}$$

avec $\deg P < n$.
$\forall k \in \{0,\dots n-1\}$,

$$\left(\frac{P(X)}{nX^{n-1}}\right)(\omega_k) = 1$$

donc

$$P(\omega_k) - n\omega_k^{n-1} = 0.$$

Puisque $P - nX^{n-1} \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et possède n racines, c'est le polynôme nul.
Finalement

$$F = \frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}.$$

Exercice 18 : [énoncé]

On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\omega_k^p}{X - \omega_k} = \frac{P}{X^n - 1} \text{ avec } \deg P < n.$$

De plus, par décomposition en éléments simples

$$\frac{P(\omega_k)}{(X^n-1)'(\omega_k)} = \omega_k^p.$$

Par suite on a

$$P(\omega_k) = n\omega_k^{n-1}\omega_k^p = n\omega_k^{p-1}.$$

Ces n relations permettent de reconnaître P puisqu'on sait $\deg P < n$
On obtient :

$$P = nX^{p-1} \text{ si } p \geq 1 \text{ ou } P = nX^{n-1} \text{ si } p = 0.$$

Exercice 19 : [énoncé]

(a) On a
$$\frac{X^p}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - z_k}$$
avec
$$\lambda_k = \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}.$$

(b) En multipliant par X,
$$\frac{X^{p+1}}{Q} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k X}{X - z_k}$$
puis en remplaçant X par un réel de limite $+\infty$, on obtient d'un côté $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}$ et de l'autre 1 si $p+1 = n$ et 0 sinon.

Exercice 20 : [énoncé]

(a) On a
$$\frac{1}{P} = \frac{1}{\lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$$
avec
$$\lambda_i = \frac{1}{P'(x_i)}.$$

(b) En évaluant en 0
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i P'(x_i)} = -\frac{1}{P(0)}.$$

Exercice 21 : [énoncé]

(a) On a
$$\frac{P''}{P} = \frac{P''}{\lambda(X - x_1)\dots(X - x_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$$
avec $\lambda_i = \frac{P''(x_i)}{P'(x_i)}$.

(b) Puisque $\deg \frac{XP''}{P} < 0$ on a
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0.$$

Exercice 22 : [énoncé]

On a
$$\frac{P''}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X - x_k} \text{ avec } \alpha_k = \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)}.$$
Sachant que
$$\frac{xP''(x)}{P(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$
on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{P''(x_k)}{P'(x_k)} = 0.$$

Exercice 23 : [énoncé]

Considérons la fraction rationnelle
$$F(X) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a_i + X}.$$
La satisfaction du système équivaut aux équations
$$F(\alpha_1) = \dots = F(\alpha_n) = 0.$$
En réduisant F au même dénominateur
$$F = \frac{P}{Q} \text{ avec } P \text{ unitaire, } \deg P = n \text{ et } Q = \prod_{i=1}^{n} (X + a_i).$$
Les équations $F(\alpha_1) = \dots = F(\alpha_n) = 0$ signifient alors
$$P = (X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_n).$$
La décomposition en éléments simples F donne alors
$$x_i = \frac{(-1)^n \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k + a_i)}{\prod_{k=1, k \neq i}^{n} (a_k - a_i)}.$$

Exercice 24 : [énoncé]

(a) En notant $x_1,\dots,x_n$ les racines réelles de P, on a

$$\frac{P'(x)}{P(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}.$$

En dérivant, on obtient

$$\frac{P(x)P''(x)-P'(x)^2}{P(x)^2}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(x-x_k)^2}$$

ce qui permet de conclure.

(b) Notons $x_1<\dots<x_p$ les racines réelles de P de multiplicités $\alpha_1,\dots,\alpha_p\in\mathbb{N}^*$. Puisque P ne possède pas de racines complexes, on a

$$\alpha_1+\dots+\alpha_p=\deg P.$$

Par application du théorème de Rolle, P' possède une racine dans chacun des intervalles $]x_1\,;x_2[,\dots,]x_{p-1}\,;x_p[$ et de plus $x_1,\dots,x_p$ sont racines de P' de multiplicités $\alpha_1-1,\dots,\alpha_p-1$ (en acceptant de dire qu'une racine de multiplicité 0, n'est pas racine). Puisque

$$p-1+(\alpha_1-1)+\dots+(\alpha_p-1)=\deg P-1=\deg P'$$

le polynôme P' ne possède pas de racines complexes. Il en est de même de P'',$P^{(3)}$,...
En appliquant le résultat du a) à $P^{(k-1)}$ en $x=0$, on obtient

$$\bigl((k)!a_k\bigr)^2-\bigl((k-1)!a_{k-1}\bigr)\bigl((k+1)!a_{k+1}\bigr)\geq 0$$

puis l'inégalité voulue que le produit $a_{k+1}a_{k-1}$ soit positif ou non.

Exercice 25 : [énoncé]
La fraction est exprimée sous forme irréductible et sa partie entière est nulle. En introduisant les racines n-ième de l'unité $\omega_k=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}$ avec $k\in[\![0\,;n-1]\!]$, le dénominateur peut être factorisé dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k).$$

La décomposition en éléments simples de la fraction s'écrit alors

$$\frac{X^p}{X^n-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{X-\omega_k}\quad\text{avec}\quad a_k\in\mathbb{C}.$$

On calcule a_k en multipliant par $X-\omega_k$ puis en évaluant en ω_k :

$$a_k=\left.\frac{X^p}{\prod_{j\neq k}(X-\omega_j)}\right|_{X=\omega_k}=\frac{\omega_k^p}{\prod_{j\neq k}(\omega_k-\omega_j)}.$$

Le dénominateur du quotient précédent correspond à $\bigl(X^n-1\bigr)'(\omega_k)$.

En effet, par dérivation d'un produit en la somme des produits obtenus où l'on dérive un seul facteur :

$$\bigl(X^n-1\bigr)'=\left(\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)\right)'=\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{\substack{0\leq j\leq n-1\\ j\neq k}}(X-\omega_j).$$

En évaluant en ω_k, tous les produits s'annulent sauf celui d'indice k :

$$\bigl(X^n-1\bigr)'\Big|_{X=\omega_k}=\prod_{\substack{0\leq j\leq n-1\\ j\neq k}}(\omega_k-\omega_j).$$

On peut alors proposer une expression simple des coefficients de la décomposition

$$a_k=\frac{\omega_k^p}{n\omega_k^{n-1}}=\frac{\omega_k^{p+1}}{n}.$$

Exercice 26 : [énoncé]
Introduisons les coefficients de P afin d'écrire

$$P=a_0+a_1X+\dots+a_nX^n\quad\text{avec}\quad a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}.$$

D'une part, on peut écrire

$$\int_0^1\bigl(P(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}x=\int_0^1\bigl(a_0+a_1x+\dots+a_nx^n\bigr)P(x)\,\mathrm{d}x.$$

En développant par linéarité puis en simplifiant les termes nuls, on obtient

$$\int_0^1\bigl(P(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}x=a_0\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x.$$

D'autre part, pour tout $k\in[\![1\,;n]\!]$,

$$\int_0^1 x^kP(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 a_0x^k+a_1x^{k+1}+\dots+a_nx^{n+k}\,\mathrm{d}x$$

et l'hypothèse donne alors les équations

$$\frac{a_0}{k+1} + \frac{a_1}{k+1} + \cdots + \frac{a_n}{n+k+1} = 0 \quad \text{pour tout } k \in [\![1\,;n]\!]. \tag{1}$$

On réduit au même dénominateur la fraction exprimant le premier membre et l'on étudie le polynôme exprimant le numérateur.

Introduisons la fraction

$$F = \frac{a_0}{X+1} + \frac{a_1}{X+2} + \cdots + \frac{a_n}{X+n+1}.$$

Par réduction au même dénominateur,

$$F = \frac{Q}{(X+1)(X+2)\ldots(X+n+1)} \quad \text{avec} \quad Q \in \mathbb{R}_n[X].$$

Les équations (**??**) assurent que Q s'annule en $1, 2, \ldots, n$ et, puisqu'il s'agit d'un polynôme de degré inférieur à n, on peut l'écrire

$$Q = \lambda(X-1)(X-2)\ldots(X-n) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

On exprime ensuite l'intégrale de P à l'aide de la fraction F

$$\begin{aligned}\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x &= a_0 + \frac{a_1}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n+1} = F(0)\\ &= \frac{\lambda(-1)(-2)\ldots(-n)}{1\times 2\times\cdots\times(n+1)} = (-1)^n\frac{\lambda}{n+1}.\end{aligned}$$

Pour conclure, il reste à relier a_0 et λ.

a_0 est le coefficient de $\frac{1}{X+1}$ dans la décomposition en éléments simples de F.

On a

$$a_0 = \left.\frac{Q}{(X+2)\ldots(X+n+1)}\right|_{X=-1} = \frac{\lambda(-2)(-3)\ldots(-n-1)}{1\times 2\times\cdots\times n} = (-1)^n\lambda(n+1)$$

et, finalement,

$$\int_0^1 \bigl(P(x)\bigr)^2\,\mathrm{d}x = (-1)^n(n+1)\lambda\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)^2\left(\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x\right)^2.$$