Structures algébriques

Caractéristique d'un corps

Exercice 1 [00133] [Correction]

(a) Montrer que si p est nombre premier alors

$$\forall k \in \{1, \dots, p-1\}, p \text{ divise } \binom{p}{k}.$$

(b) En déduire que si $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique $p \neq 0$ alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{K}^2, (a+b)^p = a^p + b^p.$$

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]

(a) $\binom{p}{k} = \frac{p}{k}\binom{p-1}{k-1}$ donc p divise $k\binom{p}{k}$. Or $p \wedge k = 1$ car p est premier et $k \in \{1, \dots, p-1\}$ donc p divise $\binom{p}{k}$.

(b) Par la formule du binôme,

$$(a+b)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} a^k b^{p-k}.$$

Or pour $k \in \{1, \dots, p-1\}$, $\binom{p}{k} = 0$ dans $\mathbb{K}$ car $p \mid \binom{p}{k}$ et le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique p.
Après simplification, on obtient

$$\forall a, b \in \mathbb{K}, (a+b)^p = a^p + b^p.$$

On en déduit que l'application $x \mapsto x^p$ est un endomorphisme du corps $\mathbb{K}$. De plus celui-ci est injectif car

$$x^p = 0_{\mathbb{K}} \implies x = 0_{\mathbb{K}}$$

et, si l'on sait que $\mathbb{K}$ est un corps fini, on peut ajouter que $x \mapsto x^p$ est un automorphisme [connu comme étant l'automorphisme de Frobenius].