Nombres réels et complexes

Rationnels et irrationnels

Exercice 1 [02093] [Correction]
Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

Exercice 2 [02095] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x+y) = f(x) + f(y).$$

(a) On suppose f constante égale C quelle est la valeur de C ?
On revient au cas général.

(b) Calculer $f(0)$.

(c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(-x) = -f(x)$.

(d) Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x)$ et généraliser cette propriété à $n \in \mathbb{Z}$.

(e) On pose $a = f(1)$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = ax$.

Exercice 3 [02472] [Correction]
Montrer que

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}+\left(\frac{2}{3}-\frac{41}{81}\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^{1/3}$$

est un rationnel. On conseille d'effectuer les calculs par ordinateur.

Exercice 4 [03668] [Correction]
(Irrationalité de e^r *pour* $r \in \mathbb{Q}^*$*)*

(a) Pour $a, b \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction polynomiale

$$P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$$

et ses dérivées successives prennent en $x = 0$ des valeurs entières.

(b) Établir la même propriété en $x = a/b$

(c) On pose $r = a/b$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int_0^r P_n(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $I_n \to 0$.

(d) En supposant $\mathrm{e}^r = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$, montrer que $qI_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

Exercice 5 [04972] [Correction]
Montrer que $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ est un nombre irrationnel.

Les nombres réels

Exercice 6 [02099] [Correction]
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = f(x)+f(y);$$
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(xy) = f(x)f(y);$$
$$\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0.$$

(a) Calculer $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.

(b) Déterminer $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Z}$ puis pour $x \in \mathbb{Q}$.

(c) Démontrer que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. En déduire que f est croissante.

(d) Conclure que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 [03404] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels. On suppose

$$\sum_{k=1}^n x_k = \sum_{k=1}^n x_k^2 = n.$$

Montrer que les réels $x_1, \dots, x_n$ sont tous égaux à 1.

Inégalités

Exercice 8 [03643] [Correction]
Soient $x, y \in [0\,;1]$. Montrer

$$x^2 + y^2 - xy \leq 1.$$

Exercice 9 [03224] [Correction]
Montrer
$$\forall u,v\geq 0, 1+\sqrt{uv}\leq\sqrt{1+u}\sqrt{1+v}.$$

Exercice 10 [01733] [Correction]
Déterminer tous les couples $(\alpha,\beta)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$ pour lesquels il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que
$$\forall x,y>0, x^\alpha y^\beta\leq M(x+y).$$

Exercice 11 [03640] [Correction]
Soient $(x_1,\dots,x_n)$ et $(y_1,\dots,y_n)$ deux suites réelles monotones. Comparer
$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k\right) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_ky_k.$$

Exercice 12 [04017] [Correction]
Soient x et y deux réels de l'intervalle $[0\,;1]$. Montrer
$$\min\bigl\{xy,(1-x)(1-y)\bigr\}\leq\frac{1}{4}.$$

Exercice 13 [05014] [Correction]
Résoudre les inéquations suivantes d'inconnue x réelle :

(a) $\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}$
(b) $\frac{2x-1}{x+2}\leq 1$
(c) $3+\sqrt{x-1}<x$
(d) $|2x-1|+|x-3|\geq 7$

Exercice 14 [05021] [Correction]
Soient $n\geq 2$, $a_1,\dots,a_n$ des réels et $b_1,\dots,b_n$ des réels strictement positifs.
Montrer
$$\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\}\leq\frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n}\leq\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

Partie entière

Exercice 15 [02102] [Correction]
Montrer
$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor.$$

Exercice 16 [02104] [Correction]
Montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\forall n\in\mathbb{N}^*,\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor.$$

Exercice 17 [02105] [Correction]
Soit $a\leq b\in\mathbb{R}$. Établir
$$\operatorname{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z})=\lfloor b\rfloor+\lfloor 1-a\rfloor.$$

Exercice 18 [02106] [Correction]
Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

(a) Montrer qu'il existe $(a_n,b_n)\in\mathbb{N}^{*2}$ tel que
$$(2+\sqrt{3})^n=a_n+b_n\sqrt{3} \text{ et } 3b_n^2=a_n^2-1.$$

(b) Montrer que la partie entière de $(2+\sqrt{3})^n$ est un entier impair.

Les nombres complexes

Exercice 19 [02029] [Correction]
Calculer pour $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$,
$$C_n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\cos(k\theta) \text{ et } S_n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\sin(k\theta).$$

Exercice 20 [03107] [Correction]
Soit B une partie bornée non vide de $\mathbb{C}$.
On suppose que si $z\in B$ alors $1-z+z^2\in B$ et $1+z+z^2\in B$.
Déterminer B.

Exercice 21 [03651] [Correction]
Soient a, b, z trois complexes de module 1 deux à deux distincts. Démontrer

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2 \in \mathbb{R}_+^*.$$

Le plan complexe

Exercice 22 [02027] [Correction]

(a) Déterminer le lieu des points M d'affixe z qui sont alignés avec I d'affixe i et M' d'affixe iz.

(b) Déterminer de plus le lieu des points M' correspondant.

Exercice 23 [03040] [Correction]
Quelle est l'image du cercle unité par l'application $z \mapsto \frac{1}{1-z}$?

Exercice 24 [02050] [Correction]
Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$z + \overline{z} = |z|.$$

Exercice 25 [03880] [Correction]
Soient a, b, c des réels strictement positifs.
À quelle condition existe-t-il des complexes t, u, v de somme nulle vérifiant

$$t\overline{t} = a^2, u\overline{u} = b^2 \text{ et } v\overline{v} = c^2.$$

Exercice 26 [05013] [Correction]
Soient A, B, C trois points distincts du plan géométrique d'affixes respectives a, b, c.

(a) Montrer que le triangle (ABC) est équilatéral si, et seulement si,

$$\frac{c-a}{b-a} = -j \quad \text{ou} \quad \frac{b-a}{c-a} = -j^2.$$

(b) En déduire que le triangle (ABC) est équilatéral si, et seulement si,

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Module et argument

Exercice 27 [02030] [Correction]
Déterminer module et argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Exercice 28 [02031] [Correction]
Soient $z \in \mathbb{C}^*$ et $z' \in \mathbb{C}$. Montrer

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z' = \lambda.z.$$

Exercice 29 [02032] [Correction]
Établir :

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z| + |z'| \le |z + z'| + |z - z'|.$$

Interprétation géométrique et précision du cas d'égalité ?

Exercice 30 [00055] [Correction]
Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$.
Déterminer l'ensemble des complexes z tels que

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \le 1.$$

Exercice 31 [03642] [Correction]

(a) Vérifier

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2.$$

(b) On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|z_1| \le 1$ et $|z_2| \le 1$. Montrer qu'il existe $\varepsilon = 1$ ou -1 tel que

$$|z_1 + \varepsilon z_2| \le \sqrt{2}.$$

Exercice 32 [03249] [Correction]
Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = \frac{z + |z|}{2}.$$

Déterminer les valeurs prises par f.

Exercice 33 [02052] [Correction]
Résoudre l'équation $|z + 1| = |z| + 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Racines de l'unité

Exercice 34 [02037] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note U_n l'ensemble des racines n-ème de l'unité.
Calculer
$$\sum_{z \in U_n} |z-1|.$$

Exercice 35 [03353] [Correction]
Soient $n \geq 3$, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ les racines n-ième de l'unité avec $\omega_n = 1$.

(a) Calculer pour $p \in \mathbb{Z}$,
$$S_p = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^p.$$

(b) Calculer
$$T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_i}.$$

Exercice 36 [02038] [Correction]
Soit ω une racine $n$ème de l'unité différente de 1. On pose
$$S = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k.$$
En calculant $(1-\omega)S$, déterminer la valeur de S.

Exercice 37 [02039] [Correction]
Simplifier :

(a) $j(j+1)$ (b) $\frac{j}{j^2+1}$ (c) $\frac{j+1}{j-1}$

Exercice 38 [02040] [Correction]
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation
$$(z+1)^n = (z-1)^n.$$
Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 39 [02043] [Correction]
Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Calculer les nombres :
$$A = \omega + \omega^2 + \omega^4 \text{ et } B = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6.$$

Exercice 40 [02044] [Correction]
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $\omega = \exp(2i\pi/n)$.

(a) Établir que pour tout $z \in \mathbb{C}, z \neq 1$,
$$\prod_{k=1}^{n-1} (z-\omega^k) = \sum_{\ell=0}^{n-1} z^\ell.$$

(b) Justifier que l'égalité reste valable pour $z = 1$.

(c) En déduire l'égalité
$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 41 [02531] [Correction]
Montrer que
$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}.$$

Équations algébriques

Exercice 42 [02045] [Correction]
Pour quels $a \in \mathbb{R}$ l'équation $x^3 + 2x^2 + 2ax - a^2 = 0$ possède $x = 1$ pour solution ?
Quelles sont alors les autres solutions de l'équation ?

Exercice 43 [02046] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations :

(a) $z^2 - 2iz - 1 + 2i = 0$

(b) $z^4 - (5-14i)z^2 - 2(12+5i) = 0$.

Exercice 44 [02047] [Correction]

(a) Déterminer les racines carrées complexes de $5-12\mathrm{i}$.

(b) Résoudre l'équation $z^3-(1+2\mathrm{i})z^2+3(1+\mathrm{i})z-10(1+\mathrm{i})=0$ en commençant par observer l'existence d'une solution imaginaire pure.

(c) Quelles particularités a le triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Exercice 45 [02048] [Correction]
Résoudre dans $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} x+y=1+\mathrm{i} \\ xy=2-\mathrm{i}. \end{cases}$$

Exercice 46 [05024] [Correction]
Résoudre l'équation $ab+bc+ca=abc$ d'inconnue $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$.

Exponentielle complexe

Exercice 47 [02051] [Correction]
Soit $Z\in\mathbb{C}^*$. Résoudre l'équation $\mathrm{e}^z=Z$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

Exponentielles imaginaires

Exercice 48 [02034] [Correction]
Simplifier $\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$ pour $\theta\in\left]-\pi\,;\pi\right[$.

Exercice 49 [02035] [Correction]
Déterminer module et argument de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}.\theta'}$ pour $\theta,\theta'\in\mathbb{R}$.

Corrections

Exercice 1 : [énoncé]
Par l'absurde supposons $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
On peut alors écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et, quitte à simplifier, p et q non tous les deux pairs.
On a alors $2q^2 = p^2$.
p est alors nécessairement pair car p^2 est pair. Cela permet d'écrire $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ puis $q^2 = 2k^2$.
Mais alors q est pair. Par suite p et q sont tous les deux pairs.
Absurde.

Exercice 2 : [énoncé]

(a) La relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ avec f constante égale à C donne $C = C + C$ d'où $C = 0$.

(b) Pour $x = y = 0$, la relation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ implique $f(0) = 0$.

(c) Pour $y = -x$, la relation $f(x+y) = f(x)+f(y)$ donne $0 = f(-x)+f(x)$ d'où $f(-x) = -f(x)$.

(d) Par récurrence :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{Q}, f(nx) = nf(x).$$
Pour $n \in \mathbb{Z}^-, n = -p$ avec $p \in \mathbb{N}$ et
$$f(nx) = f(-px) = -f(px) = -pf(x) = nf(x).$$

(e) On peut écrire $x = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q})$$
or
$$a = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q})$$
donc
$$f(\frac{1}{q}) = \frac{a}{q}$$
puis
$$f(x) = \frac{ap}{q} = ax.$$

Exercice 3 : [énoncé]
On définit le nombre x étudié
```
x:=(2/3+41/81*sqrt(5/3))^(1/3)+(2/3-41/81*sqrt(5/3))^(1/3);
```
Attention à définir les racines cubiques par des exposants 1/3 avec parenthèses.
On peut commencer par estimer la valeur cherchée
```
evalf(x);
```
Nous allons chercher à éliminer les racines cubiques. Pour cela on calcule x^3
```
expand(x^3);
```
Dans l'expression obtenue, on peut faire apparaître x par factorisation du terme
$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}.$$
Simplifions ce terme
```
simplify((2/3+41/243*sqrt(15))^(1/3)*
(2/3-41/243*sqrt(15))^(1/3), assume=positive);
```
On obtient
$$\frac{1}{81}\left(486 + 123\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(486 - 123\sqrt{15}\right)^{1/3}.$$
Développons selon $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$
```
(486^2-123^2*15)^(1/3);
```
donne 9261. Enfin
```
ifactor(9261);
```
permet de conclure que
$$\left(\frac{2}{3} + \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3}\left(\frac{2}{3} - \frac{41}{243}\sqrt{15}\right)^{1/3} = \frac{7}{27}.$$
Ainsi x est solution de l'équation
$$x^3 = \frac{4}{3} + \frac{7}{9}x.$$
En factorisant le polynôme sous-jacent
```
factor(x^3-7/9*x-4/3);
```
on obtient
$$(3x - 4)(3x^2 + 4x + 3) = 0.$$
Puisque $3x^2 + 4x + 3 > 0$, on peut conclure
$$x = 4/3.$$

Exercice 4 : [énoncé]

(a) 0 est racine de multiplicité n de P_n donc

$$\forall m < n, P_n^{(m)}(0) = 0.$$

Le polynôme P_n est de degré $2n$ donc $P_n^{(m)} = 0$ pour tout $m > 2n$ et ainsi

$$\forall m > 2n, P_n^{(m)}(0) = 0.$$

Reste à traiter le cas $n \leq m \leq 2n$. En développant par la formule du binôme

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!}\binom{n}{k}(-a)^{n-k}b^k x^{n+k}.$$

Puisque $P_n^{(m)}(0)$ est donné par la dérivation du terme x^m, on obtient

$$P_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}\binom{n}{m-n}(-a)^{2n-m}b^{m-n}(n+m)! \in \mathbb{Z}.$$

(b) On remarque

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_n(a/b - x) = P_n(x)$$

donc

$$\forall m \in \mathbb{N}, P_n^{(m)}(a/b) = (-1)^m P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}.$$

(c) On a

$$|I_n - 0| = \frac{1}{n!}\left|\int_0^r t^n(bt-a)^n \mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{n!}r^{n+1}(br+a)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(d) Par intégration par parties

$$I_n = \Big[P_n(t)\mathrm{e}^t\Big]_0^r - \int_0^r P_n'(t)\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$$

et en répétant l'opération

$$I_n = \left[\sum_{m=0}^{2n}(-1)^m P_n^{(m)}(t)\mathrm{e}^t\right]_0^r.$$

On en déduit

$$qI_n = \sum_{m=0}^{2n}(-1)^m\big(P_n^{(m)}(r)p - P_n^{m}(0)q\big) \in \mathbb{Z}.$$

Or sur $[0\,;r]$ la fonction $t \mapsto P_n(t)\mathrm{e}^t$ est continue, positive sans être nulle et $0 < r$ donc $I_n > 0$.
Ainsi $qI_n \to 0$, $qI_n > 0$ et $qI_n \in \mathbb{Z}$: c'est absurde.
Notons qu'on en déduit immédiatement l'irrationalité de $\ln r$ pour $r \in \mathbb{Q}^{+*} \setminus \{1\}$.

Exercice 5 : [énoncé]

On exprime $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ comme solution d'une équation « simple ».

En développant [1] le premier membre de l'équation $\big(x - \sqrt{2}\big)^3 = 3$, on obtient

$$x^3 - 3\sqrt{2}x^2 + 6x - 2\sqrt{2} = 3.$$

En réordonnant les membres de cette équation, on écrit

$$\big(3x^2 + 2\big)\sqrt{2} = x^3 + 6x - 3 \quad \text{puis} \quad \sqrt{2} = \frac{x^3 + 6x - 3}{3x^2 + 2}.$$

Par l'absurde, si x est un nombre rationnel, alors $\sqrt{2}$ est aussi un nombre rationnel par opérations dans $\mathbb{Q}$. C'est absurde.

Exercice 6 : [énoncé]

(a) $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ donc $f(0) = 0$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(1.x) = f(1)f(x).$$

Comme f est non nulle, on a $f(1) = 1$.
$f(1) + f(-1) = f(0) = 0$ donc $f(-1) = -1$.

(b) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$: $f(n) = n$.
De plus

$$f(-n) = f((-1)\times n) = f(-1)\times f(n) = -f(n) = -n$$

donc

$$\forall x \in \mathbb{Z}, f(x) = x.$$

Pour $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*$,

$$f(x) = f(p \times \frac{1}{q}) = f(p) \times f(\frac{1}{q}).$$

Or $f(p) = p$ et

$$1 = f(1) = f(q \times \frac{1}{q}) = f(q) \times f(\frac{1}{q}) = q \times f(\frac{1}{q})$$

donc $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q}$. Par suite $f(x) = x$.

1. On emploie la formule $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

(c)
$$\forall x \geq 0, f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = \left(f(\sqrt{x})\right)^2 \geq 0.$$

Pour $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ alors
$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + f(y - x) \geq f(x).$$

Ainsi f est croissante.

(d) Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:
$$\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n} \leq x < \frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n}.$$

Comme f est croissante :
$$f(\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n}) \leq f(x) < f(\frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n})$$

puis
$$\frac{\lfloor (nx) \rfloor}{n} \leq f(x) < \frac{\lfloor (nx) \rfloor + 1}{n}.$$

À la limite, quand $n \to +\infty$, on obtient $x \leq f(x) \leq x$ i.e. $f(x) = x$.
Finalement, $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 7 : [énoncé]

Si une somme de réels positifs est nulle, chaque terme de la somme est nul.

On étudie la somme des $(x_k - 1)^2$. En développant, on obtient
$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(x_k^2 - 2x_k + 1\right)$$
$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}_{=n} - 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{=n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} 1}_{=n} = 0.$$

Puisque cette somme est nulle et que les quantités sommées sont toutes positives, les termes de la somme sont tous nuls :
$$(x_1 - 1)^2 = \cdots = (x_n - 1)^2 = 0.$$

On en déduit $x_1 = \cdots = x_n = 1$.

Exercice 8 : [énoncé]
Sachant $x^2 \leq x$ et $y^2 \leq y$, on a
$$x^2 + y^2 - xy - 1 \leq x + y - xy - 1 = (x - 1)(1 - y) \leq 0.$$

Exercice 9 : [énoncé]
Compte tenu de la positivité des membres, le problème revient à établir
$$\left(1 + \sqrt{uv}\right)^2 \leq (1 + u)(1 + v)$$

soit encore
$$2\sqrt{uv} \leq u + v$$

ce qui découle de la propriété
$$\left(\sqrt{u} - \sqrt{v}\right)^2 \geq 0.$$

Exercice 10 : [énoncé]
Soit (α, β) solution. Considérons
$$f(x, y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x + y}$$

sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
On a
$$f(x, x) = \frac{x^{\alpha+\beta}}{2x}$$

f bornée implique $\alpha + \beta = 1$.
Inversement, supposons $\alpha + \beta = 1$.
Si $y \geq x$ alors
$$0 \leq f(x, y) = \frac{x^\alpha y^{1-\alpha}}{x + y} \leq \frac{y}{x + y}\left(\frac{x}{y}\right)^\alpha \leq 1.$$

Si $x \geq y$ alors idem.

Exercice 11 : [énoncé]
Étudions la différence
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} n x_k y_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} x_k y_\ell\right)$$

ce qui donne encore

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k-\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_ky_k-x_ky_\ell).$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_ky_k-x_ky_\ell)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}x_k(y_k-y_\ell)=\sum_{1\leq \ell<k\leq n}x_k(y_k-y_\ell)+\sum_{1\leq k<\ell\leq n}x_k(y_k-y_\ell)$$

car lorsque $k=\ell$ le terme $x_k(y_k-y_\ell)$ est nul.
Par changement d'indice, on peut réécrire la dernière somme

$$\sum_{1\leq k<\ell\leq n}x_k(y_k-y_\ell)=\sum_{1\leq \ell<k\leq n}x_\ell(y_\ell-y_k)$$

et alors

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}(x_ky_k-x_ky_\ell)=\sum_{1\leq \ell<k\leq n}(x_k-x_\ell)(y_k-y_\ell).$$

Les termes sommés sont alors tous de même signe, à savoir positif si les suites $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ ont même monotonie et négatifs si ces deux suites sont de monotonies contraires.
Au final, si les deux suites ont même monotonie alors

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

et si les deux suites sont de monotonies contraires alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\leq\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k\right).$$

Exercice 12 : [énoncé]

On détermine la valeur du min *en commençant par comparer xy et $(1-x)(1-y)$.*

En développant le second membre,

$$\begin{aligned}xy\leq(1-x)(1-y)&\iff xy\leq 1-x-y+xy\\&\iff x+y\leq 1.\end{aligned}$$

Distinguons alors deux cas.
Cas: $x+y\leq 1$. On a

$$\min\{xy,(1-x)(1-y)\}=xy\quad\text{et}\quad y\leq 1-x$$

et donc

$$\min\{xy,(1-x)(1-y)\}\leq x(1-x)\quad\text{car}\quad x\geq 0.$$

Or on sait[2] $x(1-x)\leq 1/4$ pour tout x réel et donc

$$\min\{xy,(1-x)(1-y)\}\leq\frac{1}{4}.$$

Cas: $x+y>1$. L'étude est analogue

$$\min\{xy,(1-x)(1-y)\}=(1-x)(1-y)<(1-x)x\leq\frac{1}{4}.$$

Dans les deux cas, l'inégalité voulue est établie.

Exercice 13 : [énoncé]

(a) L'équation étudiée a du sens pour tout $x\in\mathbb{R}^*$.

La fonction inverse n'est décroissante que sur les intervalles constituant $\mathbb{R}^*$: l'inéquation étudiée est équivalente à $x\geq 2$ seulement pour $x>0$.

Distinguons deux cas.
Cas: $x<0$. L'inéquation est immédiatement vérifiée.
Cas: $x>0$. Par la stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$\frac{1}{x}\leq\frac{1}{2}\iff x\geq 2.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc $]-\infty\,;0[\,\cup\,[2\,;+\infty[$.

(b) L'équation a du sens pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

On étudie le signe de la différence[3] des deux membres.

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{x+2}\leq 1&\iff\frac{2x-1}{x+2}-1\leq 0\\&\iff\frac{x-3}{x+2}\leq 0.\end{aligned}$$

2. Voir sujet .
3. Simplifier l'équation en commençant par la multiplier par $x+2$ nécessite de discuter selon le signe de $x+2$.

Le signe du dernier quotient est aussi celui du trinôme $(x+2)(x-3)$: il est négatif entre les racines. L'ensemble des solutions de l'inéquation étudiée est donc $[-2\,;3]$.

(c) L'inéquation étudiée a du sens pour $x \geq 1$.

On simplifie la racine par élévation au carré après avoir isoler celle-ci dans l'un des membres.

$$3+\sqrt{x-1}<x \iff \sqrt{x-1}<x-3$$
$$\iff x-3\geq 0 \quad\text{et}\quad x-1<(x-3)^2$$

(la condition $x-3\geq 0$ permet de conserver [4] l'équivalence).
On poursuit l'étude en résolvant l'inéquation obtenue

$$x-1<(x-3)^2 \iff x^2-7x+10>0.$$

Les racines du trinôme en premier membre sont 2 et 5 et donc

$$x-1<(x-3)^2 \iff x\in\,]-\infty\,;2[\,\cup\,]5\,;+\infty[.$$

Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation étudiée se résume à l'intervalle $]5\,;+\infty[$.

(d) L'inéquation étudiée a du sens pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On exprime chaque valeur absolue comme égale à la quantité ou à son opposé selon l'intervalle dans lequel se situe x.

On a

$$|2x-1|=\begin{cases}2x-1 & \text{si } x\in[1/2\,;+\infty[\\ 1-2x & \text{si } x\in\,]-\infty\,;1/2[\end{cases} \quad\text{et}\quad |x-3|=\begin{cases}x-3 & \text{si } x\in\,]3\,;+\infty[\\ 3-x & \text{si } x\in\,]-\infty\,;3].\end{cases}$$

Cas: $x\in\,]-\infty\,;1/2[$. L'inéquation $|2x-1|+|x-3|\geq 7$ s'écrit $4-3x\geq 7$ soit $x\leq -1$. Les solutions de cette dernière inéquation figurent toutes dans l'intervalle d'étude.
Cas: $x\in[1/2\,;3]$. L'inéquation étudiée s'exprime $x+2\geq 7$ soit $x\geq 5$: il ne figure pas de solutions à cette dernière dans l'intervalle en cours.
Cas: $x\in\,]3\,;+\infty[$. L'inéquation devient $x\geq 11/3$ ce qui détermine des solutions qui appartiennent toutes à l'intervalle considéré.
Finalement, l'ensemble des solutions de l'inéquation est
$]-\infty\,;-1]\cup[11/3\,;+\infty[$.

4. L'implication directe est acquise par la croissance de l'élévation au carré sur $\mathbb{R}_+$, l'implication réciproque grâce à la croissance de la fonction racine carrée et l'emploi de la formule $\sqrt{a^2}=|a|$.

Exercice 14 : [énoncé]
Nous allons nous contenter d'établir la deuxième inégalité :

$$\frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n}\leq \max\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n}\right\}.$$

En effet, une fois celle-ci acquise, il suffit de la reprendre avec les réels $-a_1,\dots,-a_n$ au lieu de $a_1,\dots,a_n$ pour que, par passage à l'opposé, l'inégalité soit renversée et que le max devienne un min.

On commence par examiner le cas $n=2$.

Quitte à échanger, supposons $a_1/b_1\leq a_2/b_2$ et montrons

$$\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}\leq\frac{a_2}{b_2}.$$

Les dénominateurs étant strictement positifs, cette inégalité équivaut à

$$(a_1+a_2)b_2\leq a_2(b_1+b_2).$$

Après développement et simplification, on obtient $a_1b_2\leq a_2b_1$ qui est simplement la retraduction de l'hypothèse de départ : $a_1/b_1\leq a_2/b_2$. Ainsi, l'inégalité voulue est vraie lorsque $n=2$. On poursuit par récurrence.
Supposons l'inégalité vraie au rang $n\geq 2$. Avec des notations entendues, on souhaite établir l'inégalité au rang $n+1$:

$$\frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{b_1+\dots+b_n+a_{n+1}}\leq\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\dots,\frac{a_n}{b_n},\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right\}.$$

Par regroupement, on se ramène au cas $n=2$.

Posons

$$\alpha_1=a_1+\dots+a_n,\quad \alpha_2=a_{n+1},\quad \beta_1=b_1+\dots+b_n\quad\text{et}\quad\beta_2=b_2.$$

Par l'étude du cas $n=2$, on peut affirmer

$$\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\beta_1+\beta_2}\leq\max\left\{\frac{\alpha_1}{\beta_1},\frac{\alpha_2}{\beta_2}\right\}$$

soit encore

$$\frac{a_1+\dots+a_n+a_{n+1}}{b_1+\dots+b_n+a_{n+1}}\leq\max\left\{\frac{a_1+\dots+a_n}{b_1+\dots+b_n},\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right\}.$$

On poursuit et on conclut en employant l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}\frac{a_1+\cdots+a_n+a_{n+1}}{b_1+\cdots+b_n+a_{n+1}} &\leq \max\left\{\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\ldots,\frac{a_n}{b_n}\right\},\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right\}\\ &= \max\left\{\frac{a_1}{b_1},\ldots,\frac{a_n}{b_n},\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right\}.\end{aligned}$$

La récurrence est établie.

Exercice 15 : [énoncé]

Si $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1/2$ et $\lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1/2$ alors

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &= \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor,\\ \lfloor 2x\rfloor &= 2\lfloor x\rfloor \text{ et}\\ \lfloor 2y\rfloor &= 2\lfloor y\rfloor\end{aligned}$$

puis relation voulue.

Si $\lfloor x\rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor \leq y < \lfloor y\rfloor + 1/2$ alors

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &\leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1,\\ \lfloor 2x\rfloor &= 2\lfloor x\rfloor + 1 \text{ et}\\ \lfloor 2y\rfloor &= 2\lfloor y\rfloor\end{aligned}$$

puis la relation voulue.

Si $\lfloor x\rfloor \leq x < \lfloor x\rfloor + 1/2$ et $\lfloor y\rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$: c'est analogue.

Si $\lfloor x\rfloor + 1/2 \leq x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor + 1/2 \leq y < \lfloor y\rfloor + 1$ alors

$$\begin{aligned}\lfloor x+y\rfloor &\leq \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2,\\ \lfloor 2x\rfloor &= 2\lfloor x\rfloor + 1 \text{ et}\\ \lfloor 2y\rfloor &= 2\lfloor y\rfloor + 1\end{aligned}$$

puis la relation voulue.

Dans tous les cas la relation proposée est vérifiée.

Exercice 16 : [énoncé]

Posons $m = \lfloor nx\rfloor$ et réalisons la division euclidienne de m par n : $m = nq + r$ avec $0 \leq r \leq n-1$.

On a $nq + r \leq nx < nq + r + 1$ donc pour tout $k \in \{0,\ldots,n-1\}$:

$$q + \frac{k+r}{n} \leq x + \frac{k}{n} < q + \frac{k+r+1}{n}.$$

Si $k + r < n$ alors $\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = q$ et si $k + r \geq n$ alors $\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = q + 1$.

Par suite

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = \sum_{k=0}^{n-r-1}\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor + \sum_{k=n-r}^{n-1}\left\lfloor x + \frac{k}{n}\right\rfloor = nq + r = m = \lfloor nx\rfloor.$$

Exercice 17 : [énoncé]

Si $a \notin \mathbb{Z}$ alors $[a\,;b] \cap \mathbb{Z} = \left\{\lfloor a\rfloor + 1, \lfloor a\rfloor + 2, \ldots, \lfloor b\rfloor\right\}$ donc

$$\operatorname{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b\rfloor - \lfloor a\rfloor.$$

Or

$$\lfloor 1-a\rfloor = 1 + \lfloor -a\rfloor = -\lfloor a\rfloor$$

car $a \notin \mathbb{Z}$ donc

$$\operatorname{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor.$$

Si $a \in \mathbb{Z}$ alors $[a\,;b] \cap \mathbb{Z} = \left\{a, a+1, \ldots, \lfloor b\rfloor\right\}$ donc

$$\operatorname{Card}([a\,;b]\cap\mathbb{Z}) = \lfloor b\rfloor - a + 1 = \lfloor b\rfloor + \lfloor 1-a\rfloor$$

car $1 - a \in \mathbb{Z}$.

Exercice 18 : [énoncé]

(a) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Pour $n = 1$, $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$ conviennent.
Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$.

$$(2+\sqrt{3})^{n+1} = (2+\sqrt{3})(a_n + b_n\sqrt{3}) = a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{3}$$

avec $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ et $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ de sorte que

$$3b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = -a_n^2 + 3b_n^2 = -1.$$

Récurrence établie.

(b) $a_n - 1 \leq b_n\sqrt{3} < a_n$ donc $2a_n - 1 \leq (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$ donc

$$\left\lfloor(2+\sqrt{3})^n\right\rfloor = 2a_n - 1.$$

C'est un entier impair.

Exercice 19 : [énoncé]
C_n et S_n sont les parties réelles et imaginaires de

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}=(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n=2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\theta}{2}}\cos^n\frac{\theta}{2}.$$

Ainsi

$$C_n=2^n\cos\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}\text{ et }S_n=2^n\sin\frac{n\theta}{2}\cos^n\frac{\theta}{2}.$$

Exercice 20 : [énoncé]
On observe que $B=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$ est solution. Montrons qu'il n'y en a pas d'autres...
Posons $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ et $g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définies par

$$f(z)=1-z+z^2\text{ et }g(z)=1+z+z^2.$$

On remarque

$$\left|f(z)-\mathrm{i}\right|=|z+\mathrm{i}|\left|z-(1+\mathrm{i})\right|,\left|f(z)+\mathrm{i}\right|=|z-\mathrm{i}|\left|z-(1-\mathrm{i})\right|.$$

$$\left|g(z)-\mathrm{i}\right|=|z-\mathrm{i}||z+1+\mathrm{i}|\text{ et }\left|g(z)+\mathrm{i}\right|=|z+\mathrm{i}||z+1-\mathrm{i}|.$$

Soient $a\in B$ et $(z_n)_{n\geq0}$ la suite d'éléments de B définie par $z_0=a$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$z_{n+1}=\begin{cases}f(z_n) & \text{si }\operatorname{Re}(z_n)\leq0\\ g(z_n) & \text{si }\operatorname{Re}(z_n)>0.\end{cases}$$

Posons enfin

$$u_n=\left|z_n^2+1\right|=|z_n-\mathrm{i}||z_n+\mathrm{i}|.$$

Si $\operatorname{Re}(z_n)\leq0$ alors

$$u_{n+1}=\left|f(z_n)-\mathrm{i}\right|\left|f(z_n)+\mathrm{i}\right|=u_n\left|z_n-(1+\mathrm{i})\right|\left|z_n-(1-\mathrm{i})\right|.$$

Selon le signe de la partie imaginaire de z_n, l'un au moins des deux modules $\left|z_n-(1+\mathrm{i})\right|$ et $\left|z_n-(1-\mathrm{i})\right|$ est supérieur à $\sqrt{2}$ alors que l'autre est supérieur à 1.
Ainsi

$$u_{n+1}\geq\sqrt{2}u_n.$$

Si $\operatorname{Re}(z_n)>0$, on obtient le même résultat.
On en déduit que si $u_0\neq0$ alors la suite (u_n) n'est pas bornée. Or la partie B est bornée donc $u_0=0$ puis $a=\pm\mathrm{i}$. Ainsi $B\subset\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}$.
Sachant $B\neq\emptyset$ et sachant que l'appartenance de i entraîne celle de $-\mathrm{i}$ et inversement, on peut conclure

$$B=\{\mathrm{i},-\mathrm{i}\}.$$

Exercice 21 : [énoncé]
Rappelons que si u est un complexe de module alors $1/u=\overline{u}$.
On a alors

$$(z-a)^2=(z-a)\left(\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{\overline{a}}\right)=\frac{(z-a)(\overline{a}-\overline{z})}{\overline{a}\overline{z}}=-a\frac{|z-a|^2}{\overline{z}}$$

donc

$$\frac{b}{a}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)^2=\frac{|z-a|^2}{|z-b|^2}\in\mathbb{R}_+^*.$$

Exercice 22 : [énoncé]

(a) $M=I$ est solution.
Pour $M\neq I$, I,M,M' sont alignés si, et seulement si, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IM'}=\lambda\overrightarrow{IM}$ i.e. $\frac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\in\mathbb{R}$.
Posons $x=\operatorname{Re}(z)$ et $y=\operatorname{Im}(z)$.
$$\operatorname{Im}\left(\frac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}\right)=0\iff x(x-1)+y(y-1)=0\iff\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2=\tfrac{1}{2}.$$
Finalement le lieu des points M solutions est le cercle de centre $\Omega\left|\begin{matrix}1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$.

(b) Le point M' est l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$.
Le lieu des points M' est donc le cercle de centre $\Omega'\left|\begin{matrix}-1/2\\1/2\end{matrix}\right.$ et de rayon $1/\sqrt{2}$

Exercice 23 : [énoncé]
Soit z un complexe du cercle unité avec $z\neq1$. Il existe $\theta\in\left]0\,;2\pi\right[$ tel que $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
On a alors

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}\frac{\mathrm{i}}{2\sin\theta/2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\cot\frac{\theta}{2}.$$

Quand θ parcourt $\left]0\,;2\pi\right[$ (ce qui revient à faire parcourir à z le cercle unité), l'expression $\cot(\theta/2)$ prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. L'image du cercle unité est la droite d'équation $x=1/2$.

Exercice 24 : [énoncé]
Soit $M(z)$ solution avec $z=a+\mathrm{i}b$ et $a,b\in\mathbb{R}$.
On a $2a=\sqrt{a^2+b^2}$ donc $a\geq0$ et $b=\pm\sqrt{3}a$.

Ainsi M se situe sur les demi-droites d'origine O dirigée par les vecteurs

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\\sqrt{3}\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad\vec{v}\begin{pmatrix}1\\-\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

Inversement : ok.

Exercice 25 : [énoncé]
En multipliant les trois complexes t,u,v par $e^{i\theta}$, on peut former un nouveau triplet solution à partir d'un premier. Sans perte de généralité, on peut donc supposer $t\in\mathbb{R}_+$ auquel cas $t=a$.
En écrivant $u=x+iy$ et $v=x'+iy'$ avec $x,x',y,y'\in\mathbb{R}$, la condition $t+u+v=0$ donne

$$\begin{cases}x'=-(a+x)\\y'=-y\end{cases}$$

et les deux conditions $u\overline{u}=b^2$ et $v\overline{v}=c^2$ équivalent alors au système

$$\begin{cases}x^2+y^2=b^2\\(x+a)^2+y^2=c^2.\end{cases}$$

Ce système possède une solution si, et seulement si, le cercle de centre O et de rayon b coupe le cercle de centre $\Omega(-a,0)$ et de rayon c. Ces deux cercles se coupent si, et seulement si,

$$|b-c|\le a\le b+c.$$

On peut alors conclure que le triplet (t,u,v) existe si, et seulement si, chacun des paramètres a,b,c est inférieur à la somme des deux autres.

Exercice 26 : [énoncé]

(a) *Un triangle est équilatéral lorsqu'il est isocèle et possède un angle de $\pi/3$.*

Introduisons le complexe non nul

$$Z=\frac{c-a}{b-a}$$

Le triangle (ABC) est isocèle en A si, et seulement si, $|c-a|=|b-a|$: ceci revient à affirmer que le nombre Z est de module 1 : connaître un argument de celui-ci suffit à le déterminer. Or un argument de Z correspond à une mesure de l'angle orienté du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\overrightarrow{AC}$. Le triangle est alors équilatéral si cette mesure correspond[5] à $\pi/3$ ou à $-\pi/3$. On obtient donc que le triangle (ABC) est équilatéral si, et seulement si,

$$\frac{c-a}{b-a}=e^{i\pi/3}\quad\text{ou}\quad\frac{b-a}{c-a}=e^{-i\pi/3}.$$

On conclut en observant $e^{i\pi/3}=-j^2$ et $e^{-i\pi/3}=-j$.

(b) Sachant $1+j+j^2=0$, on observe

$$\frac{c-a}{b-a}=-j\iff c-a=-j(b-a)\iff -(1+j)a+jb+c=0\iff aj^2+bj+c=0.$$

On obtient de même

$$\frac{c-a}{b-a}=-j^2\iff aj+bj^2+c=0.$$

Enfin, sachant $j^3=1$, on observe par simple développement

$$\begin{aligned}(aj^2+bj+c)(aj+bj^2+c)&=a^2+b^2+c^2+ab(j+j^2)+bc(j+j^2)+ca(j+j^2)\\&=a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca).\end{aligned}$$

On en déduit que le triangle (ABC) est équilatéral direct si, et seulement si,

$$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)=0.$$

Exercice 27 : [énoncé]
$|z|^2=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4$ donc $|z|=2$.
Posons θ un argument de z qu'on peut choisir dans $[0\,;\pi/2]$ car $\mathrm{Re}(z),\mathrm{Im}(z)\ge 0$.
On a $\cos\theta=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ donc

$$\cos(2\theta)=2\cos^2\theta-1=\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{2}\right)-1=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

avec $2\theta\in[0\,;\pi]$ donc $2\theta=\pi/4$ puis $\theta=\pi/8$.

5. Dans le premier cas, on dit que le triangle (ABC) est *équilatéral direct* puisque l'appellation A,B,C de ses sommets est réalisée dans le sens direct.

Exercice 28 : [énoncé]
($\Longleftarrow$) ok
($\Longrightarrow$) Si $|z+z'| = |z| + |z'|$ alors, en divisant par $|z|$: $|1+x| = 1+|x|$ avec $x = z'/z \in \mathbb{C}$.
Écrivons $x = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

$$|1+x|^2 = (a+1)^2 + b^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2a$$

et

$$\big(1+|x|\big)^2 = (1+\sqrt{a^2+b^2})^2 = 1 + a^2 + b^2 + 2\sqrt{a^2+b^2}$$

$|1+x| = 1+|x|$ donne alors $a = \sqrt{a^2+b^2}$ d'où $b = 0$ et $a \geq 0$.
Par suite $x \in \mathbb{R}_+$ et on conclut.

Exercice 29 : [énoncé]
On a

$$|z| + |z'| = \frac{1}{2}\big|(z-z') + (z+z')\big| + \frac{1}{2}\big|(z'-z) + (z'+z)\big| \leq |z+z'| + |z-z'|.$$

Interprétation : Dans un parallélogramme la somme des longueurs de deux côtés est inférieure à la somme des longueurs des diagonales.
Il y a égalité si, et seulement si, : $z - z' = 0$ (*i.e.* $z = z'$) ou $\frac{z+z'}{z-z'} \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{z+z'}{z'-z} \in \mathbb{R}_+$ ce qui se résume à $z' = -z$.

Exercice 30 : [énoncé]
Pour que la quantité soit définie il est nécessaire que $z \neq 1/\overline{a}$.
Si tel est le cas

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 \iff |z-a|^2 \leq \big|1-\overline{a}z\big|^2.$$

Sachant $|x+y|^2 = |x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\overline{x}y) + |y|^2$, on obtient

$$\left|\frac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| \leq 1 \iff \big(|a|^2-1\big)\big(|z|^2-1\big) \geq 0.$$

L'ensemble recherché est l'ensemble des complexes de module inférieur à 1.

Exercice 31 : [énoncé]

(a) En développant

$$|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) = |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + \overline{z}_1 z_2 + |z_2|^2$$

et la relation écrire est alors immédiate.

(b) On a

$$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 \leq 4$$

donc parmi les quantités $|z_1+z_2|$ et $|z_1-z_2|$, l'une au moins est de carré inférieur à 2.

Exercice 32 : [énoncé]
Soit $z \in \mathbb{C}$.
Si $z \in \mathbb{R}_-$ alors $f(z) = 0$.
Sinon, on peut écrire $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[$ et alors

$$f(z) = r\frac{1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{2} = r\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}.$$

Puisque $\cos(\theta/2) \geq 0$

$$\big|f(z)\big| = r\cos\frac{\theta}{2} \text{ et } \arg f(z) = \frac{\theta}{2}$$

donc

$$f(z) \in \{Z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\,Z > 0\}.$$

Inversement, soit $Z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\,Z > 0$.
On peut écrire $Z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $R > 0$ et $\alpha \in \left]-\pi/2\,;\pi/2\right[$. Pour

$$z = \frac{R}{\cos\alpha}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\alpha}$$

les calculs qui précèdent donnent

$$f(z) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} = Z.$$

Finalement, les valeurs prises par f sont les complexes de parties réelles strictement positives ainsi que le complexe nul.

Exercice 33 : [énoncé]
$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1$ et $(|z|+1)^2 = |z|^2 + 2|z| + 1$ donc
$|z+1| = |z| + 1 \iff \mathrm{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 34 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Par factorisation d'exponentielle équilibrée

$$|\omega_k - 1| = 2\left|\sin\frac{k\pi}{n}\right|.$$

Alors

$$\sum_{z\in U_n} |z-1| = \sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{k\pi}{n} = 2\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}}\right)$$
$$= 4\,\mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}}\right) = 2\frac{\cos\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = 2\cot\frac{\pi}{2n}.$$

Exercice 35 : [énoncé]
Quitte à réindexer, on peut supposer

$$\forall k \in \{1,\dots,n\}, \omega_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n} = \omega^k \text{ avec } \omega = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}.$$

(a) Si n ne divise pas p alors, puisque $\omega^p \neq 1$

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \omega^p \frac{1-\omega^{np}}{1-\omega^p} = 0.$$

Si n divise p alors

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} \omega^{kp} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

(b) Pour $1 \leq k \leq n-1$, on a

$$\frac{1}{1-\omega_k} = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\pi/n}\frac{1}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}} = \frac{\mathrm{i}}{2}\cot\frac{k\pi}{n} + \frac{1}{2}.$$

Puisque

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} \underset{\ell=n-k}{=} \sum_{\ell=1}^{n-1}\cot\left(\pi - \frac{\ell\pi}{n}\right) = \sum_{\ell=1}^{n-1} -\cot\left(\frac{\ell\pi}{n}\right)$$

on a

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cot\frac{k\pi}{n} = 0$$

puis

$$T = \frac{(n-1)}{2}.$$

On peut aussi lier le calcul au précédent en écrivant

$$\frac{1}{1-\omega_i} = \sum_{p=0}^{n-1}\omega_i^p + \frac{\omega_i^n}{1-\omega_i}.$$

On peut aussi retrouver cette relation en considérant que T est la somme des racines d'un polynôme bien construit

$$P^n = (X-1)^n - X^n = -nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^{n-2} + \dots$$

Exercice 36 : [énoncé]
On a

$$(1-\omega)S = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\omega^k - \sum_{k=1}^{n} k\omega^k = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^k - n\omega^n = -n$$

donc

$$S = \frac{n}{\omega - 1}.$$

Exercice 37 : [énoncé]

(a)

$$j(j+1) = j^2 + j = -1.$$

(b)

$$\frac{j}{j^2+1} = \frac{j}{-j} = -1.$$

(c)

$$\frac{j+1}{j-1} = \frac{(j+1)\overline{(j-1)}}{(j-1)\overline{(j-1)}} = \frac{(j+1)(j^2-1)}{(j-1)(j^2-1)} = \frac{j^3+j^2-j-1}{j^3-j^2-j+1} = \frac{-1-2j}{3}.$$

Exercice 38 : [énoncé]
Notons $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ les racines $n$ème de l'unité.
Si z est solution alors nécessairement $z \neq 1$ et $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1$ donc il existe $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = \omega_k$$

ce qui donne

$$(\omega_k - 1)z = \omega_k + 1.$$

Si $k = 0$ alors ce la donne $0 = 2$ donc nécessairement $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $\omega_k \neq 1$.
Par suite

$$z = \frac{\omega_k + 1}{\omega_k - 1} = \frac{2\cos\frac{k\pi}{n}}{2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}} = -\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n}.$$

Inversement, en remontant le calcul : ok
Finalement

$$\mathcal{S} = \left\{-\mathrm{i}\cot\frac{k\pi}{n} \;\middle|\; k \in \{1, \dots, n-1\}\right\}.$$

Puisque la fonction cot est injective sur $]0\,;\pi[$, il y a exactement $n-1$ solutions.

Exercice 39 : [énoncé]
On a

$$1 + A + B = 0, AB = 2 \text{ et } \operatorname{Im}(A) > 0$$

donc

$$A = \overline{B} = \frac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{7}}{2}.$$

Exercice 40 : [énoncé]

(a) Puisque les racines de l'équation $z^n - 1$ sont $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$, on a

$$z^n - 1 = (z-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - \omega^k).$$

Or on a aussi $z^n - 1 = (z-1)(1 + z + \dots + z^{n-1})$ d'où l'égalité proposée pour $z \neq 1$.

(b) Les fonctions $x \mapsto \prod_{k=1}^{n-1}(x - \omega^k)$ et $x \mapsto \sum_{\ell=0}^{n-1} x^\ell$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, elles coïncident donc aussi en 1 par passage à la limite.

(c) Pour $z = 1$, l'égalité du a) donne $\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = n$. Or par factorisation de l'exponentielle équilibrée,

$$1 - \omega^k = -\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{n}} 2\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n}$$

et

$$\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n-1} k} = \mathrm{i}^{n-1}$$

donc

$$\prod_{k=1}^{n-1}(1 - \omega^k) = 2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

puis la relation proposée.

Exercice 41 : [énoncé]
Puisque la somme des racines 5-ième de l'unité est nulle, en considérant la partie réelle, on obtient

$$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0.$$

Sachant $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on obtient que $\cos(2\pi/5)$ est solution positive de l'équation

$$4r^2 + 2r - 1 = 0$$

et donc

$$\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}.$$

Or $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donc

$$1 - 2\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

puis

$$\sin^2\frac{\pi}{5} = \frac{5 - \sqrt{5}}{8}$$

et enfin la formule proposée puisque $\sin(\pi/5) \geq 0$.

Exercice 42 : [énoncé]
$x = 1$ est solution de l'équation si, et seulement si, $a^2 - 2a - 3 = 0$ ce qui donne $a = -1$ ou $a = 3$.
Lorsque $a = -1$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}, -\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Lorsque $a = 3$, les solutions de l'équation sont $1, \frac{-3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}, -\frac{3+\mathrm{i}3\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 43 : [énoncé]

(a) $\mathcal{S} = \{1, -1 + 2\mathrm{i}\}$,

(b) $\mathcal{S} = \{-1 + \mathrm{i}, -3 + 2\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}, 3 - 2\mathrm{i}\}$.

Exercice 44 : [énoncé]

(a) $\pm(3-2\mathrm{i})$

(b) $a=-2\mathrm{i}, b=-1+3i$ et $c=2+\mathrm{i}$

(c) $|c-b|=|c-a|=\sqrt{13}$ et $|b-a|=\sqrt{26}$. Le triangle est rectangle isocèle.

Exercice 45 : [énoncé]
Il s'agit d'un système somme produit, on obtient ses solutions en résolvant l'équation

$$z^2-(1+\mathrm{i})z+(2-\mathrm{i})=0.$$

On obtient l'ensemble solution

$$\mathcal{S}=\left\{(1+2\mathrm{i},-\mathrm{i}),(-\mathrm{i},1+2\mathrm{i})\right\}.$$

Exercice 46 : [énoncé]

> *On simplifie l'expression de l'équation en divisant par abc lorsque cela est possible.*

Les nombres a, b et c jouant des rôles analogues, on peut [6] mener la résolution en supposant $a\leq b\leq c$.
Cas: $a=0$. L'équation étudiée se simplifie en $bc=0$ dont les solutions respectant la condition $b\leq c$ sont les $(0,k)$ avec $k\in\mathbb{N}$.
Désormais, on suppose $a\neq 0$ ce qui entraîne la non nullité de b et c. On peut alors diviser l'équation étudiée par abc afin de l'écrire

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1. \tag{1}$$

Cas: $a=1$. L'équation précédente devient

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$$

qui est impossible car b et c sont strictement positifs.
Cas: $a=2$. L'équation (**??**) devient

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}.$$

Avoir $b=2$ est impossible car $c>0$. En revanche, $b=3$ et $b=4$ sont possibles et conduisent respectivement à $c=6$ et $c=4$. Enfin, $b>4$ n'est pas possible puisque $c\geq b$ et qu'alors $1/b+1/c<1/2$.
Cas: $a=3$. L'équation (**??**) devient

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{2}{3}.$$

L'équation est impossible pour $b>3$ car alors $1/b+1/c<2/3$. En revanche, $b=3$ est possible et mène à $c=3$.
Cas: $a>3$. Il ne peut y avoir de solutions avec $c\geq b\geq a$ car

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{a}<1.$$

En résumé, les triplets $(a,b,c)\in\mathbb{N}^3$ sont, à l'ordre près des éléments :

$$(0,0,k)\ (\text{pour } k\in\mathbb{N}),\quad (2,3,6),\quad (2,4,4)\quad \text{et}\quad (3,3,3).$$

6. L'ensemble de toutes les solutions se déduira de celles produites par permutation de celles-ci.

Exercice 47 : [énoncé]
Posons $\rho=|Z|$ et $\theta=\arg Z\ [2\pi]$.

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^z=Z &\iff \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} z}=|Z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\\ &\iff \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}=|Z| \text{ et } \mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Im} z}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\\ &\iff z=\ln\rho+\ i\theta+2\mathrm{i}k\pi \text{ avec } k\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Exercice 48 : [énoncé]
En factorisant $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}$ au numérateur et au dénominateur

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}=\frac{\mathrm{i}\sin\theta/2}{\cos\theta/2}=\mathrm{i}\tan\frac{\theta}{2}.$$

Exercice 49 : [énoncé]
On peut factoriser

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta'}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta-\theta'}{2}}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\theta-\theta'}{2}})=2\cos\frac{\theta-\theta'}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+\theta'}{2}}$$

ce qui permet de préciser module et argument en discutant selon le signe de $\cos\frac{\theta-\theta'}{2}$.