Années d'utilisation :

Correction

Partie I

1. Puisque $[A,A']$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et que $B\in\mathcal{C}$, le triangle (ABA') est rectangle en B. Par suite, B est le projeté orthogonal de A' sur $\mathcal{D}$. Par suite $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=\overline{MA}.\overline{MB}$.
De plus $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}=\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}\right)\cdot\left(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A'}\right)=M\Omega^2-R^2$ car $\overrightarrow{\Omega A'}=-\overrightarrow{\Omega A}$ et $\Omega A=R$.

2.a Le cercle de diamètre $[\Omega,M]$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en des points T et S tels que les triangles (ΩTM) et (ΩSM) soient rectangles en T et S. Les droites (TM) et (SM) sont les tangentes à $\mathcal{C}$ issues de M.

2.b Les triangles (ΩTM) et (ΩSM) étant rectangles en T et S, le théorème de Pythagore donne :
$\Omega M^2=MT^2+T\Omega^2=MS^2+S\Omega^2$ d'où $MT^2=MS^2=\Omega M^2-R^2=p_{\mathcal{C}}(M)$.

3. Si A,B,C,D appartiennent à un même cercle $\mathcal{C}$ alors $\overline{MA}.\overline{MB}=p_{\mathcal{C}}(M)=\overline{MC}.\overline{MD}$.
Inversement, supposons $\overline{MA}.\overline{MB}=\overline{MC}.\overline{MD}$.
Puisque les quatre points A,B,C,D ne sont pas alignés, il en existe au moins trois qui ne le sont pas.
Quitte à échanger, supposons A,B,C non alignés et considérons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle (ABC). Le point M est nécessairement distinct de C car $M\in(AB)$. La droite (MC) coupe le cercle $\mathcal{C}$ en les points C et C' (éventuellement confondus en cas de tangence) tels que $\overline{MC}.\overline{MC'}=p_{\mathcal{C}}(M)$.
Or $\overline{MA}.\overline{MB}=p_{\mathcal{C}}(M)$ donc $\overline{MC}.\overline{MC'}=\overline{MC}.\overline{MD}$ .Puisque $\overline{MC}\neq 0$, on a $\overline{MC'}=\overline{MD}$ et donc $C'=D$.
Par suite les points A,B,C,D sont cocycliques.

Partie II

1.a $p_{\mathcal{C}'}(M)=p_{\mathcal{C}}(M)\Leftrightarrow \Omega'M^2-\Omega M^2=R'^2-R^2$.
Or $\Omega'M^2-\Omega M^2=\left(\overrightarrow{\Omega'M}-\overrightarrow{\Omega M}\right)\cdot\left(\overrightarrow{\Omega'M}+\overrightarrow{\Omega M}\right)=2\overrightarrow{\Omega'\Omega}\cdot\overrightarrow{IM}$
donc $p_{\mathcal{C}'}(M)=p_{\mathcal{C}}(M)\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{IM}=k$ avec $k=\dfrac{1}{2}\left(R^2-R'^2\right)$.

1.b (1) On sait que les lignes de niveaux $\vec{u}\cdot\overrightarrow{AM}=\lambda$ (avec $\vec{u}\neq 0$) sont des droites dont $\vec{u}$ est vecteur normal. On peut donc conclure.
(2) Considérons J le point $(\Omega\Omega')$ déterminé par $\overline{\Omega\Omega'}.\overline{IJ}=k$, on a $J\in\Delta$.
Alors $\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{IM}=k\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{IM}=\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{IJ}\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\left(\overrightarrow{IM}-\overrightarrow{IJ}\right)=0\Leftrightarrow\overrightarrow{\Omega\Omega'}\cdot\overrightarrow{JM}=0$
donc Δ est la droite passant par J dont $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est vecteur normal.

2.a On a $p_{\mathcal{C}}(A)=0=p_{\mathcal{C}'}(A)$ donc $A\in\Delta$ et de même $B\in\Delta$ d'où $\Delta=(AB)$.

2.b Comme ci dessus $A\in\Delta$. Δ est donc la perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ en A.

3. Puisque les droites $(\Omega\Omega')$ et $(\Omega\Omega'')$ ne sont pas parallèles, il en est de même des axes radicaux Δ'' et Δ' qui leurs sont orthogonaux. Notons R le point de concours de Δ' et Δ''.
On a $p_{\mathcal{C}'}(R)=p_{\mathcal{C}}(R)$ car $R\in\Delta''$ et $p_{\mathcal{C}''}(R)=p_{\mathcal{C}}(R)$ car $R\in\Delta'$, par suite $p_{\mathcal{C}'}(R)=p_{\mathcal{C}''}(R)$ et donc $R\in\Delta$. Ainsi les trois droites Δ,Δ',Δ'' concourent en M.

4. Considérons un cercle $\mathcal{C}''$ de centre $\Omega''\notin(\Omega\Omega')$ coupant les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.
Puisque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}''$ sont sécants on peut construire (cf. question 2) leur axe radical Δ'.
Puisque $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ sont sécants on peut construire leur axe radical Δ''.
Le point de concours de Δ' et Δ'' est le centre radical R des trois cercles.
Δ est la perpendiculaire à $(\Omega\Omega')$ passant par R.