Correction

d'après ENAC Pilotes 1989

1. $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ est une fonction continue positive donc $F : X \to \int_0^X \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ est croissante.

   Pour $t \geq 1$, $\mathrm{e}^{-t^2} \leq \mathrm{e}^{-t}$ donc $F(X) \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + \int_1^X \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + 1 - \mathrm{e}^{-X} \leq \int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x + 1$.

   Ainsi la fonction F est majorée. Par suite F converge en $+\infty$.

2.a $a_0 = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $a_1 = \int_0^{\pi/2} \cos x \mathrm{d}x = 1$.

2.b $x \mapsto \cos^{n+1} x$ est continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_{n+1} > 0$.

   $x \mapsto \cos^n x - \cos^{n+1} x = \cos^n x(1 - \cos x)$ est aussi continue, positive sans être la fonction nulle sur $[0, \pi/2]$ donc $a_n > a_{n+1}$.

2.c $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 x)\cos^{n-2} x \mathrm{d}x = a_{n-2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^{n-2} x \mathrm{d}x$

   donc $a_n = a_{n-2} + \left[\frac{1}{n-1}\sin x \cos^{n-1} x\right]_0^{\pi/2} - \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2} \cos^n x \mathrm{d}x = a_{n-2} - \frac{1}{n-1} a_n$

   d'où la relation $a_n = \frac{n-1}{n} a_{n-2}$.

2.d Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

   Pour $n = 1$: $n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.

   Supposons la propriété établie au rang $n \geq 1$:

   $(n+1) a_{n+1} a_n = n a_{n-1} a_n = \frac{\pi}{2}$.

   Récurrence établie.

2.e $a_{n+1} < a_n < a_{n-1}$ donne $\frac{n}{n+1} a_{n-1} < a_n < a_{n-1}$ puis $\frac{n}{n+1} < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1$ d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1$.

2.f Le résultat ci-dessus donne $a_{n-1} \sim a_n$ et la relation $n a_n a_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ conduit à $n a_n^2 \sim \frac{\pi}{2}$ d'où $a_n \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2n}}$.

   Il en découle $a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

3. h est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$ d'où :

x	-1		0		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

.

   Il en découler : $\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$.

4.a La fonction $X \mapsto \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n}$ est évidemment croissante de part la positivité de la fonction intégrée.

   Le changement de variable proposé donne $\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n} = \int_0^{\arctan\frac{X}{\sqrt{n}}} \frac{\mathrm{d}t}{(1 + \tan^2 t)^{n-1}}$.

On en déduit $\displaystyle\int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \le \frac{\pi}{2}$.

La fonction $\displaystyle X \mapsto \int_0^X \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$ étant croissante et majorée, elle converge en $+\infty$ et c_n existe.

4.b $\forall x \in \left[0,\sqrt{n}\right[$, $\left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right)} \le \mathrm{e}^{-x^2}$ car $-\frac{x^2}{n} \in \left]-1,0\right]$ donc $\ln\left(1-\frac{x^2}{n}\right) \le -\frac{x^2}{n}$.

Par suite : $b_n \le \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

$\forall x \in \left[0,\sqrt{n}\right]$, $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)} \ge \mathrm{e}^{-x^2}$ car $\frac{x^2}{n} \ge 0$ donc $\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right) \le \frac{x^2}{n}$.

Par suite $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \int_0^{\sqrt{n}} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \le \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n}$.

4.c Pour réexprimer b_n, réalisons le changement de variable : $x = \sqrt{n}\sin t$:

$b_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{n}\cos t\left(1-\sin^2 t\right)^n \mathrm{d}t = \sqrt{n}a_{2n+1}$.

Pour réexprimer c_n, réalisons le changement de variable : $x = \sqrt{n}\tan t$:

$c_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{n}(1+\tan^2 t)\frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^n} = \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{(1+\tan^2 t)^{n-1}} = \sqrt{n}a_{2n-2}$ car $\frac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$.

5. $b_n = \sqrt{n}a_{2n+1} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $c_n = \sqrt{n}a_{2n-2} \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \to \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

L'encadrement de 4.b donne à la limite : $\displaystyle\frac{\sqrt{\pi}}{2} \le \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Finalement voilà la valeur de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.