Calcul et irrationalité de zeta(2)

Dans ce problème, pour une fonction f et un entier naturel k, $f^{(k)}$ désigne la dérivée k ème de la fonction f avec $f^{(0)} = f$ .Sauf s'il est précisé entier naturel, un entier peut être positif ou négatif.
Les parties I, II et IV sont indépendantes entre elles.

Partie I – Convergence de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}\right)_{n\geq 1}$

Dans cette partie, p et n sont deux entiers naturels non nuls avec $p \geq 2$, et on pose $S_n(p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}$.

1. Etudier la monotonie de la suite $(S_n(p))_{n\geq 1}$.

2.a Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, $\frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t^p} \mathrm{d}t \leq \frac{1}{k^p}$.

2.b Montrer que pour tout $n \geq 2$, $S_n(p) - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^p} \mathrm{d}x \leq \frac{1}{p-1}$.

2.c Conclure que $S_n(p)$ converge. On pose $\zeta(p) = \lim_{n\to+\infty} S_n(p)$.

Partie II – Nombres de Bernoulli

1. Soit f une fonction définie et continue sur $[0,\pi]$ à valeurs réelles.
Montrer qu'il existe une unique fonction $F : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$F' = f \text{ et } \int_0^{\pi} F(t)\mathrm{d}t = 0$$

2. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on considère les fonctions $B_p : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$B_0 = 1 \text{ et } \forall p \in \mathbb{N} ,\ B'_{p+1} = B_p \text{ et } \int_0^{\pi} B_{p+1}(t)\mathrm{d}t = 0 .$$

2.a Exprimer $B_1(t)$ et $B_2(t)$.

2.b Montrer que pour tout $p \geq 2$, $B_p(0) = B_p(\pi)$.

3.a Montrer qu'il existe une unique suite réelle $(\beta_p)_{p\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\beta_0 = 1 \text{ et pour tout } p \geq 2 ,\ \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \beta_{p-k} = 0$$

3.b Calculer β_1, β_2 , β_3 et β_4 .

4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit $\hat{B}_p : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0,\pi] ,\ \hat{B}_p(t) = \frac{1}{p!} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \beta_{p-k} \pi^{p-k} t^k .$$

4.a Calculer $\int_0^{\pi} \hat{B}_p(t)\mathrm{d}t$ et observer que pour tout $p \geq 1$, $\hat{B}_p{}'(t) = \hat{B}_{p-1}(t)$.

4.b En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $B_p = \hat{B}_p$.

4.c Que vaut $B_p(0)$?

Partie III – Calcul de $\zeta(2p)$

1. Calculer, pour $t \in]0,\pi]$, $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kt)$ puis déterminer une constante λ telle que :

$$\forall t \in]0,\pi], \frac{\sin\left((2n+1)t\right)}{2\sin t} = \sum_{k=1}^{n} \cos(2kt) + \lambda$$

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour toute fonction $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\pi} f(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t = 0$$

3. Pour des entiers $p \geq 0$ et $k > 0$, on pose $I_{p,k} = \int_0^{\pi} B_{2p}(t)\cos(2kt)\mathrm{d}t$.

3.a A l'aide de deux intégrations par parties, calculer $I_{1,k}$.

3.b Trouver, pour $p \geq 2$, une relation entre $I_{p,k}$ et $I_{p-1,k}$.

3.c En déduire l'expression de $I_{p,k}$ en fonction de p et de k.

4. On suppose $p \geq 1$ et on définit la fonction $\varphi_p : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_p(0) = 0,\ \varphi_p(\pi) = 0 \text{ et } \forall t \in]0,\pi[,\ \varphi_p(t) = \frac{B_{2p}(t) - B_{2p}(0)}{\sin t}.$$

Nous **admettons** que cette fonction φ_p est de classe $\mathcal{C}^1$.

4.a Exprimer $\int_0^{\pi} \varphi_p(t)\sin\left((2n+1)t\right)\mathrm{d}t$ en fonction de $p \geq 1$, de n et de $B_{2p}(0)$.

4.b En déduire la valeur de $\zeta(2p)$ en fonction de p et de $B_{2p}(0)$.

5. Donner les valeurs de $\zeta(2)$ et de $\zeta(4)$.

Partie IV – Irrationalité de $\zeta(2)$

Dans cette partie, pour n entier naturel non nul et x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$.

1. Dans cette question, n est un entier naturel non nul.

1.a Montrer qu'il existe $n+1$ entiers $e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{2n}$ tels que $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} e_i x^i$.

1.b Montrer que pour tout entier naturel k, $f_n^{(k)}(0)$ est entier.

1.c En remarquant que $f_n(x) = f_n(1-x)$, observer $f_n^{(k)}(1)$ est aussi entier pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On veut montrer que π^2 est un irrationnel, et on va **raisonner par l'absurde :** on suppose que $\pi^2 = \dfrac{a}{b}$ où a et b sont deux entiers naturels non nuls.

2. On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :
$F_n(x) = b^n\left(\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right)$.

2.a Montrer que $F_n(0)$ et $F_n(1)$ sont des entiers.

2.b On pose, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$g_n(x) = F_n'(x)\sin(\pi x) - \pi F_n(x)\cos(\pi x)$$

Montrer que, pour n entier naturel non nul et x réel :

$$g_n'(x) = \pi^2 a^n f_n(x)\sin(\pi x).$$

2.c Etablir que $A_n = \pi\int_0^1 a^n f_n(x)\sin(\pi x)\mathrm{d}x$ est un entier.

3. On pose, toujours pour le même entier a , $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$.

3.a Montrer qu'il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n < \dfrac{1}{2}$.

3.b Montrer que pour tout réel $x \in [0,1]$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n!}$.

3.c Montrer alors que, pour tout entier $n \geq n_0$, $A_n \in]0,1[$ et conclure que π^2 est irrationnel.

3.d Peut-on déduire de ce qui précède l'irrationalité de π ?