Convolution arithmétique

On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{F}$ d'une loi additive définie par :

$$\forall u,v\in\mathcal{F},\forall n\in\mathbb{N}^*,(u+v)(n)=u(n)+v(n)\,.$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

- D_n l'ensemble des $d\in\mathbb{N}^*$ tels que $d\mid n$.
- C_n l'ensemble des $(d_1,d_2)\in(\mathbb{N}^*)^2$ tels que $d_1d_2=n$.

On définit une seconde loi $\star$ sur $\mathcal{F}$ par :

$$\forall u,v\in\mathcal{F},\forall n\in\mathbb{N}^*,(u\star v)(n)=\sum_{d\in D_n}u(d)v(n/d)\,.$$

Par abus, on pourra aussi noter :

$$(u\star v)(n)=\sum_{d\mid n}u(d)v(n/d)\,.$$

Partie I : Etude de structure

1. Justifier que pour tout $u,v\in\mathcal{F}$ on a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,(u\star v)(n)=\sum_{(d_1,d_2)\in C_n}u(d_1)v(d_2)\,.$$

Quelle propriété de la loi $\star$ découle de manière immédiate de cette relation.

2. Montrer que la loi $\star$ est associative.
3. Montrer que la loi $\star$ admet un élément neutre ε que l'on précisera.
4. La structure $(\mathcal{F},+,\star)$ est-elle un anneau ?

Partie II : Fonctions multiplicatives

Une fonction u de $\mathcal{F}$ est dite multiplicative si et seulement si :

$$\forall m,n\in\mathbb{N}^*,m\wedge n=1\Rightarrow u(mn)=u(m)u(n)\,.$$

Par exemple les fonctions θ et ψ de $\mathbb{N}^*$ vers $\mathbb{R}$ définies par : $\theta(n)=1$ et $\psi(n)=n$ sont clairement multiplicatives.

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\omega(n)$ le nombre de nombres premiers distincts intervenant dans la décomposition primaire de n. Montrer que l'application $n\mapsto(-1)^{\omega(n)}$ est multiplicative.

2. Soit $u\in\mathcal{F}$ une fonction multiplicative et $n\in\mathbb{N}^*$ connu par sa décomposition primaire $n=\prod_{i=1}^{N}p_i^{\alpha_i}$ (avec $p_1,\dots,p_N$ nombres premiers deux à deux distincts).
Exprimer $u(n)$ en fonction des $u(p_i^{\alpha_i})$.

3. Soit $m,n\in\mathbb{N}^*$ tels que $m\wedge n=1$ et $\pi:D_m\times D_n\to D_{mn}$ l'application définie par $\pi(d_1,d_2)=d_1d_2$.

3.a Montrer que l'application π est bijective.

3.b En déduire que si $u,v\in\mathcal{F}$ sont multiplicatives alors $u\star v$ l'est aussi.

4. On pose $\delta=\theta\star\theta$ et $\sigma=\psi\star\theta$.

4.a Que représentent les quantités $\delta(n)$ et $\sigma(n)$?

4.b Soit $n\in\mathbb{N}^*$ connu par sa décomposition primaire $n=\prod_{i=1}^{N}p_i^{\alpha_i}$ (avec $p_1,\dots,p_N$ nombres premiers deux à deux distincts). Exprimer $\delta(n)$ et $\sigma(n)$

Partie III : Formule d'inversion de Möbius

On définit une fonction μ de $\mathcal{F}$ en posant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\mu(n) = 0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier et

$\mu(n) = (-1)^k$ si n s'écrit comme le produit de k nombres premiers deux à deux distincts.

1. Montrer que cette fonction μ est multiplicative.

2. Soit p un nombre premier.
Calculer $(\mu \star \theta)(p)$ et $(\mu \star \theta)(p^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
En déduire que μ est l'inverse de θ pour la loi $\star$.

3. Soit $u, v \in \mathcal{F}$. Etablir l'équivalence :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v(n) = \sum_{d|n} u(d) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, u(n) = \sum_{d|n} \mu(n/d) v(d) .$$

4. En déduire que pour tout $u \in \mathcal{F}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ la relation :
$$u(n) = \sum_{d|n} \sum_{c|d} \mu(d/c) u(c)$$

Partie IV : Fonction indicatrice d'Euler

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $(x)_n$ la classe de x dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

1. Dans toute la suite du problème, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\varphi(n) = \text{Card}\left\{k \in [\![1, n]\!] / k \wedge n = 1\right\} .$$

1.a Rappeler quels sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Combien y en a-t-il ?

1.b Soit p un nombre premier. Calculer $\varphi(p)$ et $\varphi(p^\alpha)$ pour $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $m \wedge n = 1$.

2.a Quels sont les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.
Combien y en a-t-il ?

2.b Etablir que l'application $f : \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ définie par $f\left((x)_{mn}\right) = \left((x)_m, (x)_n\right)$ est un isomorphisme d'anneaux.

2.c En déduire que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et d diviseurs positifs de n.

3.a Calculer le cardinal de l'ensemble $\left\{k \in [\![1, n]\!] / \text{pgcd}(k, n) = d\right\}$.

3.b En déduire la relation
$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n .$$

Partie V : Calcul de quelques déterminants non triviaux

Soit $n \in \mathbb{N}*$. On souhaite calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = \text{pgcd}(i, j)$.

1. On pose $L = (\ell_{i,d}) \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $\ell_{i,d} = \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $U = (u_{d,j}) \in M_n(\mathbb{R})$ celle définie par $u_{d,j} = \begin{cases} \varphi(d) & \text{si } d \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.a Calculer $\det L$ et $\det U$.

1.b Etablir que $A = LU$ et donner une expression de $\det A$.

On souhaite maintenant calculer le déterminant de la matrice $B=(u(a_{i,j}))\in M_n(\mathbb{R})$ où u désigne un élément de $\mathcal{F}$ et $a_{i,j}$ le pgcd de i et j comme ci-dessus.

2. On pose $V=(v_{d,j})\in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $v_{d,j}=\begin{cases}\sum_{c\mid d}\mu(d/c)u(c) & \text{si } d\mid j\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

2.a Calculer LV.

2.b En déduire une expression de $\det B$.

3. On note $C=(c_{i,j})\in M_n(\mathbb{R})$ la matrice définie par $c_{i,j}=\operatorname{ppcm}(i,j)$

Donner une expression de $\det C$.