Correction

d'après CCP PSI 2000

Partie I

1.a $B_{1,F}(t)=B_1(P_0,P_1)(t)=(1-t)B_0(P_0)(t)+tB_0(P_1)(t)=(1-t)P_0+tP_1$.

1.b $B_{1,F}(t)=bar((P_0,(1-t)),(P_1,t))$ avec $t\in[0,1]$.

La trajectoire de $B_{1,F}$ est le segment $[P_0,P_1]$.

2.a $B_F(0)=B_3(P_0,P_1,P_2)(0)=B_2(P_0,P_1)(0)=B_1(P_0)(0)=P_0$

De même $B_F(1)=P_2$.

2.b
$$B_F(\frac{1}{2})=B_3(P_0,P_1,P_2)(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}B_2(P_0,P_1)\left(\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}B_2(P_1,P_2)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_0+\frac{1}{2}P_1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P_1+\frac{1}{2}P_2\right)=\frac{1}{2}Q_0+\frac{1}{2}Q_1=m[Q_0,Q_1]$$

2.c $B_F(t)=(1-t)^2P_0+2t(1-t)P_1+t^2P_2$ avec $(1-t)^2+2t(1-t)+t^2=1$.

2.d $x(t)=2t-1$ et $y(t)=2t^2-2t+1=\dfrac{1}{2}x(t)^2+\dfrac{1}{2}$.

La trajectoire de B_F est incluse dans la parabole d'équation $y=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$.

Partie II

1. ($\Leftarrow$) immédiat, en prenant $n=2$.

($\Rightarrow$) Supposons K convexe.

Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$

Pour $n=1$: ok

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$

Soit $M_1,\dots,M_{n+1}\in K$ et $\lambda_1,\dots,\lambda_{n+1}\in\mathbb{R}_+$ tel que $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k=1$.

Si $\lambda_{n+1}=1$ alors $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kM_k=M_{n+1}\in K$ puisqu'alors $\lambda_1=\ldots=\lambda_n=0$.

Si $\lambda_{n+1}\neq 1$ alors $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kM_k=(1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}M_k+\lambda_{n+1}M_{n+1}$.

Or $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}=\dfrac{1-\lambda_{n+1}}{1-\lambda_{n+1}}=1$ donc $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}M_k=M\in K$

puis $\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_kM_k=(1-\lambda_{n+1})M+\lambda_{n+1}M_{n+1}\in K$ puisque $\lambda_{n+1}\in[0,1]$.

Récurrence établie.

2.a $\forall K\in W$ on a $E\subset K$ donc $E\subset\bigcap_{K\in W}K$.

Soit $M,N\in\bigcap_{K\in W}K$ et $\lambda\in[0,1]$.

$\forall K\in W$, on a $M,N\in K$ donc $(1-\lambda)M+\lambda N\in K$ puisque K est convexe, par suite $(1-\lambda)M+\lambda N\in\bigcap_{K\in W}K$.

Ainsi $\bigcap_{K\in W}K$ est un convexe qui contient E.

2.b $(\Rightarrow)$ Si E est convexe alors $E\in W$ donc $\bigcap_{K\in W} K\subset E$.

D'autre part $E\subset \bigcap_{K\in W} K$ est toujours vrai donc $E=\bigcap_{K\in W} K=C(E)$.

$(\Leftarrow)$ Si $E=C(E)$, sachant que $C(E)$ est convexe, E l'est aussi.

2.c Si $G\subset H$ alors $G\subset C(H)$.

Le convexe $C(H)$ est un donc élément de l'ensemble W formé des convexes qui contient G.

Comme $C(G)=\bigcap_{K\in W} K$, on a $C(G)\subset C(H)$.

2.d Notons K l'ensemble égal au second membre de l'égalité.
De part II.1, il est clair que $K\subset C(E)$.
D'autre part, on observe que $E\subset K$.
Pour conclure, il ne reste plus qu'à montrer que K est convexe.
Soit $M,N\in K$ on peut écrire :

$M=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k M_k$ et $N=\sum_{l=1}^{p}\mu_l N_l$ avec $M_k,N_l\in E$ et $\lambda_k,\mu_l\geq 0$ tels que $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1$ et $\sum_{l=1}^{p}\mu_p=1$.

Soit $\lambda\in[0,1]$.

$(1-\lambda)M+\lambda N=\sum_{k=1}^{n}(1-\lambda)\lambda_k M_k+\sum_{l=1}^{p}\lambda\mu_l N_l$ avec $\sum_{k=1}^{n}(1-\lambda)\lambda_k+\sum_{l=1}^{p}\lambda\mu_l=1-\lambda+\lambda=1$ donc $(1-\lambda)M+\lambda N\in K$.

Ainsi K est convexe.
$E\subset K$ donne alors $C(E)\subset C(K)=K$.

Par double inclusion $C(E)=K$.

3. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$: ok (trajectoire constante égale au point)
Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$.
Soit $F=(P_0,\dots,P_{n+1})\in E_{n+2}$.

$\forall t\in[0,1]$, $B_{n+1,F}(t)=(1-t)M+tN$ avec

$M=B_n(P_0,\dots,P_n)(t)\underset{HR}{\in}C(\{P_0,\dots,P_n\})\subset C(F)$ et

$N=B_n(P_1,\dots,P_{n+1})(t)\underset{HR}{\in}C(\{P_1,\dots,P_n\})\subset C(F)$

Sachant $C(F)$ convexe, $B_{n+1,F}(t)\in C(F)$.

Récurrence établie

Partie III

1.a Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$: ok avec $b_{0,0}:t\mapsto 1$.

Supposons la propriété établie au rang $n\geq 1$.
Soit $F=(P_0,\dots,P_{n+1})\in E_{n+2}$.

$\forall t\in[0,1]$, $B_{n+1,F}(t)=(1-t)M+tN$ avec

$M=B_n(P_0,\dots,P_n)(t)=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)P_k$ et $N=B_n(P_1,\dots,P_{n+1})(t)=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}(t)P_{k+1}$, donc

$$\begin{aligned}B_{n+1,F}(t)&=\sum_{k=0}^{n}(1-t)b_{n,k}(t)P_k+\sum_{k=0}^{n}tb_{n,k}(t)P_{k+1}\\&=(1-t)b_{n,0}(t)P_0+\sum_{k=1}^{n}\big((1-t)b_{n,k}(t)+tb_{n,k-1}(t)\big)P_k+tb_{n,n}(t)P_{n+1}\end{aligned}$$

En prenant $\begin{cases} b_{n+1,0}(t)=(1-t)b_{n,0}(t) \\ b_{n+1,k}(t)=(1-t)b_{n,k}(t)+tb_{n,k-1}(t) \text{ pour } 1\leq k\leq n \\ b_{n+1,n+1}(t)=tb_{n,n}(t) \end{cases}$

On obtient $B_{n+1,F}(t)=\sum_{k=0}^{n+1} b_{n+1,k}(t)P_k$.

De plus, les $b_{n,k}$ étant des fonctions polynomiales de degré inférieur à n , les $b_{n+1,k}$ sont des fonctions polynomiales de degré inférieur à $n+1$.

Récurrence établie.

1.b

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$
$n=0$	1	*	*	*
$n=1$	$1-t$	t	*	*
$n=2$	$(1-t)^2$	$2t(1-t)$	t^2	*
$n=3$	$(1-t)^3$	$3t(1-t)^2$	$3t^2(1-t)$	$(1-t)^3$

1.c $b_{n,k}(t)=\binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k$ convient.

2.a $\sum_{k=0}^{n} I_{n,k}=\int_0^1\sum_{k=0}^{n} b_{n,k}(t)dt=\int_0^1 1dt=1$.

2.b Pour $0\leq k<n$ on a :

$$\begin{aligned} I_{n,k} &= \binom{n}{k}\int_0^1(1-t)^{n-k}t^k dt \\ &= \binom{n}{k}\left(\left[\frac{t^{k+1}}{k+1}(1-t)^{n-k}\right]_0^1+\frac{n-k}{k+1}\int_0^1(1-t)^{n-k-1}t^{k+1}dt\right) \\ &= I_{n,k+1} \end{aligned}$$

Donc $I_{n,0}=I_{n,1}=...=I_{n,n}=\frac{1}{n+1}$ puisque $\sum_{k=0}^{n} I_{n,k}=1$.

Partie IV

1.a $B_{n,F}(0)=P_0$ et $B_{n,F}(1)=P_n$.

1.b
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}B_{n,F}(t) &= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}t^{k-1}(1-t)^{n-k}P_k-\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k-1}P_k \\ &= nt^{n-1}P_n+\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(k-nt)t^{k-1}(1-t)^{n-k-1}P_k-n(1-t)^{n-1}P_0 \end{aligned}$$

1.c $\frac{d}{dt}B_{n,F}(0)=nP_1-nP_0=n\overrightarrow{P_0P_1}$ et $\frac{d}{dt}B_{n,F}(1)=nP_n-nP_{n-1}=n\overrightarrow{P_{n-1}P_n}$

Les tangentes aux points $B_{n,F}(0)=P_0$ et $B_{n,F}(1)$ sont (P_0P_1) et $(P_{n-1}P_n)$.

2. $B_{n,F}(t)=bar\left((P_k,b_{n,k}(t)\right)_{0\leq k\leq n}$ donc $\varphi(B_{n,F})(t)=bar\left((\varphi(P_k),b_{n,k}(t)\right)_{0\leq k\leq n}=B_{n,\varphi(F)}(t)$.

3.a $B_{n,\tilde{F}}(t)=bar\left((P_{n-k},b_{n,k}(t)\right)_{0\leq k\leq n}=bar\left((P_{n-k},b_{n,n-k}(1-t)\right)_{0\leq k\leq n}=bar\left((P_k,b_{n,k}(1-t)\right)_{0\leq k\leq n}=B_{n,F}(1-t)$

car $b_{n,k}(t)=b_{n,n-k}(1-t)$.

3.b $B_{n,F}$ et $B_{n,\tilde{F}}$ ont la même trajectoire.

4.a $s(B_{n,F}(t))=B_{n,s(F)}(t)=B_{n,\tilde{F}}(t)=B_{n,F}(1-t)$.

La trajectoire de $B_{n,F}$ est symétrique par rapport à Ω .

4.b $s(B_{n,F}(1/2))=B_{n,F}\left(1/2\right)$ donc $\Omega=B_{n,F}(1/2)$.

5. $\frac{d}{dt}B_{3,F}(1/2)=\frac{3}{4}P_3-\frac{3}{4}P_1+\frac{3}{4}P_2-\frac{3}{4}P_0=\frac{3}{4}\overrightarrow{P_1P_2}-\frac{3}{4}\overrightarrow{P_0P_3}\,?=-3\vec{j}+\frac{3}{2}\vec{i}$.