Cubique circulaire

Dans tout le problème a désigne un réel strictement positif et le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine O et d'axes (Ox) et (Oy).

Partie I : Etude de la cissoïde droite

On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre $\Omega(-a,0)$ et de rayon a.

Pour tout nombre réel t, on désignera par :

D_t la droite d'équation $y = tx$,

$H(t)$ le point d'intersection de D et D_t,

$M(t)$ le point d'intersection de C et D_t autre que O,

$I(t)$ le milieu du segment d'extrémités $H(t)$ et $M(t)$.

1.a Donner une équation cartésienne du cercle C.

1.b Déterminer les coordonnées cartésiennes des points $H(t)$, $M(t)$ et $I(t)$.
Nous noterons $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées du point $I(t)$

2. On étudie ici la courbe Γ formée par les $I(t)$ lorsque t varie.

2.a Justifier que Γ présente un axe de symétrie.
Dresser le tableau des variations simultanées des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^+$.

2.b Préciser la nature du point de paramètre $t = 0$ et la tangente en ce point.

2.c Etablir que la tangente à la courbe $t \mapsto J(t)$ au point $J(t_0)$ a pour équation $t_0(t_0^2 + 3)x - 2y = at_0^3$.

2.d Préciser la branche infinie de Γ obtenue pour $t \to +\infty$.

3. Représenter sur une même figure : la droite D, le cercle C et la courbe étudiée ci-dessus.

4. Vérifier que $x(x^2 + y^2) = ay^2$ est une équation cartésienne de la courbe Γ.

Partie II : Etude de la strophoïde droite

On désigne par D la droite d'équation $x = 2a$ et par C le cercle de centre $\Omega(-2a,0)$ et de rayon $2a$.

Pour tout réel θ, on désignera par :

D_θ la droite passant par O et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses,

$H(\theta)$ le point d'intersection, lorsqu'il existe, de D_θ et D,

$M(\theta)$ le point d'intersection de la droite D_θ et du cercle C avec la convention que lorsqu'il y a deux points d'intersection, $M(\theta)$ désigne le point d'intersection distinct de O,

$I(\theta)$ le milieu du segment d'extrémités $H(\theta)$ et $M(\theta)$.

1.a Donner une équation polaire de la droite D et du cercle C.

1.b Déterminer des coordonnées polaires des points $M(\theta)$ et $H(\theta)$.
En déduire que lorsque θ varie, $I(\theta)$ décrit la courbe d'équation polaire $r(\theta) = -a\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$.

2. Dans cette question, on étudier la courbe Γ' formé par les $I(\theta)$ quand θ varie.

2.a Simplifier $r(\theta + 2\pi)$, $r(\theta + \pi)$ et $r(-\theta)$.
Interpréter géométriquement ces résultats et indiquer sur quelle intervalle de $\mathbb{R}$ il suffit d'étudier la courbe.

2.b Dresser le tableau de variation de r sur l'intervalle en question.
Préciser l'allure de la courbe autour du point de paramètre $\theta = \pi/4$.

2.c Préciser la branche infinie de la courbe obtenue quand $\theta \to \dfrac{\pi}{2}^-$.

3. Représenter sur une même figure : la droite D, le cercle C et la courbe étudiée ci-dessus.

4. Donner une équation cartésienne de la courbe Γ'.