Correction

1. Soit $z:I\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $\varphi:I\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=\cos t\,z(t)$. φ est deux fois dérivable et $\varphi''(t)=\cos t.z''(t)-2\sin t.z'(t)-\cos(t).z(t)$.
   z est solution sur I de l'équation différentielle considérée ssi $\varphi''=0$ i.e.
   $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall t\in I,\varphi(t)=\lambda t+\mu$ ce qui donne $z(t)=\dfrac{\lambda t+\mu}{\cos t}$.

2. Soit $y:J\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable et $z:I\to\mathrm{R}$ définie par $z(t)=y(\sin t)$.
   z est deux fois dérivable et $\forall x\in J,y(x)=z(\arcsin x)$.
   On a $y'(x)=\dfrac{z'(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et $y''(x)=\dfrac{z''(\arcsin x)}{1-x^2}+\dfrac{xz'(\arcsin x)}{(1-x^2)^{3/2}}$.
   Par suite :
   $$\forall x\in J,(1-x^2)y''(x)-3xy'(x)-y(x)=0$$
   $$\Leftrightarrow\forall x\in J,z''(\arcsin x)-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}z'(\arcsin x)-z(\arcsin x)=0$$
   $$\Leftrightarrow\forall t\in I,z''(t)-\frac{2\sin t}{\cos t}z'(t)-z(t)=0 \qquad ,$$
   $$\Leftrightarrow\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall t\in I,z(t)=\frac{\lambda t+\mu}{\cos t}$$
   $$\Leftrightarrow\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},\forall x\in J,y(x)=\frac{\lambda\arcsin x+\mu}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.a $\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R},f(x)=\dfrac{\lambda\arcsin x+\mu}{\sqrt{1-x^2}}$.
   f est donc $\mathcal{C}^\infty$ par opérations sur les fonctions $\mathcal{C}^\infty$.

3.b Par la formule de Leibniz :
   $((1-x^2)f''(x))^{(n)}=(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-2nxf^{(n+1)}(x)-n(n-1)f^{(n)}(x)$
   et $(3xf'(x))^{(n)}=3xf^{(n+1)}(x)+3nf^{(n)}(x)$.
   En dérivant à l'ordre n l'équation $(1-x^2)f''(x)-3xf'(x)-f(x)=0$
   on obtient : $(1-x^2)f^{(n+2)}(x)-(2n+3)xf^{(n+1)}(x)-(n+1)^2f^{(n)}(x)=0$.
   On peut aussi procéder par récurrence, c'est plus sûr mais aussi plus lourd.

3.c En évaluant en 0 : $f^{(n+2)}(0)-n^2f^{(n)}(0)=0$ d'où $a_{n+2}=(n+1)^2a_n$.

3.d $a_{2p+1}=(2p)^2a_{2p-1}=(2p)^2(2p-2)^2...2^2.a_1=2^{2p}(p!)^2a_1$.
   $a_{2p}=(2p-1)^2a_{2p-2}=(2p-1)^2(2p-3)^2...1^2.a_0=\dfrac{((2p)!)^2}{2^{2p}(p!)^2}a_0$.

4.a $f:x\mapsto\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation différentielle étudiée avec $a_0=0$ et $a_1=1$.
   La formule de Taylor-Young donne : $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}=\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{a_k}{k!}x^k+o(x^{2n+1})=\sum_{p=0}^{n}\frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}x^{2p+1}+o(x^{2n+1})$.

4.b $f:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est solution de l'équation différentielle étudiée avec $a_0=1$ et $a_1=0$.
   La formule de Taylor-Young donne :
   $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{a_k}{k!}x^k+o(x^{2n})=\sum_{p=0}^{n}\frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}x^{2p}+o(x^{2n}).$$

4.c En intégrant ce DL et sachant $\arcsin 0=0$: $\arcsin x=\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{(2p)!}{2^{2p}(2p+1)(p!)^2}x^{2p+1}+o(x^{2n+1})$

5. Le coefficient de x^{2n+1} dans le $DL_{2n+1}(0)$ de $\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ est $\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

D'autre part on obtient un coefficient en x^{2n+1} dans le développement du produit $\arcsin x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ en croisant un x^{2k+1} du DL de $\arcsin x$ avec un $x^{2(n-k)}$ du DL de $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, par suite le coefficient de x^{2n+1} dans le $DL_{2n+1}(0)$ de $\arcsin x \times \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est encore

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(2k+1)(k!)^2} \times \frac{(2(n-k))!}{2^{2(n-k)}((n-k)!)^2} = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \frac{(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2(n-k))!}{((n-k)!)^2}$$

d'où l'identité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{16^n}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$ mais était-ce raisonnable ?