DL de solutions d'une équation différentielle

Les fonctions considérées ici sont toutes réelles.

1. Résoudre sur $I = \left]-\pi/2, \pi/2\right[$ l'équation différentielle $\cos(t)z''(t) - 2\sin(t)z'(t) - \cos(t)z(t) = 0$.
   On pourra réaliser le changement de fonction inconnue : $\varphi(t) = \cos(t).z(t)$.

2. Résoudre sur $J = \left]-1,1\right[$ l'équation différentielle $(1-x^2)y''(x) - 3xy'(x) - y(x) = 0$.
   On pourra réaliser le changement de variable : $x = \sin t$.

3. Soit f une solution de l'équation précédente.

3.a Justifier que f est $\mathcal{C}^\infty$.

3.b Observer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1-x^2)f^{(n+2)}(x) - (2n+3)xf^{(n+1)}(x) - (n+1)^2 f^{(n)}(x) = 0$.

3.c Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = f^{(n)}(0)$. Former une relation liant a_{n+2} et a_n.

3.d Exprimer a_{2p+1} et a_{2p} en fonction respectivement de a_1 et a_0, et à l'aide de nombres factoriels.

4. Exprimer :

a. Le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$,

b. Le $DL_{2n}(0)$ de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

c. Le $DL_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arcsin x$.

5. En déterminant le coefficient de x^{2n+1} dans le produit des deux derniers développements limités obtenir la formule : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{16^n}{(n+1)\binom{2n+1}{n}}$.