# Dodécaèdre

Dans tout le problème $\mathcal{E}$ désigne l'espace géométrique usuel rapporté à un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. On ne manquera pas, pour tout ce qui suit, de se rapporter, pour plus de commodité, au dessin fourni à la fin de l'énoncé.

1. On pose $a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $b=\dfrac{1}{a}$.

1.a Montrer que $a$ est solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Z}$.
Montrer qu'il en est de même pour $b$.

1.b Calculer $b, ab, a+b, b-a$ et $a^2+b^2$.
(On mettra les résultats sous la forme $x+y=\sqrt{5}$ avec $x,y$ rationnels.)

2. Etant donnée une droite $\mathcal{D}$ de l'espace $\mathcal{E}$, on appelle demi-tour d'axe $\mathcal{D}$ l'application qui a tout point $M$ de l'espace associe l'unique point $M'$ tel que le milieu du segment $[M,M']$ soit le projeté orthogonal de $M$ sur $\mathcal{D}$.
On suppose que $M$ a pour coordonnées $(x,y,z)$. Exprimer les coordonnées des points $M',M'',M'''$ images du points $M$ par les demi-tours d'axes respectifs $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$ et $(O;\vec{k})$.

3. On définit les huit sommets $ABCDA'B'C'D'$ d'un cube noté $\mathcal{C}_0$ comme suit par leurs coordonnées :

$$A(1,1,1),\ B(-1,1,1)\ \ C(-1,-1,1),\ D(1,-1,1)$$

$A',B',C',D'$ désignent leurs symétriques respectifs par rapport à $O$.

3.a Montrer l'existence d'un point unique $J(a,0,b')$ avec $b'>1$ tel que $JA=JD=2a$ et exprimer $b'$ en fonction de $b$.

3.b $I$ désigne le transformé de $J$ dans le demi-tour d'axe $(O;\vec{k})$, $I'$ et $J'$ sont les transformés respectifs de $I$ et $J$ dans la symétrie par rapport à $O$. Déterminer les points $I,I',J'$ par leurs coordonnées.

4. On définit de même $K,L,M,N$ ainsi que leur symétriques respectifs $K',L',M',N'$ par rapport à $O$ par les conditions suivantes :
(i) $\overrightarrow{KL}=2a\vec{j}$, $KB'=KD=2a$, $K$ et $L$ se correspondent dans le demi-tour d'axe $(O,\vec{i})$ et la première coordonnée de $K$ est supérieure à 1.
(ii) $\overrightarrow{MN}=2a\vec{k}$, $NA=NB=2a$, $M$ et $N$ se correspondent dans le demi-tour d'axe $(O,\vec{j})$ et la seconde coordonnée de $N$ est supérieure à 1.
Préciser en fonction de $a$ et $b$ les coordonnées de ces huit nouveaux points.

5. L'ensemble des vingt points :

$$A,B,C,D,I,J,K,L,M,N,A',B',C',D',I',J',K',L',M',N'$$

ainsi définis déterminent un dodécaèdre qui sera considéré comme l'ensemble de ces vingt points.
On appelle face du dodécaèdre l'un des douze sous-ensembles de sommets suivants :

$$AJDKL, LKB'I'C', ALC'MN, NMD'K'B, ANBIJ, MC'I'J'D'$$

ainsi que les six autres obtenus par symétrie par rapport à $O$.

5.a Montrer que les points $AJDKL$ appartiennent à un même plan et donner une équation de ce plan.

5.b Donner aussi une équation de la face $ANBIJ$.

5.c Observer que les distances $AJ, JD, DK, KL$ et $LA$ sont égales. On pose $d$ leur valeur commune.

6. On note $\Omega$ l'isobarycentre des points $AJDKL$.

6.a Déterminer les coordonnées du point $\Omega$.
(N.B. On laissera ces coordonnées sous la forme $x+y\sqrt{5}$ avec $x$ et $y$ rationnels).

6.b Observer que les distances $\Omega A, \Omega J, \Omega D, \Omega K, \Omega L$ sont égales. On pose $r$ leur valeur commune.

6.c Vérifier que $d=\dfrac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Cette dernière relation permet d'assurer que $AJDKL$ est un pentagone régulier, il en est de même des autres faces.