Endomorphisme antisymétrique

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$.
On note $(x \mid y)$ le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E.
Un endomorphisme f de E est dit antisymétrique ssi $\forall x, y \in E, (f(x) \mid y) = -(x \mid f(y))$.

Partie I – Un exemple

Ici E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E et $u = a.i + b.j + c.k$ un vecteur non nul de E.
On considère ici $f : E \to E$ l'application définie par : $\forall x \in E, f(x) = u \wedge x$.

1. Montrer que f est un endomorphisme antisymétrique.
2. Décrire $\operatorname{Im} f$ et $\ker f$.
3. Former la matrice représentative de f dans $\mathcal{B}$.
   Quelle particularité présente cette matrice ?

Partie II – Etude générale

On revient au cas général où E est un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$.

1. Soit f un endomorphisme de E.
   Etablir que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) f est antisymétrique,
   (ii) la matrice représentative de f dans une base orthonormée est antisymétrique,
   (iii) $\forall x \in E, (f(x) \mid x) = 0$.

2. On note $A(E)$ l'ensemble formé des endomorphismes antisymétriques de E.

2.a Etablir que $A(E)$ est un sous-espace vectoriel d'un espace connu que l'on précisera.

2.b Quelle est la dimension de $A(E)$?

3. Soit f un endomorphisme antisymétrique de E.

3.a Etablir que $\det(f) = (-1)^n \det f$.
Qu'en déduire lorsque n est impair ?

3.b Montrer que $\operatorname{Im} f$ est l'orthogonal de $\ker f$.

3.c Montrer que la restriction de f à $\operatorname{Im} f$ est un endomorphisme antisymétrique injectif de $\operatorname{Im} f$.

3.d En déduire que le rang de f est pair.

Partie III – Description des endomorphismes antisymétriques en dimension 3

On se place à nouveau dans le cas où E est un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3.
Dans cette partie, on désire établir que pour tout endomorphisme antisymétrique de E, il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f soit de la forme $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier le résultat dans le cas où f est l'endomorphisme nul.

2. On suppose dans cette question que f n'est pas nul.

2.a Quel est le rang de f ?

2.b Soit $\mathcal{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe adaptée à la décomposition $E = \operatorname{Im} f \oplus^{\perp} \ker f$.
Vérifier que le matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme voulue.

3. Etablir que pour tout f endomorphisme antisymétrique de E, il existe un unique vecteur $u \in E$ tel que : $\forall x \in E, f(x) = u \wedge x$.