# Correction

D'après Banque PT 2001

*Partie I*

1.a En développant selon la dernière colonne : $f(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k\Delta_k$ avec $\Delta_k$ le mineur d'indice $(n+1-k,n+1)$ du déterminant définissant $f(x)$.
De part sa description, $\Delta_k$ est un constante indépendante de $x$. Par suite $f$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à $n$.
Le coefficient de $x^n$ dans $f(x)$ est $(-1)^n\Delta_n$ avec $\Delta_n=V_{n-1}$. Ainsi $\lambda=(-1)^n V_{n-1}$.

1.b Les $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ annulent $f$ car pour $x=a_i$ avec $i\in\{0,1,...,n-1\}$, le déterminant exprimant $f(x)$ possède deux colonnes identiques. Par suite les $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ sont racines de $f$.

1.c Comme $a_0,a_1,...,a_{n-1}$ sont des racines deux à deux distinctes de $f$, on peut écrire $f(x)=g(x)\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$ avec $g$ une fonction polynomiale.
Or $\deg f\le n$ donc $g$ est une fonction polynomiale constante (éventuellement nulle).
Puisque le coefficient de $x^n$ dans $f$ est $\lambda$, on a $f(x)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$.

1.d Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$ : $V_1=|1|=1$ et $\prod_{0\le i<j\le 1}(a_i-a_j)=1$ (car il n'y a pas de termes dans ce produit).
Supposons la propriété établie au rang $n-1\ge 1$.
Au rang $n$, en reprenant les notations ci-dessus :

$$V_n=f(a_n)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)=(-1)^n V_{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}(a_n-a_k)\underset{HR}{=}\prod_{0\le i<j\le n-1}(a_i-a_j)\prod_{k=0}^{n-1}(a_k-a_n)=\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)$$

Récurrence établie.

2.a $P_k=\sum_{i=0}^{n}C_n^i a_k^{n-i}X^i$ donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\,\mathcal{C}=\begin{pmatrix}C_n^0a_0^n & C_n^0a_1^n & C_n^0a_2^n & \cdots & C_n^0a_n^n\\ C_n^1a_0^{n-1} & C_n^1a_1^{n-1} & C_n^1a_2^{n-1} & \cdots & C_n^1a_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_n^{n-1}a_0 & C_n^{n-1}a_1 & C_n^{n-1}a_2 & \cdots & C_n^{n-1}a_n\\ C_n^n & C_n^n & C_n^n & \cdots & C_n^n\end{pmatrix}$ avec $C_n^k=\binom{n}{k}$

2.b $\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\begin{vmatrix}C_n^0a_0^n & C_n^0a_1^n & C_n^0a_2^n & \cdots & C_n^0a_n^n\\ C_n^1a_0^{n-1} & C_n^1a_1^{n-1} & C_n^1a_2^{n-1} & \cdots & C_n^1a_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ C_n^{n-1}a_0 & C_n^{n-1}a_1 & C_n^{n-1}a_2 & \cdots & C_n^{n-1}a_n\\ C_n^n & C_n^n & C_n^n & \cdots & C_n^n\end{vmatrix}$ donne

$$\det_{\mathcal{B}}\mathcal{C}=\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)\begin{vmatrix}a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n\\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}=\left(\prod_{k=0}^{n}C_n^k\right)\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)\neq 0$$

Donc $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

*Partie II*

1. Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ et on a $T_h(P)=\sum_{k=0}^{n}a_k(X+h)^k\in\mathbb{R}_n[X]$.

Ainsi $T_h:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$. De plus, soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in\mathbb{R}_n[X]$.

$T_h(\lambda P+\mu Q)=(\lambda P+\mu Q)(X+h)=\lambda.P(X+h)+\mu.Q(X+h)=\lambda.T_h(P)+\mu.T_h(Q)$.

Finalement $T_h$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(T_h)=\begin{pmatrix}1 & h & h^2 & \cdots & C_n^n h^n\\ 0 & 1 & 2h & \cdots & C_n^{n-1}h^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & & C_n^{n-2}h^{n-2}\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & C_n^0\end{pmatrix}\in T_n^+(\mathbb{R})$ donc $\det T_h=1$.

2. $E\subset\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

$\forall h\in\mathbb{R}$, $\mathrm{Id}\circ T_h=T_h\circ\mathrm{Id}$ donc $\mathrm{Id}\in E$.

Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\varphi,\psi\in E$.

$\forall h\in\mathbb{R}$, $(\lambda\varphi+\mu\psi)\circ T_h=\lambda(\varphi\circ T_h)+\mu(\psi\circ T_h)=\lambda(T_h\circ\varphi)+\mu(T_h\circ\psi)=T_h\circ(\lambda\varphi+\mu\psi)$

et $(\varphi\circ\psi)\circ T_h=\varphi\circ T_h\circ\psi=T_h\circ(\varphi\circ\psi)$ donc $\lambda\varphi+\mu\psi\in E$ et $\varphi\circ\psi\in E$.

Ainsi $E$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}_n[X]$.

3.a Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$ . Pour tout $h\in\mathbb{R}$ :

D'une part $T_h(P)=\sum_{k=0}^{n}a_k(X+h)^k$ et $D(T_h(P))=\sum_{k=1}^{n}ka_k(X+h)^{k-1}$ ,

d'autre part $D(P)=\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}$ et $T_h(D(P))=\sum_{k=1}^{n}ka_k(X+h)^{k-1}$ ,

donc $T_h\circ D=D\circ T_h$. Ainsi $D\in E$.

3.b Puisque $D\in E$ et que $E$ est un sous-anneau : $\forall k\in\mathbb{N}, D^k\in E$.

3.c Supposons $\lambda_0.\mathrm{Id}+\lambda_1D+\lambda_2D^2+...+\lambda_nD^n=0$.

i.e. $\forall P\in\mathbb{R}_n[X]$, $\lambda_0.P+\lambda_1P'+\lambda_2P''+...+\lambda_nP^{(n)}=0$.

Pour $P=X^n$ : $\lambda_0X^n+n\lambda_1X^{n-1}+n(n-1)\lambda_2X^{n-2}+...+n!\lambda_n=0$.

Par identification des coefficients de deux polynômes égaux : $\lambda_0=\lambda_1=...=\lambda_n=0$.

4.a Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\varphi,\psi\in E$ :

$\theta(\lambda\varphi+\mu\psi)=(\lambda\varphi+\mu\psi)(X^n)=\lambda\varphi(X^n)+\mu\psi(X^n)=\lambda\theta(\varphi)+\mu\theta(\psi)$.

Donc $\theta$ est un application linéaire.

4.b Soit $\varphi\in\ker\theta$. On a $\varphi(X^n)=0$.

Or $\varphi\in E$ donc $\forall h\in\mathbb{R}$, $\varphi((X+h)^n)=\varphi(T_h(X^n))=T_h(\varphi(X^n))=T_h(0)=0$.

Considérons $a_0,a_1,...,a_n$ des réels deux à deux distincts.

On a vu que $((X+a_k)^n)_{0\le k\le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et part la relation ci-dessus

$\forall 0\le k\le n,\varphi((X+a_k)^n)=0$ donc $\varphi=0$.

Ainsi $\ker\theta=\{0\}$. $\theta$ est injective.

4.c L'injectivité de $\varphi$ implique : $\dim E\le\dim\mathbb{R}_n[X]=n+1$.

La liberté de la famille $(D^k)_{0\le k\le n}$ implique $\dim E\ge n+1$.

Ainsi $\dim E=n+1$.

5. $(D^k)_{0\le k\le n}$ est une famille libre formée de $n+1=\dim E$ éléments de $E$, c'est donc une base de $E$.