Endomorphismes commutant avec les translations

On note $\mathcal{B}=(1,X,\ldots,X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie I

On considère une suites de réels deux à deux distincts : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note M_n la matrice carrée d'ordre $n+1$ dont l'élément d'indice (i,j) est a_{j-1}^{n-i+1}.

Autrement dit : $M_n=\begin{pmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_n^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

On pose V_n son déterminant que nous allons calculer maintenant :

1. On introduit la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\begin{vmatrix} a_0^n & a_1^n & \cdots & a_{n-1}^n & x^n \\ a_0^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

1.a Justifier que f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.

Exprimer le coefficient λ de x^n dans $f(x)$ à l'aide de l'un des termes de la suite $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1.b Justifier que $a_0,a_1,\ldots,a_{n-1}$ sont racines de f.

1.c En déduire que $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\lambda\prod_{k=0}^{n-1}(x-a_k)$.

1.d Conclure : $\forall n\in\mathbb{N}^*, V_n=\prod_{0\le i<j\le n}(a_i-a_j)$.

2. On considère $n+1$ nombres réels deux à deux distincts : $a_0,a_1,\ldots,a_n$ et on considère la famille de polynômes : $\mathcal{C}=(P_k)_{0\le k\le n}$ où $P_k=(X+a_k)^n$.

2.a Former la matrice représentative de la famille $\mathcal{C}$ relative à la base $\mathcal{B}$.

2.b Etablir que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie II

On désigne par n un entier naturel non nul.

1. Pour tout $h\in\mathbb{R}$, on définit une application T_h en posant pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$: $T_h(P)=P(X+h)$.

1.a Justifier que T_h est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

1.b Quel en est le déterminant ?

On désire déterminer l'ensemble E formée des endomorphismes φ de $\mathbb{R}_n[X]$ satisfaisant la propriété : $\forall h\in\mathbb{R}, \varphi\circ T_h=T_h\circ\varphi$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.

3. On note D l'endomorphisme de dérivation dans $\mathbb{R}_n[X]$ i.e. l'application $D:\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}_n[X]$ définie par $D:P\mapsto P'$.

3.a Etablir que $D\in E$.

3.b Justifier que $\forall k\in\{0,1,\ldots,n\}$, $D^k\in E$.

3.c Etablir que la famille $(D^k)_{0\le k\le n}$ est libre.

4. Soit $\theta : E \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\theta(\varphi) = \varphi(X^n)$.

4.a Montrer que θ est une application linéaire.

4.b Etablir que θ est injective.

4.c Déterminer la dimension de E .

5. Donner une base de E .