# Correction

d'après E.M. Lyon 2001

*Partie I*

1.a $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ est bien définie.

Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $\vec{u}=(x,y),\vec{v}=(z,t)\in\mathbb{R}^2$.

$f(\lambda\vec{u}+\mu\vec{v})=(-(\lambda y+\mu t),\lambda x+\mu z)=\lambda.f(\vec{x})+\mu.f(\vec{y})$

Donc $f\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$.

1.b $\vec{a}=(1,0),f(\vec{a})=(0,1),f^2(\vec{a})=(-1,0),f^3(\vec{a})=(0,-1)$. On a :

(i) $f^4(\vec{a})=(1,0)=\vec{a}$,

(ii) $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),f^3(\vec{a}))$ génératrice (contient la base canonique),

(iii) $(\vec{a},f(\vec{a}),f^2(\vec{a}),f^3(\vec{a}))$ formée d'éléments distincts.

Donc $f$ est cyclique d'ordre 4.

2.a Supposons $\lambda.\sin+\mu.\cos=0$.

On a alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda\sin x+\mu\cos x=0$.

Pour $x=0$, on obtient $\mu=0$, pour $x=\pi/2$, on obtient $\lambda=0$.

La famille $(\sin,\cos)$ est donc libre et par suite forme une base de $E=\text{Vect}(\sin,\cos)$. Il en découle $\dim E=2$.

2.b Soit $f=\lambda.\sin+\mu.\cos\in E$.

$$\tau_p(f)(x)=\lambda.\sin(x+\frac{2\pi}{p})+\mu.\cos(x+\frac{2\pi}{p})=\alpha\sin x+\beta\cos x$$

avec $\alpha=(\lambda.\cos\frac{2\pi}{p}-\mu\sin\frac{2\pi}{p}),\beta=(\lambda.\sin\frac{2\pi}{p}+\mu.\cos\frac{2\pi}{p})$

donc $\tau_p(f)=\alpha.\sin+\beta.\cos\in E$.

2.c On vient d'observer $\tau_p.E\to E$.

Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $f,g\in E$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$

$$\tau_p(\lambda.f+\mu.g)(x)=(\lambda.f+\mu.g)(x+\frac{2\pi}{p})=\lambda.f(x+\frac{2\pi}{p})+\mu.g(x+\frac{2\pi}{p})=\lambda.\tau_p(f)(x)+\mu.\tau_p(g)(x)$$

Ainsi $\tau_p(\lambda.f+\mu.g)=\lambda.\tau_p(f)+\mu.\tau_p(g)$.

Finalement $\tau_p\in L(E)$.

2.d $\tau_p(f):x\mapsto\sin(x+\frac{2\pi}{p})$, $\tau_p^2(f):x\mapsto\sin(x+\frac{4\pi}{p}),\ldots$

Par récurrence $\tau_p^k(f):x\mapsto\sin(x+\frac{2k\pi}{p})=\cos\frac{2k\pi}{p}\sin x+\sin\frac{2k\pi}{p}\cos x$.

Si $\tau_p^k(f)=\tau_p^\ell(f)$ alors $\forall x\in\mathbb{R},\cos\frac{2k\pi}{p}\sin x+\sin\frac{2k\pi}{p}\cos x=\cos\frac{2\ell\pi}{p}\sin x+\sin\frac{2\ell\pi}{p}\cos x$.

Or $(\sin,\cos)$ est libre, donc $\begin{cases}\cos\frac{2k\pi}{p}=\cos\frac{2\ell\pi}{p}\\ \sin\frac{2k\pi}{p}=\sin\frac{2\ell\pi}{p}\end{cases}$ puis $k=\ell\quad[p]$.

2.e On a :

(i) $\tau_p^p(f)=f$.

(ii) $\sin=f$ et $\cos=\lambda.f+\mu.\tau_p(f)$ avec $\lambda=-\dfrac{\cos(2\pi/p)}{\sin(2\pi/p)}$ et $\mu=\dfrac{1}{\sin(2\pi/p)}$ ($\sin(2\pi/p)\neq 0$ car $p>2$).

Par suite $(f,\tau_p(f))$ est génératrice et ainsi $(f,\tau_p(f),...,\tau_p^{p-1}(f))$ aussi.

(iii) $(f,\tau_p(f),...,\tau_p^{p-1}(f))$ est formée d'éléments distincts grâce à 2.d.

Ainsi $\tau_p$ est cyclique d'ordre $p$.

*Partie II*

1. Une famille génératrice a plus d'éléments que la dimension de l'espace généré. C'est ainsi que $p \geq n$.

2.a $f^p(f^k(\vec{a})) = f^{p+k}(\vec{a}) = f^k(f^p(\vec{a})) = f^k(\vec{a})$.

2.b Soit $\vec{x} \in E$. Puisque $(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{p-1}(\vec{a}))$ est génératrice, on peut écrire :

$\vec{x} = \lambda_0.\vec{a} + \lambda_1 f(\vec{a}) + ... + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{a})$. On a alors :

$f^p(\vec{x}) = \lambda_0.f^p(\vec{a}) + \lambda_1 f^{p+1}(\vec{a}) + ... + \lambda_{p-1} f^{2p-1}(\vec{a}) = \lambda_0.\vec{a} + \lambda_1 f(\vec{a}) + ... + \lambda_{p-1} f^{p-1}(\vec{a}) = \vec{x}$

Ainsi $f^p = \mathrm{Id}$. On a $f \circ f^{p-1} = f^{p-1} \circ f = \mathrm{Id}$ donc $f$ est bijective et $f^{-1} = f^{p-1}$.

2.c $F = \ker(f - \mathrm{Id})$ et $G = \ker(\mathrm{Id} + f + ... + f^{p-1})$ sont des noyaux d'endomorphismes donc des sous-espaces vectoriels.

Soit $\vec{x} \in F \cap G$.

On a $f(\vec{x}) - \vec{x} = \vec{o}$ et $\vec{x} + f(\vec{x}) + ... + f^{p-1}(\vec{x}) = \vec{o}$

donc $p.\vec{x} = \vec{o}$ puis $\vec{x} = \vec{o}$.

Ainsi $F \cap G \subset \{\vec{o}\}$ puis $F \cap G = \{\vec{o}\}$.

Soit $\vec{x} \in E$.

Posons $\vec{u} = \dfrac{\vec{x} + f(\vec{x}) + ... + f^{p-1}(\vec{x})}{p}$ et $\vec{v} = \vec{x} - \vec{u}$.

$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$.

$f(\vec{u}) = \vec{u}$ (car $f^n(\vec{x}) = \vec{x}$ ) donc $\vec{u} \in \ker(f - \mathrm{Id})$.

$(\mathrm{Id} + f + ... + f^{n-1})(\vec{v}) = (\mathrm{Id} + f + ... + f^{p-1})(\vec{x} - \vec{u})$ donne

$(\mathrm{Id} + f + ... + f^{n-1})(\vec{v}) = (\mathrm{Id} + f + ... + f^{p-1})(\vec{x}) - (\mathrm{Id} + f + ... + f^{p-1})(\vec{u}) = p.\vec{u} - p.\vec{u} = \vec{o}$

donc $\vec{v} \in \ker(\mathrm{Id} + f + ... + f^{n-1})$.

Ainsi $E \subset F + G$ puis $E = F + G$.

Finalement $F$ et $G$ supplémentaires dans $E$.

3.a La famille $(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{m-1}(\vec{a}))$ est libre.

La famille ( $\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^m(\vec{a})$ ) est liée donc on peut écrire :

$\lambda_0\vec{a} + \lambda_1 f(\vec{a}) + ... + \lambda_m f^m(\vec{a}) = \vec{o}$ avec $(\lambda_0,...,\lambda_m) \neq (0,...,0)$.

Si $\lambda_m = 0$ alors on obtient une relation linéaire sur $(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{m-1}(\vec{a}))$ ce qui est impossible puisque cette famille est libre.

Nécessairement $\lambda_m \neq 0$ et on peut alors écrire $f^m(\vec{a}) = \mu_0.\vec{a} + ... + \mu_{m-1} f^{m-1}(\vec{a})$ avec $\mu_i = -\dfrac{\lambda_i}{\lambda_m}$.

3.b Par récurrence sur $k \geq m$.

$k = m$ : ci dessus.

Supposons la propriété établir au rang $k \geq m$.

Par HR, on peut écrire $f^k(\vec{a}) = \alpha_0.\vec{a} + ... + \alpha_{m-1} f^{m-1}(\vec{a})$.

En appliquant $f$ : $f^{k+1}(\vec{a}) = \alpha_0 f(\vec{a}) + ... + \alpha_{m-1} f^m(\vec{a})$

Or $f^m(\vec{a}) = \mu_0.\vec{a} + ... + \mu_{m-1} f^{m-1}(\vec{a})$ donc

$f^{k+1}(\vec{a}) = \alpha_{m-1}\mu_0.\vec{a} + (\alpha_0 + \alpha_{m-1}\mu_1) f(\vec{a}) + ... + (\alpha_{m-2} + \alpha_{m-1}\mu_{m-1}) f^{m-1}(\vec{a})$

Récurrence établie

3.c De part 3.b, on peut affirmer $E = \mathrm{Vect}(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{p-1}(\vec{a})) = \mathrm{Vect}(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{m-1}(\vec{a}))$.

$(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{m-1}(\vec{a}))$ est donc génératrice, et puisque libre, c'est une base de $E$. Il en découle $m = n$ et $(\vec{a}, f(\vec{a}),..., f^{n-1}(\vec{a}))$ base de $E$.

4.a $h\circ f=\alpha_0 f+...+\alpha_{n-1}f^n=f\circ h$ .

4.b On a clairement $g(\vec{a})=h(\vec{a})$ .

Puisque $f$ et $g$ commutent, $f^k$ et $g$ commutent.

Il en est de même pour $f^k$ et $h$ . Ainsi $g(f^k(\vec{a}))=(g\circ f^k)(\vec{a})=(f^k\circ g)(\vec{a})=f^k(g(\vec{a}))$ donne $g(f^k(\vec{a}))=f^k(h(\vec{a}))=(f^k\circ h)(\vec{a})=(h\circ f^k)(\vec{a})=h(f^k(\vec{a}))$

4.c Les endomorphismes $g$ et $h$ prennent mêmes valeurs sur une base, ils sont donc égaux.

4.d De part l'étude menée, tout endomorphisme commutant avec $f$ peut s'écrire sous la forme $\alpha_0.\mathrm{Id}+\alpha_1.f+...+\alpha_{n-1}.f^{n-1}$.

La réciproque s'observe comme en 4.a.