Correction

Partie I

1.a $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $\varphi(-x) = \dfrac{e^{-2x} - 1}{e^{-2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}} = -\varphi(x)$, φ est impaire.

1.b φ est $\mathcal{C}^\infty$ et $\varphi'(x) = \left(1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}\right)' = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} > 0$.

φ est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

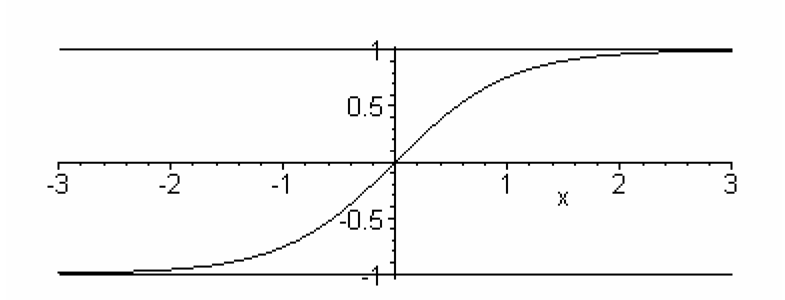
Quand $x \to +\infty$, $\varphi(x) \sim \dfrac{e^{2x}}{e^{2x}} \to 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$.

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote φ en $+\infty$.

Puisque $1 - \varphi(x) = \dfrac{2}{e^{2x}+1} > 0$, Γ_φ est en dessous de cette asymptote.

Par imparité, la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à φ en $+\infty$ avec Γ_φ au dessus de cette asymptote.

1.c



2.a φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $I = \left]\lim\limits_{-\infty}\varphi, \lim\limits_{+\infty}\varphi\right[=]-1,1[$.

2.b $\varphi'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ et $1 - \varphi^2(x) = 1 - \dfrac{e^{4x} - 2e^{2x} + 1}{e^{4x} + 2e^{2x} + 1} = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.

2.c Puisque φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi'(x) \neq 0$ on peut affirmer que φ^{-1} est dérivable et de plus :

$(\varphi^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \dfrac{1}{1 - (\varphi(\varphi^{-1}(x)))^2} = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

Partie II

1. L'équation fonctionnelle pour $x = 0$ donne $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

2.a $u_n = \dfrac{f(h) - f(0)}{h}$ avec $h = \dfrac{x}{2^n}$.

Quand $n \to +\infty$, on a $h \to 0$ et par composition $u_n \to f'(0)$.

2.b De part l'équation fonctionnelle : $f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = 2f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$. Donc $u_n = u_{n+1}$.

3. De part l'étude précédente : $u_0 = f'(0)$ et donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \alpha . x$ avec $\alpha = f'(0)$. De plus cette relation est encore vraie pour $x = 0$.

Partie III

1. φ est dérivable en 0.

$$\forall x\in\mathbb{R}, \frac{2\varphi(x)}{1+\varphi^2(x)}=\frac{2(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2+(e^{2x}-1)^2}=\frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}=\varphi(2x).$$

2.a L'équation fonctionnelle pour $x=0$ donne $f(0)=\dfrac{2f(0)}{1+f^2(0)}$ d'où

$f(0)(f^2(0)-1)=0$. Par suite $f(0)=0,1$ ou -1.

2.b $-f$ est dérivable en 0 puisque f l'est.

$$\forall x\in\mathbb{R}, -f(2x)=-\frac{2f(x)}{1+(f(x))^2}=\frac{2(-f(x))}{1+(-f(x))^2}.$$

2.c $f(x)=\dfrac{2a}{1+a^2}$ avec $a=f(x/2)$. Or $(a-1)^2\geq 0$ et $(a+1)^2\geq 0$ donnent : $-(1+a^2)\leq 2a\leq(1+a^2)$ et par suite $-1\leq f(x)\leq 1$.

3.a Quand $n\to+\infty$, on a $\dfrac{x}{2^n}\to 0$ et puisque f est continue en 0 (car dérivable en 0) on a

$u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\to f(0)=1$.

3.b $$u_n=f\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{2f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)}{1+\left(f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\right)^2}=\frac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}.$$

3.c Par la relation ci-dessus :
($u_n\geq 0\Rightarrow u_{n+1}\geq 0$) et ($u_n\leq 0\Rightarrow u_{n+1}\leq 0$).
Par suite (u_n) est de signe constant et puisque $u_n\to 1$ on peut affirmer que la suite (u_n) est positive.

3.d $u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_{n+1}(u_{n+1}^2-1)}{1+u_{n+1}^2}\leq 0$ car $u_{n+1}=f\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\in[-1,1]$.

Par suite (u_n) est décroissante.
(u_n) décroît vers 1, donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n\geq 1$.
Or $u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\in[-1,1]$ donc $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=1$.

3.e Puisque $u_0=1$, on obtient $f(x)=1$ et ceci pour tout $x\in\mathbb{R}^*$. Comme ceci est de plus vrai pour $x=0$, f s'avère être constante égale à 1.

3.f Dans le cas où $f(0)=-1$, on applique l'étude ci-dessus à $-f$ pour conclure que f est constante égale à -1.

4.a Supposons $\exists x\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=1$.

Considérons (u_n) de terme général : $u_n=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

Comme ci-dessus $u_n=\dfrac{2u_{n+1}}{1+u_{n+1}^2}$.

Par récurrence on montre alors $u_n=1$.
Or $u_n\to f(0)=0$, c'est absurde.
Par suite $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq 1$.
De même : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)\neq -1$.

4.b $\varphi(g(2x)) = f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$ et $\varphi(2g(x)) = \dfrac{2\varphi(g(x))}{1+(\varphi(g(x)))^2} = \dfrac{2f(x)}{1+(f(x))^2}$.

L'application φ étant injective : $g(2x) = 2g(x)$.

De plus, par composition, γ est dérivable en 0.

4.c De part la partie II :

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \alpha.x$ et donc $f(x) = \varphi(\alpha.x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2\alpha x} - 1}{\mathrm{e}^{2\alpha x} + 1}$.