Etude d'une équation fonctionnelle

Thèmes abordés : Continuité et dérivabilité des fonctions numériques.

Les parties I et II sont entièrement indépendantes.
En dehors de la dernière question, la partie III est indépendante de la partie II.

Dans tout le problème : on considère la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}$.

Partie I : Etude de la fonction φ

1.a Etudier la parité de φ.

1.b Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et préciser ses branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$.

1.c Donner l'allure de la courbe représentative de φ.

2.a Justifier que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.

2.b Observer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi'(x) = 1 - \varphi^2(x)$.

2.c Montrer que $\varphi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et exprimer simplement sa dérivée.

Partie II : Etude d'une première équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x).$$

On considère f une fonction solution.

1. Calculer $f(0)$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On définit une suite réelle (u_n) par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)}{\dfrac{x}{2^n}}$.

2.a Montrer que (u_n) converge et exprimer sa limite.

2.b Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

3. Conclure qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \alpha.x$.

Partie III : Etude d'une seconde équation fonctionnelle

Le but de cette partie est de déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + (f(x))^2}.$$

1. Montrer que φ est solution du problème posé.

2. On considère dans cette question f une solution du problème posé.

2.a Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.

2.b Montrer que $-f$ est aussi solution

2.c Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq f(x) \leq 1$.

(indice : on pourra exprimer $f(x)$ en fonction de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$).

3. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0)=1$.

On considère $x \in \mathbb{R}$ et l'on définit la suite (u_n) par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$.

3.a Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

3.b Etablir une relation entre u_n et u_{n+1}.

3.c En déduire que la suite (u_n) garde un signe constant et préciser celui-ci.

3.d Etudier la monotonie de la suite (u_n) et en déduire que celle-ci est constante égale à 1.

3.e Qu'en déduire quant à la fonction f ?

3.f Que peut-on dire si l'hypothèse « $f(0)=1$ » et remplacée par « $f(0)=-1$ » ?

4. On suppose dans cette question que f est solution du problème posé et que $f(0)=0$.

4.a En raisonnant par l'absurde et en considérant une suite du même type que ci-dessus, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 1$ et $f(x) \neq -1$.

4.b On introduit la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \varphi^{-1}(f(x))$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(2x) = 2g(x)$ et que g est dérivable en 0.

4.c En déduire une expression de $f(x)$ dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$.