Correction

Partie I

1. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$ est définie et continue sur $\left]-1,1\right[$.

$f(t) \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}\sqrt{1-t}}$ et $f(t) \underset{-1}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2(1-k^2)}\sqrt{1+t}}$ donc $\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

2. Réalisons le changement de variable $t = \sin\tau$ avec $\tau \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$U(\sin(x)) = \int_0^{\sin x} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^x \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}$.

3.a $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$ et $u(-x) = \int_0^{-x} \dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \underset{\tau=-t}{=} -\int_0^x \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}} = -u(x)$. u est impaire.

3.b La fonction u est la primitive sur $\mathbb{R}$, s'annulant en 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$.

$t \mapsto 1-k^2\sin^2 t$ est définie de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs strictement positives donc $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et donc toute primitive de celle-ci, l'est encore. $u'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$.

Puisque $u'(x) > 0$, la fonction u est strictement croissante.

3.c $\forall t \in \mathbb{R}, \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}} \geq 1$ donc $u(x) \geq \int_0^x dt = x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$.

3.d Par imparité : $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = -\infty$. Puisque u est continue et strictement croissante sur R, u réalise une bijection de R vers $\left]\lim\limits_{-\infty} u, \lim\limits_{+\infty} u\right[= \mathbb{R}$.

4.a A a même monotonie que u et A est impaire.

4.b u est $\mathcal{C}^\infty$ et $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) \neq 0$ donc A est $\mathcal{C}^\infty$. $A' = (u^{-1})' = \dfrac{1}{u' \circ u^{-1}} = \sqrt{1-k^2\sin^2 A}$.

4.c $A'' = \left(\sqrt{1-k^2\sin^2 A}\right)' = \dfrac{-k^2 A' \sin A\cos A}{\sqrt{1-k^2\sin^2 A}} = -k^2\sin A\cos A$, donc $A'' + k^2\sin A\cos A = 0$.

5. $(u(x+\pi)-u(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x+\pi)}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}} = 0$ donc $x \mapsto u(x+\pi)-u(x)$ est constante.

En prenant $x = \dfrac{\pi}{2}$: $K = u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) - u\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 2u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2U\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2T$.

6.a En fait : $Sn = \sin\circ A, Cn = \cos\circ A$ et $Dn = \sqrt{1-k^2Sn^2}$.
Par composition : Sn est impaire et Cn, Dn sont paires.
Par composition : Sn, Cn sont $\mathcal{C}^\infty$.
Puisque $Sn = \sin\circ A$, on a $|Sn| \leq 1$, or $k < 1$ donc $k = 0$ $1-k^2Sn^2 > 0$ puis Dn est $\mathcal{C}^\infty$ par composition.

6.b $\forall y \in \mathbb{R}$. Posons $x = A(y)$ de sorte que $y = u(x)$.
On a $u(x+\pi) = u(x)+K$ donc $x+\pi = A(y+K)$.
Par suite $Sn(y+K) = \sin(x+\pi) = -\sin(x) = -Sn(y)$ et $Cn(y+K) = -Cn(y)$.
Puisque Sn et Cn sont K antipériodiques, Sn et Cn sont aussi $2K = 4T$ périodiques.
D'autre part $Dn(y+K) = Dn(y)$ donc Dn est $K = 2T$ périodiques.

6.c $T=u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ donc $Sn(T)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $Cn(T)=0$ et $Dn(t)=\sqrt{1-k^2}$.

6.d $Sn'=(\sin\circ A)'=A'\cos\circ A=\sqrt{1-k^2\sin^2 A}\times Cn=CnDn$.

$Cn'=(\cos\circ A)=-SnDn$ et $Dn'=-k^2SnCn$.

6.e $Sn''=(CnDn)'=-SnDn^2-k^2SnCn^2=-Sn((1-k^2Sn^2)+k^2(1-Sn^2))=-(1+k^2)Sn+2k^2Sn^3$

Donc $Sn''+(1+k^2)Sn-2k^2Sn^3=0$.

D'autre part $Sn(0)=\sin(A(0))=0$, $Cn(0)=1, Dn(0)=1$ puis $Sn'(0)=1$.

7. Si alors $u(x)=x$, $A(y)=y$ puis $Sn(y)=\sin y$, $Cn(y)=\cos y$ et $Dn(y)=1$.

$T=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\left[\arcsin t\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$.

Partie II

1. Considérons $\psi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x,y)=(x+y,x-y)$.

On a clairement $\psi\circ\phi=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ et $\phi\circ\psi=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$ donc ϕ bijective et $\psi=\phi^{-1}$.

2.a Sachant ϕ fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient $(\Rightarrow)$ par composition.

La réciproque s'obtient par ψ de classe $\mathcal{C}^1$ et $f=g\circ\psi$.

2.b $g(a,b)=f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$ donne $\frac{\partial g}{\partial a}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial b}=\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}$.

2.c Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On a

$$\begin{aligned}f\in E\quad&\Leftrightarrow\frac{\partial g}{\partial b}=0\\&\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2,g(a,b)=\alpha(a)\\&\Leftrightarrow\exists\alpha\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,f(x,y)=\alpha(x+y)\end{aligned}$$

Donc $E=\left\{(x,y)\mapsto\alpha(x+y)/\alpha\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\right\}$.

3. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ telle que proposée. En dérivant la relation $f(x,y)=f(y,x)$ par rapport à y on obtient :

$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ donc $f\in E$ puis la conclusion.

4.a Soit $f:(x,y)\mapsto\frac{Sn(x)Cn(y)Dn(y)+Sn(y)Cn(x)Dn(x)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}$. f est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et on a clairement $f(x,y)=f(y,x)$. C'est la suite qui est plus embêtante :

$u(x,y)=Sn(x)Cn(y)Dn(y)+Sn(y)Cn(x)Dn(x)$, $v(x,y)=(1-k^2)Sn^2(x)Sn^2(y)$.

$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)=Cn(x)Dn(x)Cn(y)Dn(y)-(1+k^2)Sn(x)Sn(y)+2k^2Sn^3(x)Sn(y)$.

$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=-2k^2Sn(x)Cn(x)Dn(x)Sn^2(y)$.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}(x,y)v(x,y)-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)u(x,y)=(Cn(x)Dn(x)Cn(y)Dn(y))(1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y))\\&-(1+k^2)Sn(x)Sn(y)+2k^2Sn^3(x)Sn(y)+k^2(1+k^2)Sn^3(x)Sn^3(y)-2k^4Sn^5(x)Sn^3(y)\\&+2k^2Sn^2(x)Cn(x)Dn(x)Sn^2(y)Cn(y)Dn(y)+2k^2(1-Sn^2(x))(1-k^2Sn^2(x))Sn^3(y)Sn(x)\\&=(Cn(x)Dn(x)Cn(y)Dn(y))(1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y))-(1+k^2)Sn(x)Sn(y)-k^2(1+k^2)Sn^3(x)Sn^3(y)\\&+2k^2Sn^2(x)Cn(x)Dn(x)Sn^2(y)Cn(y)Dn(y)+2k^2\left[Sn^3(x)Sn(y)+Sn(x)Sn^3(y)\right]\end{aligned}$$

expression symétrique en x et y.

Par suite $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}v-\frac{\partial v}{\partial x}u}{v^2}$ est symétrique en x et y. Ainsi $f\in E$.

Donc il existe $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(x,y)=\alpha(x+y)$.

Or $\alpha(t)=f(t,0)=Sn(t)$ donc $\dfrac{Sn(x)Cn(y)Dn(y)+Sn(y)Cn(x)Dn(x)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}=Sn(x+y)$.

C'est le genre de question, où l'on peut se permettre d'admettre le terme des calculs, vu l'esprit du problème et tant ceux –ci sont lourds.

Partie III

1.a ρ est définie sur $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi\right[$ et est π périodique.

Puisque $\rho(\theta+\pi)=\rho(\theta)$ et $\vec{u}(\theta+\pi)=-\vec{u}(\theta)$, le point $M(\theta+\pi)$ est le symétrique de $M(\theta)$ par rapport au point O.

1.b ρ est paire donc $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à (Ox).

1.c ρ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et $\rho'(\theta)=-\dfrac{2\sin 2\theta}{\sqrt{2\cos 2\theta}}\leq 0$ d'où

θ	0	$\pi/4$
$\rho(\theta)$	$\sqrt{2}$ $\searrow$	0

.

1.d Pour $\theta=0$, on a $\rho'(\theta)=0$, la tangente est orthoradiale.

Pour $\theta=\pi/4$, on a $\rho(\theta)=0$, la tangente est la droite d'équation $\theta=\pi/4$.

2.a $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}=\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\theta}}$.

2.b Notons $V=(\vec{u}(\theta),\vec{T}(\theta))\,[2\pi]$. Puisque $\rho(\theta)>0$, on peut prendre $V\in\left]0,\pi\right[$.

On a $\cot V=\dfrac{\rho'(\theta)}{\rho(\theta)}=-\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)}=\cot\left(\frac{\pi}{2}+2\theta\right)$ avec $\frac{\pi}{2}+2\theta\in\left]0,\pi\right[$.

Donc $V=\frac{\pi}{2}+2\theta$ puis $\alpha(\theta)=V+\theta=\frac{\pi}{2}+3\theta$.

2.c $\lambda(\theta)=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\theta}\cdot\dfrac{\mathrm{d}\theta}{ds}=3\dfrac{\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{2}}$ puis $R(\theta)=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\theta}}$.

3. $s(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta \mathrm{d}s=\int_0^\theta\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{\cos 2\alpha}}=\int_0^\theta\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-2\sin^2\alpha}}$.

Posons $t=\sqrt{2}\sin\alpha$, $\mathrm{d}t=\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}\alpha$ puis

$s(\theta)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}\sin\theta}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2}\sqrt{1-t^2}}=U(\sqrt{2}\sin\theta)$ en prenant $k=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Partie IV

1.a $y''+\omega^2y=0$ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2+\omega^2=0$ de racines $i\omega$ et $-i\omega$.

La solution générale de cette équation est $y(t)=\lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)$ avec $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$.

Une telle fonction satisfait aux conditions initiales proposées ssi $\lambda=\alpha$ et $\mu=0$.

Finalement (1) possède une et une seule solution à savoir $y(t)=\alpha\cos(\omega t)$.

1.b $T_0=\dfrac{2\pi}{\omega}$.

2.a $t \mapsto kSn(t-t_0)$ est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[-k,k] \subset]-1,1[$ donc par composition, f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2.b $f'(t) = -2\dfrac{k\omega \cdot Cn(\omega(t-t_0))Dn(\omega(t-t_0))}{\sqrt{1-k^2Sn^2(\omega(t-t_0))}} = -2k\omega Cn(\omega(t-t_0))$ et

$f''(t) = 2k\omega^2 Sn(\omega(t-t_0))Dn(\omega(t-t_0))$.

$k \cdot Sn(\omega(t-t_0)) = \sin(-\frac{1}{2}f(t))$ et $Dn(\omega(t-t_0)) = \sqrt{1-k^2Sn(\omega(t-t_0))} = \cos\left(-\frac{1}{2}f(t)\right)$

donc $f''(t) = -2\omega^2 \sin\left(\frac{1}{2}f(t)\right)\cos\left(\frac{1}{2}f(t)\right) = -\omega^2 \sin(f(t))$.

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 \sin y = 0$.

2.c $\begin{cases} f(0) = \alpha \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sn(\omega t_0) = \dfrac{1}{k}\sin\dfrac{\alpha}{2} \\ Cn(\omega t_0) = 0 \end{cases}$.

Pour $k = \sin\dfrac{\alpha}{2}$, les fonctions Sn et Cn sont déterminées et on veut t_0 de sorte que : $\begin{cases} Sn(\omega t_0) = 1 \\ Cn(\omega t_0) = 0 \end{cases}$.

Sachant que pour $Sn\left(\frac{1}{2}T\right) = 1$ et $Cn\left(\frac{1}{2}T\right) = 0$, $t_0 = \dfrac{T}{2\omega}$ convient.

2.d Sn étant $4T$ périodique, f est une fonction $T_1 = \dfrac{4T}{\omega}$ périodique.

2.e Quand α croît dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $k = \sin\dfrac{\alpha}{2}$ croît puis $T = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)^2(1-k^2t^2)}}$ croît aussi.

Au final, T_1 est une fonction croissante de α.

3. $\dfrac{T_1}{T_0} = \dfrac{4T}{2\pi} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$ avec $k = \sin\dfrac{\alpha}{2}$.