# Fonctions elliptiques

Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles mais exploitent toutes les trois les fonctions présentées dans la partie I.

*Partie I – Constructions des fonctions elliptiques*

$k$ désigne un réel de l'intervalle $[0,1[$ .

1. Justifier l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$ .

On définit une fonction $U:[-1,1]\to\mathbb{R}$ en posant $U(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$ .

Cette fonction $U$ est appelée fonction elliptique de 1ère espèce et de module $k$ .

2 Etablir que pour tout $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], U(\sin(x))=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2(\tau)}}$

3. On introduit désormais la fonction réelle $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par la relation $u(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2(t)}}$ .

3.a Etudier la parité de la fonction $u$ .

3.b Justifier que $u$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et donner l'expression de $u'(x)$ .

En déduire que $u$ est strictement croissante.

3.c Etablir : $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=+\infty$ .

3.d Conclure que $u$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ .

4. On note $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application réciproque de la fonction $u$ .
$A$ est appelée fonction d'amplitude.

4.a Préciser le sens de variation et la parité de $A$

4.b Justifier que $A$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et exprimer $A'$ .

4.c Observer que $A''$ vérifie : $A''+k^2\sin A\cos A=0$ .

5. Montrer que la quantité $u(x+\pi)-u(x)$ est constante quel que soit $x\in\mathbb{R}$ .

Exprimer cette constante qu'on notera $K$ en fonction de $u\left(\frac{\pi}{2}\right)$ puis de $T=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}}$ .

6. Pour tout $y\in\mathrm{R}$ , on note $x=A(y)$ et on définit les fonctions $Sn,Cn$ et $Dn$ par :

$Sn(y)=\sin(x)$ , $Cn(y)=\cos(x)$ et $Dn(y)=\sqrt{1-k^2\sin^2(x)}$ .
Ces trois fonctions sont appelées fonctions de Jacobi.

6.a Etudier la parité de ces 3 fonctions et préciser leur régularité.

6.b Montrer qu'elles sont périodiques et donner leur période en fonction de $T$ .

6.c Calculer $Sn(T)$ , $Cn(T)$ et $Dn(T)$ .

6.d Exprimer les dérivées $Sn'$ , $Cn'$ et $Dn'$ en fonction de $Sn,Cn$ et $Dn$ .

6.e Justifier que $Sn$ est solution sur $\mathrm{R}$ du problème différentiel : $\begin{cases}y''+(1+k^2)y-2k^2y^3=0\\ y(0)=0,y'(0)=1\end{cases}$ .

7. Préciser les fonctions $Sn,Cn$ et $Dn$ lorsque $k=0$ ainsi que la valeur de $T$ .

*Partie II – Formule d'addition sur les fonctions de Jacobi*

1. Soit l'application $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ suivante : $(a,b)\mapsto\left(\frac{1}{2}(a+b),\frac{1}{2}(a-b)\right)$.

   Montrer que $\phi$ est bijective et exprimer son application réciproque $\phi^{-1}$.

2. Pour toute application $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$, on note $g$ l'application composée $f\circ\phi$.

2.a Démontrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $g$ l'est également.

2.b Exprimer dans ce cas les dérivées partielles premières de $g$ notées : $\frac{\partial g}{\partial a}$ et $\frac{\partial g}{\partial b}$ en fonction de celles de $f$ notées : $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

2.c En déduire une description de l'ensemble $E$ formé des fonctions $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$.

3. Soit $f:\begin{cases}\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\\(x,y)\mapsto f(x,y)\end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=f(y,x)$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.

   Montrer qu'il existe $\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=\alpha(x+y)$.

4. Démontrer :

   $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, Sn(x+y)=\frac{Sn(x)Cn(y)Dn(y)+Sn(y)Cn(x)Dn(x)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}$.

   On établit de même, mais on ne le demande pas ici, les formules :

   $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, Cn(x+y)=\frac{Cn(x)Cn(y)-Sn(x)Dn(x)Sn(y)Dn(y)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}$ et

   $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, Dn(x+y)=\frac{Dn(x)Dn(y)-k^2Sn(x)Cn(x)Sn(y)Cn(y)}{1-k^2Sn^2(x)Sn^2(y)}$.

*Partie III – Rectification de la lemniscate de Bernoulli*

On munit le plan $\mathrm{R}^2$ de sa structure euclidienne orientée usuelle et on note $\mathcal{R}=(O;\vec{i},\vec{j})$ son repère canonique.

Pour $\theta\in\mathbb{R}$, on note $\vec{u}(\theta)=\cos\theta\cdot\vec{i}+\sin\theta\cdot\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta)=-\sin\theta\cdot\vec{i}+\cos\theta\cdot\vec{j}$.

On appelle lemniscate de Bernoulli, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $\rho=\sqrt{2\cos 2\theta}$ c'est à dire la courbe de point courant $M(\theta)$ déterminé par $\overrightarrow{OM(\theta)}=\rho(\theta)\cdot\vec{u}_\theta$ avec $\rho(\theta)=\sqrt{2\cos 2\theta}$.

1.a Préciser le domaine de définition et la périodicité de l'application $\theta\mapsto\rho(\theta)$.

   Justifier que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport au point $O$.

1.b Justifier que $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe $(Ox)$

1.c Dresser le tableau de variation de $\theta\mapsto\rho(\theta)$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

1.d Donner l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ en prenant une unité égale à 4 cm.

   On prendra soin de préciser les tangentes aux points de paramètres $\theta\in\left\{0,\frac{\pi}{4}\right\}$.

1.e On oriente la courbe $\mathcal{C}$ dans le sens des $\theta$ croissants.

   Préciser, sur la figure qui précède le sens de parcours des $\theta$ croissants sur les deux boucles figurées.

On s'intéresse ici à la portion de la courbe $\mathcal{C}$ correspondant à $\theta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$.

2. On désigne par $s$ l'abscisse curviligne d'origine $M(0)$ le long de la portion de $\mathcal{C}$ étudiée.
On note $\vec{T}(\theta)$ le premier vecteur du repère de Frénêt au point $M(\theta)$.

2.a. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$.

2.b Déterminer une fonction numérique $\theta \mapsto \alpha(\theta)$ dérivable telle que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \alpha(\theta) = (\vec{i}, \vec{T}(\theta))\,[2\pi]$.

2.c Exprimer la valeur du rayon de courbure $R(\theta)$ en tout point $M(\theta)$ de $\mathcal{C}$.

3. En observant $s(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta \frac{\sqrt{2}\,\mathrm{d}\alpha}{\sqrt{1-2\sin^2\alpha}}$ puis en s'appuyant sur un changement de variable adéquate, exprimer $s(\theta)$ à l'aide de la fonction $U$ pour un paramètre $k \in [0,1[$ à préciser.

*Partie IV – Période d'un pendule simple*

On se donne $\omega > 0$ et $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

1. (Cas des petites oscillations)
On considère le problème différentiel : $\begin{cases} y'' + \omega^2 \cdot y = 0 \\ y(0) = \alpha, y'(0) = 0 \end{cases}$ (1)

1.a Montrer que ce problème possède une solution unique que l'on exprimera.

1.b Déterminer la période $T_0$ de cette solution.

2. (Etude générale)
On considère désormais le problème différentiel suivant : $\begin{cases} y'' + \omega^2 \sin y = 0 \\ y(0) = \alpha, y'(0) = 0 \end{cases}$ (2)

On admet que celui-ci possède une solution unique définie sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $k \in ]0,1[$ et $t_0 \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f$ définie par : $f(t) = -2\arcsin(k \cdot Sn(\omega(t-t_0)))$.

2.a Déterminer l'ensemble de définition de $f$ et justifier que $f$ y est indéfiniment dérivable.

2.b Observer que $f$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 \sin y = 0$.

2.c Montrer qu'il existe $k$ et $t_0$ à déterminer tels que $f$ soit solution du problème (2).

2.d Observer que $f$ est périodique et préciser sa période $T_1$ en fonction de $\omega$ et $T$.

2.e Montrer que $T_1$ est une fonction croissante de $\alpha$.

3. Montrer que le rapport $\dfrac{T_1}{T_0}$ ne dépend que de $\alpha$ (et non de $\omega$).