# Correction

d'après Mines de Sup 1995

*Partie I*

1. Si $P$ est un polynôme constant alors $\Delta(P)=0$ ce qui en détermine degré et coefficient dominant.
   Si $P$ est un polynôme non constant, posons $p$ son degré, on peut écrire $P=\sum_{k=0}^{p}a_kX^k$ (avec $a_p\neq 0$) et on a $\Delta(P)=\sum_{k=0}^{p}a_k\Delta(X^k)$ avec $\Delta(X^0)=0$ et $\Delta(X^k)=(X+1)^k-X^k=kX^{k-1}+\cdots$ pour $k\geq 1$. Par suite $\Delta(P)=pa_pX^{p-1}$ donc $\deg\Delta(P)=p-1$ et le coefficient dominant de $\Delta(P)$ est $pa_p$ où $a_p$ désigne le coefficient dominant de $P$.

2.a $\Delta_n$ est linéaire car restriction d'une application linéaire, de plus ci-dessus, on a vu que si $\deg P\leq n$ alors $\deg\Delta(P)\leq n-1\leq n$ donc $\Delta_n:E_n\to E_n$ et ainsi $\Delta_n$ est un endomorphisme de $E_n$.

2.b En 1, on a obtenu : si $P$ est constant $\Delta(P)=0$ et si $P$ non constante $\Delta(P)\neq 0$. Le noyau de $\Delta_n$ est donc réduit à l'ensemble des polynômes constants. Ainsi $\dim\ker\Delta_n=1$ et par le théorème du rang $\operatorname{rg}\Delta_n=\dim E_n-1=n$. De plus si $P\in E_n$ alors on a $\deg\Delta(P)\leq n-1$ donc $\Delta(P)\in E_{n-1}$. Par suite $\operatorname{Im}\Delta_n\subset E_{n-1}$. Par inclusion et égalité des dimensions : $\operatorname{Im}\Delta_n=E_{n-1}$.

3. $\forall P\in E$, on posant $n=\deg P$, il existe $Q\in E_{n+1}$ tel que $\Delta(Q)=P$ car $\Delta_{n+1}$ est un endomorphisme de $E_{n+1}$ dont l'image est $E_n$.

*Partie II*

1.a $$\Delta(N_k)(x)=N_k(x+1)-N_k(x)=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{k!}(x+1-(x-k+1))=\frac{x(x-1)\ldots(x-k+2)}{(k-1)!}$$
donc $\Delta(N_k)=N_{k-1}$.

1.b Pour $j\leq k$ : $\Delta^j(N_k)=N_{k-j}$ et puisque $\Delta(N_0)=0$, $\Delta^j(N_k)=0$ pour $j>k$.
Par suite $(\Delta^j(N_k))(0)=0$ si $j<k$ et si $j>k$ alors que $(\Delta^j(N_k))(0)=1$ si $j=k$.

2.a La famille $(N_0,N_1,...,N_n)$ vérifie $\deg N_k=k$ donc c'est une famille de polynôme de degrés étagés et par conséquent celle-ci est une base de $E_n$.

2.b $(\Delta^j(P))(0)=\sum_{k=0}^{n}a_k(\Delta^j(N_k))(0)=a_j$ puisque $(\Delta^j(N_k))(0)=\delta_{j,k}$.

3. $a=\Delta^0(P)(0)=0$, $b=\Delta^1(P)(0)=1$ et $c=\Delta^2(P)(0)=2$.
Considérons $Q=aN_1+bN_2+cN_3$. Par l'étude qui précède $\Delta(Q)=aN_0+bN_1+cN_2=P$.
Concrètement : $Q(x)=\dfrac{x(x-1)}{2}+2\dfrac{x(x-1)(x-2)}{6}=\dfrac{x(x-1)(2x-1)}{6}$.
$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}P(k)=\sum_{k=1}^{n}\Delta(Q)(k)=\sum_{k=1}^{n}Q(k+1)-Q(k)=Q(n+1)-Q(1)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

4.a Par récurrence $T^k(f)(x)=f(x+k)$.

4.b $\Delta=T-\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ avec $T$ et $\mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$ qui commutent donc par la formule du binôme de Newton :
$$\Delta^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k \text{ puis } \Delta^n(f)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}T^k(f).$$

4.c $(\Delta^n(f))(0)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(k)$ car $T^k(f)(0)=f(k)$.

*Partie III*

1.a Soit $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ et $P,Q\in E_n$.
$\varphi(\lambda P+\mu Q)=(\ldots,(\lambda P+\mu Q)(k),\ldots)=(\ldots,\lambda P(k)+\mu Q(k),\ldots)=\lambda(\ldots,P(k),\ldots)+\mu(\ldots,Q(k),\ldots)$
donc $\varphi(\lambda P+\mu Q)=\lambda\varphi(P)+\mu\varphi(Q)$ et $\varphi$ est linéaire.
Soit $P\in E_n$. Si $\varphi(P)=(0,\ldots,0)$ alors $P(0)=\ldots=P(n)=0$ et donc le polynôme admet au moins $n+1$ racines or $\deg P\le n$ donc $P=0$. Ainsi $\ker\varphi=\{0\}$ or $\dim E_n=\dim\mathbb{R}^{n+1}$ donc $\varphi$ est un isomorphisme.

1.b Par la bijectivité de $\varphi$, il existe un unique $P\in E_n$ tel que $\varphi(P)=(f(0),\ldots,f(n))$. Par suite le problème $\mathcal{P}$ possède une unique solution.

2.a $(\Delta^j(f))(0)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}f(k)=\sum_{k=0}^{j}\binom{j}{k}(-1)^{j-k}P(k)=(\Delta^j(P_f))(0)$.

2.b Rappelons que pour $P\in E_n$ : $P=\sum_{j=0}^{n}a_jN_j$ avec $a_j=\Delta^j(P)(0)$ donc

$$P_f=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(P_f))(0)N_j=\sum_{j=0}^{n}(\Delta^j(f))(0)N_j.$$

3.a Posons $K$ une constante telle que $f(x)-P_f(x)=K.N(x)$. Une telle constante $K$ existe car $N(x)\neq 0$ puisque $x\notin\mathbb{N}$.
Considérons alors $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\varphi(t)=f(t)-P_f(t)-KN(t)$. $\varphi$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ qui s'annule en $0,1,\ldots,n$ et aussi en $x$. Cela fournit $n+2$ annulation dans $[0,n]$. Par application du théorème de Rolle, $\varphi'$ s'annule au moins $n+1$ fois dans $[0,n]$ et en reprenant ce processus, $\varphi^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois dans $[0,n]$ en un certain $\xi$. Or $\varphi^{(n+1)}(t)=f^{(n+1)}(t)-0-(n+1)!K$ car $\deg P_f\le n$ et $N$ est un polynôme unitaire de degré $n+1$ donc $N^{(n+1)}=(n+1)!$. La relation $\varphi^{(n+1)}(\xi)=0$ donne alors $K=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ ce qui permet de conclure.

3.b Pour $x\in\mathbb{N}\cap[0,n]$, $\left|f(x)-P_f(x)\right|=0\le\dfrac{1}{n+1}M_{n+1}$.
Pour $x\in[0,n]$, $x\notin\mathbb{N}$ : $\left|f(x)-P_f(x)\right|=\dfrac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|N(x)\right|\le\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|N(x)\right|$.
Pour conclure, il reste à établir : $\forall x\in[0,n],\left|N(x)\right|\le n!$.
Raisonnons par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
Pour $n=1$, $N(x)=x$ et la propriété est vraie.
Supposons la propriété établie au rang $n\ge 1$ :
Pour $x\in[0,n+1]$, étudions $N(x)=x(x-1)\times\ldots\times(x-(n+1))=M(x)\times(x-n-1)$.
Par HR, pour $x\in[0,n]$, on a $\left|M(x)\right|\le n!$ donc $\left|N(x)\right|\le n!\times\left|x-n-1\right|$ avec $\left|x-n-1\right|\in[1,n+1]$ donc $\left|N(x)\right|\le(n+1)!$. Pour $x\in[n,n+1]$,
$\left|N(x)\right|=x(x-1)\times\ldots\times(x-n)\times(n+1-x)\le(n+1)n\times\ldots\times1\times1=(n+1)!$. Récurrence établie et problème résolu.