Matrices semblables à leur inverse

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3.

Pour u endomorphisme de E et n entier naturel non nul, on note $u^n = u \circ u \circ \ldots \circ u$ (n termes) et on convient de poser $u^0 = \mathrm{Id}$ où Id désigne l'endomorphisme identité de E.

On note $M_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre 3, $GL_3(\mathbb{R})$ le groupe des matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$ et I la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.

On note aussi par 0, l'endomorphisme nul, la matrice nulle et le vecteur nul.

Pour deux matrices A et B de $M_3(\mathbb{R})$, on dit que la matrice A est semblable à la matrice B lorsqu'il existe une matrice P de $GL_3(\mathbb{R})$ telle que : $A = P^{-1}BP$.

On rappelle que si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ désignent deux bases de E, P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et u un endomorphisme de E de matrice A dans la base $\mathcal{B}'$ et de matrice B dans la base $\mathcal{B}$ alors $A = P^{-1}BP$.
Par suite la matrice A est semblable à la matrice B.

Partie I

Soit A,B,C trois matrices de $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si A est semblable à B alors B est semblable à A.
   Désormais, on pourra alors dire que les matrices A et B sont semblables.
2. Montrer que si d'une part A et B sont semblables et que d'autre part B et C le sont aussi alors A et C sont semblables.
3. Montrer que si A et B sont semblables alors elles ont même rang et même déterminant.

Partie II

Soit u un endomorphisme de E et $v = u^2 - u$.

1. Soit p,q deux entiers naturels et w l'application linéaire de $\ker u^{p+q}$ vers E définie par $w(x) = u^q(x)$.

1.a Montrer que $\mathrm{Im}\, w \subset \ker u^p$.

1.b En déduire que $\dim\ker u^{p+q} \leq \dim\ker u^p + \dim\ker u^q$.

2. Dans cette question, on suppose que $u^3 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 2$.

2.a Etablir que $\dim\ker u^2 = 2$. On pourra exploiter deux fois le résultat de la question II.1.b.

2.b Justifier qu'il existe un vecteur a de E tel que $u^2(a) \neq 0$ et observer que la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est une base de E.

2.c Ecrire la matrice U de u et la matrice V de v dans cette base.

3. Dans cette question, on suppose que $u^2 = 0$ et $\mathrm{rg}\, u = 1$.

3.a Montrer que l'on peut trouver un vecteur b de E tel que $u(b) \neq 0$.

3.b Justifier l'existence d'un vecteur c de $\ker u$ tel que la famille $(u(b), c)$ soit libre, puis montrer que la famille $(u(b), c, b)$ est une base de E.

3.c Ecrire alors la matrice U' de u et la matrice V' de v dans cette base.

Partie III

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$. On se propose de montrer que A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose $N = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = N^2 - N$.

1.a Calculer N^3 et justifier que $\operatorname{rg} N \leq 2$.

1.b Justifier que A est inversible et que $A^{-1} = I_3 + M$.

2. Dans cette question, on suppose que $\operatorname{rg} N = 2$.

2.a En exploitant II.2., montrer que la matrice N est semblable à la matrice $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2.b En exploitant II.2.c, dire à quelle matrice « simple » la matrice M est semblable.
En déduire M^3 et $\operatorname{rg} M$.

2.c Montrer que les matrices M et N sont semblables et conclure que A et A^{-1} le sont.

3. Dans cette question, on suppose que $\operatorname{rg} N \leq 1$. Montrer que A et A^{-1} sont encore semblables.