Optimisation d'une fonction le long une courbe

Partie I : Exemples

1.a On considère un triangle ABC, rectangle en C et un point M sur le segment $[A,B]$.
On note x la distance AC, a la distance de M à la droite (BC) et b la distance de M à la droite (AC).
Calculer en fonction de x, a et b la longueur de l'hypoténuse AB du triangle.

1.b On considère dans un plan deux couloirs perpendiculaires de 1 mètre de largeur chacun. Une barre métallique rigide (que nous supposerons sans épaisseur) glisse sur ce plan. On cherche à faire passer cette barre par les deux couloirs.
Quelle est la longueur maximale de la barre qui peut passer d'un couloir à l'autre ?

2. Un fabriquant de boîte de conserves a une commande : il doit produire des boîtes cylindriques de volume V donné.
Quelles doivent être les caractéristiques de la boîte (diamètre et hauteur) pour que le fabriquant utilise le moins de métal possible ?

Partie II : Théorème du point fixe

Dans cette partie, on considère $I=[\alpha,\beta]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$.
Soit $f:I\to I$ vérifiant, pour tout $x\in I$ et tout $y\in I$ la relation : $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$
où k est une constante réelle positive strictement inférieure à 1.
On dit que la fonction f est contractante sur I.

1.a Justifier que la fonction f est continue sur I.

1.b Justifier que l'équation $f(x)=x$ possède une unique solution sur I.
Celle-ci sera notée ξ.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence par : $\begin{cases} u_0\in I \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=f(u_n)\end{cases}$.

2.a Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2.b Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\xi|\le k^n|u_0-\xi|$.

2.c Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie III : Fonctions implicites

Dans cette partie, on considère un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^2$.
Soit $f:U\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
On suppose qu'il existe un point (a,b) de U tel que $f(a,b)=0$ et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$.
On définit enfin une fonction $g:U\to\mathbb{R}$ par : $g(x,y)=y-\dfrac{1}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)}f(x,y)$.

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et calculer ses dérivées partielles $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}$.

2.a Montrer qu'il existe un réel $r>0$ tel que $D=[a-r,a+r]\times[b-r,b+r]$ soit inclus dans U et tel que :
$\forall(x,y)\in D$, $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)\right|\le K$ et $\left|\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)\right|\le\dfrac{1}{2}$ avec $K=\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(a,b)\right|+1$.

2.b En déduire que, pour tout $(x,y)\in D$ et tout $(x',y)\in D$, $|g(x,y)-g(x',y)|\le K|x-x'|$.

2.c En déduire que, pour tout $(x,y)\in D$ et tout $(x,y')\in D$, $\left|g(x,y)-g(x,y')\right|\leq\frac{1}{2}\left|y-y'\right|$.

2.d Etablir l'existence d'un intervalle $I=\left[a-\alpha,a+\alpha\right]$ (avec $\alpha>0$) tel que $I\times\left[b-r,b+r\right]\subset U$ et tel que :

$\forall x\in I$, $\left|g(x,b)-g(a,b)\right|\leq\frac{r}{2}$.

3.a On pose $J=\left[b-r,b+r\right]$. Déduire des questions précédentes que : $\forall(x,y)\in I\times J$, $g(x,y)\in J$,

puis que, pour tout $x\in I$ fixé, l'application $y\mapsto g(x,y)$ est une application contractante sur J.

3.b Montrer que pour tout $x\in I$ fixé, il existe un unique $y\in\left[b-r,b+r\right]$ tel que $f(x,y)=0$.

Ce y sera noté $\varphi(x)$. Que vaut $\varphi(a)$?

3.c Montrer que pour tout $x\in I$ et tout $x'\in I$, $\left|\varphi(x)-\varphi(x')\right|\leq 2K\left|x-x'\right|$.

On en déduit que φ est continue et nous admettrons que φ est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

4. Calculer la dérivée sur I de l'application $x\mapsto f(x,\varphi(x))$ sur I.

En déduire l'expression de la dérivée $\varphi'(a)$ en fonction des dérivées partielles de f en (a,b).

Partie IV : Optimisation le long d'une courbe

Soit f et F deux fonctions réelles définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathcal{C}^1$.
On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\Gamma=\left\{(x,y)\in U\,/\,f(x,y)=0\right\}$.
Une solution de ce problème sera appelée extremum de F lié par la relation $f(x,y)=0$.

1. Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b)=0$ et tel que $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$.

En vertu de l'étude de la partie III, il existe $I=\left[a-\alpha,a+\alpha\right]$ et $J=\left[b-r,b+r\right]$ (avec $\alpha>0$ et $r>0$) et $\varphi:I\to J$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que : $I\times J\subset U$ et $\forall(x,y)\in I\times J$: $f(x,y)=0\Leftrightarrow y=\varphi(x)$.

1.a Montrer que si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y)=0$ alors :

$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)-\frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)=0$.

1.b La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose maintenant que le point (a,b) vérifie $f(a,b)=0$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\neq 0$.

Montrer que l'implication de la question IV.1.b est encore vraie.

Partie V : Autres exemples

1. Quel est le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre ℓ fixé ?
2. Quelle est la hauteur d'un triangle isocèle d'aire maximale dont le cercle circonscrit est de rayon R ?