Années d'utilisation :

Correction

d'après HEC 1974

Partie I

1. Pour $p>n$: $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=0+0=\binom{n}{p}$.

   Pour $p=n$: $\binom{n-1}{n-1}+\binom{n-1}{n}=1+0=\binom{n}{n}$.

   Pour $p<n$: $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}+\dfrac{(n-1)!}{p!(n-p-1)}=\dfrac{(n-1)!(p+(n-p))}{p!(n-p)!}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}\binom{n}{p}$.

   Dans tous les cas $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$.

2. Si $p\geq 1$ alors $\binom{n-1}{p-1}\in\mathbb{N}$ donc $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$ donne $\binom{n-1}{p}\leq\binom{n}{p}$

   avec égalité ssi $\binom{n-1}{p-1}=0$ i.e. $p>n$.

   Si $p=0$ alors $\binom{n}{p}=1=\binom{n-1}{p}$ et il y a égalité et inégalité.

Partie II

1. A une suite $s=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ on peut associer $\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ partie à k éléments de E.

   Inversement, pour toute partie A à k éléments de E, il existe une et une seule suite $s=(a_1,a_2,\ldots,a_k)$ qui lui correspondent (celle-ci étant obtenue en ordonnant la partie A). Il y a donc autant d'éléments dans F qu'il y a de parties à k éléments dans E.

   Ainsi $q=\binom{n}{k}$.

2.a La relation $\preccurlyeq$ est bien évidemment réflexive.

Soit $s=(a_1,\ldots,a_k)$ et $t=(b_1,\ldots,b_k)$ éléments de F.

Supposons $s\neq t$ et considérons h le premier indice tel que $a_h\neq b_h$.

Si $a_h<b_h$ alors il est faux que $t\preccurlyeq s$. Si $a_h>b_h$ alors il est faux que $s\preccurlyeq t$.

Ainsi $s\neq t\Rightarrow s\not\preccurlyeq t$ ou $t\not\preccurlyeq s$. Par contraposée : $s\preccurlyeq t$ et y_h.

Soit $s=(a_1,\ldots,a_k)$, $\binom{y_h+1}{h}\leq n'-\binom{y_k}{k}-\binom{y_{k-1}}{k-1}-\cdots-\binom{y_{h+1}}{h+1}$ et $u=(c_1,\ldots,c_k)$ éléments de

$\binom{y_{h-1}}{h-1}+\binom{y_h}{h}\geq\binom{y_h}{h-1}+\binom{y_h}{h}=\binom{y_h+1}{h}$.

Supposons $s\preccurlyeq t$ et $\binom{y_{h-1}}{h-1}\geq\binom{y_h}{h}$.

Si $s=t$ ou $y_{h-1}\geq y_h$ alors il est clair que $s\preccurlyeq u$.

Sinon, $\binom{y_{h-1}}{h-1}+\binom{y_h}{h}\leq n'-\binom{y_k}{k}-\binom{y_{k-1}}{k-1}-\cdots-\binom{y_{h+1}}{h+1}$ tel que $\binom{y_{h-1}}{h-1}\leq n'-\binom{y_k}{k}-\binom{y_{k-1}}{k-1}-\cdots-\binom{y_h}{h}$ et

$a_h<b_h$

et $\exists h'\in[\![1,k]\!]$ tel que y_{h-1} et $b_{h'}<c_{h'}$.

Dans le cas où $\binom{y_h}{h}\leq n'-\binom{y_k}{k}-\binom{y_{k-1}}{k-1}-\cdots-\binom{y_{h+1}}{h+1}$, on a $\forall i\in[\![i,h-1]\!],a_i=b_i=c_i$ et y_h.

Dans le cas où $h'<h$, on a $h\in[\![1,k-1]\!]$ et $a_h=b_h<c_h$.

Dans tous les cas $s\preccurlyeq u$.

Ainsi $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

2.b Soit $s=(a_1,\ldots,a_k)$ et $t=(b_1,\ldots,b_k)$ éléments de F.

Si $s=t$ alors $s\preccurlyeq t$.

Si $s\neq t$ alors considérons h le premier indice tel que $a_h\neq b_h$.

Si $a_h < b_h$ alors $s \preccurlyeq t$. Si $a_h > b_h$ alors $t \preccurlyeq s$.
Dans tous les cas s et t sont comparables.
L'ordre est total.

3.

s	$(1,2,3)$	$(1,2,4)$	$(1,2,5)$	$(1,3,4)$	$(1,3,5)$	$(1,4,5)$	$(2,3,4)$	$(2,3,5)$	$(2,4,5)$	$(3,4,5)$
$r(s)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

s	$(1,2,3,4)$	$(1,2,3,5)$	$(1,2,4,5)$	$(1,3,4,5)$	$(2,3,4,5)$
$r(s)$	1	2	3	4	5

.

4. $s = (a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Il y a $n - a_k = \binom{n-a_k}{1}$ suites de la forme $(a_1, \dots, a_{k-1}, b)$ strictement supérieures à s.

En effet une telle suite s'obtient en choisissant b dans $\{a_k + 1, \dots, n\}$.

Il y a $\binom{n-a_{k-1}}{2}$ suites de la forme $(a_1, \dots, a_{k-2}, b, c)$ strictement supérieures à s.

En effet une telle suite s'obtient en choisissant $b < c$ dans $\{a_{k-1}, \dots, n\}$.

Plus généralement, pour $h \in [\![1, n]\!]$: il y a $\binom{n-a_h}{k-h+1}$ suites de la forme $(a_1, \dots, a_{h-1}, b_h, \dots, b_k)$ strictement supérieures à s.

En effet une telle suite s'obtient en choisissant $b_h < \dots < b_k$ dans $\{a_h, \dots, n\}$.

Au total il y a $\sum_{h=1}^{k} \binom{n-a_h}{k-h+1}$ suites de F strictement supérieure à s.

Par suite $r(s) = q - \sum_{h=1}^{k} \binom{n-a_h}{k-h+1}$.

5. $r(s) = \binom{16}{10} - \binom{13}{10} - \binom{12}{9} - \binom{9}{8} - \binom{7}{7} - \binom{6}{6} - \binom{5}{5} - \binom{4}{4} - \binom{3}{3} - \binom{2}{2} - \binom{0}{1} = 7487$.

Partie III

1. Soit $A = \left\{ z \in \mathbb{N} / \binom{z}{k} \leq n' \right\}$. A est une partie de $\mathbb{N}$, montrons qu'elle est non vide et majorée

$z = 0 \in A$ car $\binom{0}{k} = 0$ donc $A \neq \varnothing$.

Remarquons que si $z > k$ alors $\binom{z}{k} \geq z$ (cela se démontre aisément par récurrence sur $z > k$)

Soit $z \in A$. Si $z > k$ alors $n' \geq \binom{z}{k} \geq z$ donc $z \leq \max(k, n')$. Ainsi A est majorée.

Finalement, A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$, elle possède un plus grand élément y.

Si $n' = 0$ alors $y = k - 1$ car $\binom{k-1}{k} = 0$ et $\forall z \geq k, \binom{z}{k} \neq 0$.

Si $k = 1$ alors $y = n'$ car $\binom{n'}{1} = n'$ et $\forall z > n'$, $\binom{z}{1} = z > n'$.

2.a Soit $h \in [\![1, k-1]\!]$.

y_h est le plus grand entier tel que $\binom{y_h}{h} \leq n' - \binom{y_k}{k} - \binom{y_{k-1}}{k-1} - \dots - \binom{y_{h+1}}{h+1}$.

y_{h-1} est le plus grand entier tel que $\binom{y_{h-1}}{h-1} \leq n' - \binom{y_k}{k} - \binom{y_{k-1}}{k-1} - \dots - \binom{y_h}{h}$

donc $\binom{y_{h-1}}{h-1} + \binom{y_h}{h} \leq n' - \binom{y_k}{k} - \binom{y_{k-1}}{k-1} - \dots - \binom{y_{h+1}}{h+1}$.

Si $y_{h-1} \geq y_h$ alors $\binom{y_{h-1}}{h-1} \geq \binom{y_h}{h-1}$ (par I.2) et donc $\binom{y_{h-1}}{h-1} + \binom{y_h}{h} \geq \binom{y_h}{h-1} + \binom{y_h}{h} = \binom{y_h + 1}{h}$ et alors $\binom{y_h + 1}{h} \leq n' - \binom{y_k}{k} - \binom{y_{k-1}}{k-1} - \dots - \binom{y_{h+1}}{h+1}$ ce qui contredit la définition de y_h.

2.b y_1 est le plus grand entier tel que $\binom{z}{1} \le N$ avec $N = n' - \binom{y_k}{k} - \binom{y_{k-1}}{k-1} - \cdots - \binom{y_2}{2}$ on a donc $y_1 = N$ et par suite $\binom{y_1}{1} + \binom{y_2}{2} + \cdots + \binom{y_k}{k} = N + \binom{y_2}{2} + \cdots + \binom{y_k}{k} = n'$.

3.a $y_k < n$ car $\forall z \ge n$, $\binom{z}{k} \ge \binom{n}{k} = q > n'$ (via I.2)

3.b $s = (n - y_k, \ldots, n - y_1) = (a_1, \ldots, a_k)$ avec $a_h = n - y_{k-h+1}$.

$$r(s) = q - \sum_{h=1}^{k} \binom{n - a_h}{k - h + 1} = q - \sum_{h=1}^{k} \binom{y_{k-h+1}}{k - h + 1} \underset{h'=k+1-h}{=} q - \sum_{h'=1}^{k} \binom{y_{h'}}{h'} = q - n'.$$

4. Connaissant $r(s)$, on peut calculer $n' = q - r(s)$.
On construit ensuite la suite $y_k, \ldots, y_1$ comme en 2. puis la suite s comme en 3.b

5. $q = \binom{16}{10} = 8008$, $n' = 8008 - 2003 = 6005$.
$y_{10} = 15$, $6005 - 3003 = 3002$, $y_9 = 14$, $3002 - 2002 = 1000$, $y_8 = 12$, $1000 - 495 = 505$, $y_7 = 11$, $505 - 330 = 175$, $y_6 = 9$, $175 - 84 = 91$, $y_5 = 8$, $91 - 56 = 35$, $y_4 = 7$, $35 - 35 = 0$, $y_3 = 2$, $y_2 = 1$, $y_1 = 0$.
Finalement $s = (1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 14, 15, 16)$.