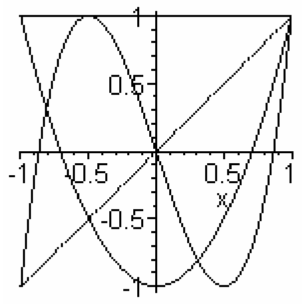
# Correction

d'après Ecole de l'Air 1993

*Partie I*

1.a $f_0(x)=1$, $f_1(x)=x$, $f_2(x)=2x^2-1$ et $f_3(x)=4x^3-3x$.




1.b $f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=\cos((n+1)\theta)+\cos((n-1)\theta)$ en posant $\theta=\arccos x$ pour nous alléger la vie. Via $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$, on obtient : $f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)=2\cos\theta\cos n\theta=2xf_n(x)$.

1.c Unicité : Si $T_n$ et $U_n$ sont solutions alors pour tout $x\in[-1,1]$, $T_n(x)=U_n(x)$ et donc $x$ est racine de $T_n-U_n$. Ce polynôme ayant une infinité de racines, on peut conclure qu'il est nul et que $T_n=U_n$.
Existence : Raisonnons par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$.
Pour $n=0$ et $n=1$ : $T_0=1$ et $T_1=X$ nous convient à l'extase d'avoir déterminer deux sublimes solutions.
Supposons la propriété établie au rang $n$ et $n-1$ (avec $n\geq 1$).
$f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)=T_{n+1}(x)$ en posant $T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$ qui est bien un polynôme. Récurrence établie.
$T_0=1$, $T_1=X$, $T_2=2X^2-1$, $T_3=4X^3-3X$ et $T_4=8X^4-8X^2+1$.

2.a Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$, montrons $\deg T_n=n$.
La propriété est vraie, ô joie, aux rangs $n=0$ et $n=1$.
Supposons la propriété établie aux rangs $n$ et $n-1$ (avec $n\geq 1$).
$T_{n+1}=2XT_n-T_{n-1}$ avec $\deg 2XT_n=n+1$ et $\deg T_{n-1}=n-1$. Par somme de polynôme de degré distincts : $\deg T_{n+1}=\max(\deg(2XT_n),\deg(T_{n-1}))=n+1$. Récurrence établie.
Notons
Les coefficients dominants de $T_0$ et $T_1$ valent 1.
Pour $n\geq 1$, on voit par l'étude ci-dessus on voit que le coefficient dominant de $T_{n+1}$ est le double de celui de $T_n$. On peut donc conclure que le coefficient dominant de $T_0$ vaut 1 et celui de $T_n$ vaut $2^{n-1}$ pour $n\geq 1$.

2.b Soit $x\in[-1,1]$ une racine de $T_n$. Pour $\theta=\arccos x\in[0,\pi]$ on a $x=\cos\theta$ et $T_n(x)=\cos n\theta=0$ donc il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $n\theta=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ puis $\theta=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Sachant $\theta\in[0,\pi]$, on peut affirmer $k\in\{0,1,\ldots,n-1\}$.
Ainsi $x=\cos\dfrac{\pi}{2n},\cos\dfrac{3\pi}{2n},\ldots,$ ou $\cos\dfrac{(2n-1)\pi}{2n}$.
Inversement, on vérifie aisément que, ces éléments sont des racines de $T_n$ dans $[-1,1]$. Ainsi les racines de $T_n$ dans $[-1,1]$ sont exactement les $x_0,\ldots,x_{n-1}$ avec $x_k=\cos\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$. Pour $k\in\{0,\ldots,n-1\}$ les $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont des éléments deux à deux distincts de $[0,\pi]$. La fonction cosinus étant injective sur $[0,\pi]$, on peut dire que les $x_0,\ldots,x_{n-1}$ sont deux à deux distincts. Le polynôme $T_n$ possède donc exactement $n$ racines dans l'intervalle $[-1,1]$. Or $\deg T_n=n$, on peut donc affirmer qu'il n'y a pas d'autres racines et que ces dernières sont simples.

2.c Par récurrence double sur $n\in\mathbb{N}$, montrons que $T_n$ et $n$ ont même parité.
Pour $n=0$ ou $n=1$ : ok
Supposons la propriété établie aux rangs $n$ et $n-1$ (avec $n\geq 1$)

Si $n$ est pair alors $T_n$ est pair, $T_{n-1}$ impair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est impair.
Si $n$ est impair alors $T_n$ est impair, $T_{n-1}$ pair et $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$ est pair.
Récurrence établie.

3.a $T_n(\cos\theta) = f_n(\cos\theta) = \cos(n\arccos(\cos\theta)) = \cos(n\theta)$ que $\theta \in [0,\pi]$ ou par parité que $\theta \in [-\pi,0]$ ou encore par périodicité que $\theta \in \mathbb{R}$.
La deuxième relation s'établit par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$ : ok.
Supposons la propriété établie aux rangs $n$ et $n-1$ (avec $n \geq 1$)
$T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}n\theta - \operatorname{ch}(n-1)\theta$ or $\operatorname{ch}(n+1)\theta + \operatorname{ch}(n-1)\theta = 2\operatorname{ch}\theta\operatorname{ch}n\theta$ donc
$T_{n+1}(\operatorname{ch}\theta) = \operatorname{ch}(n+1)\theta$.
Récurrence établie.

3.b Si $|x| \leq 1$ alors $T_n(x) = f_n(x) = \cos(n\arccos x) \in [-1,1]$.
Si $x > 1$ alors il existe $\theta > 0$ tel que $x = \operatorname{ch}\theta$ et alors $T_n(x) = \operatorname{ch}n\theta > 1$ donc $|T_n(x)| > 1$.
Par raison de parité : si $x < -1$ alors $|T_n(x)| > 1$.

4. L'équation $|T_n(x)| = 1$ ne peut avoir de solution que dans $[-1,1]$.
Soit $x \in [-1,1]$ solution de cette équation.
Il existe un unique $\theta \in [0,\pi]$ tel que $x = \cos\theta$.
$|T_n(x)| = 1$ donne alors $|\cos n\theta| = 1$ donc $\exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = k\pi$ i.e. $\theta = k\pi/n$.
Or $\theta \in [0,\pi]$ donc $k \in \{0,\ldots,n\}$ et finalement $x$ est l'un des $\cos\dfrac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{0,\ldots,n\}$. Inversement, ces éléments sont bien racines de l'équation $|T_n(x)| = 1$. Posons $a_k = \cos\dfrac{k\pi}{n}$. On observe :
$-1 = a_n < a_{n-1} < \cdots < a_1 < a_0 = 1$. Il y a donc exactement $n+1$ solutions et les solutions des équations $T_n(x) = 1$ sont alternées avec les solutions de l'équation $T_n(x) = -1$ car $T_n(a_k) = \cos(k\pi) = (-1)^k$.

5.a Par ce qui précède $\|T_n\| = 1$ car $\forall x \in [-1,1], |T_n(x)| \leq 1$ et que $T_n(1) = 1$.
Par suite $\|\tilde{T}_n\| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

5.b $\tilde{T}_n$ et $P$ sont unitaires et de degré $n$ donc $\deg D < n$.

5.c $D(\cos\dfrac{k\pi}{n}) = \dfrac{(-1)^k}{2^{n-1}} - P(\cos\dfrac{k\pi}{n})$.
Si $k$ est pair alors $D(\cos\dfrac{k\pi}{n}) = \dfrac{1}{2^{n-1}} - P(\cos\dfrac{k\pi}{n}) \geq \dfrac{1}{2^{n-1}} - \|P\| > 0$.
Si $k$ est impair alors $D(\cos\dfrac{k\pi}{n}) = \dfrac{-1}{2^{n-1}} - P(\cos\dfrac{k\pi}{n}) \leq \dfrac{-1}{2^{n-1}} + \|P\| < 0$.
Pour $k \in \{0,\ldots,n\}$ les $\cos\dfrac{k\pi}{n}$ sont des valeurs successives entre lesquelles la fonction $D$ change de signe, or celle-ci est continue donc elle s'annule entre ces valeurs successives : cela fournit au moins $n$ annulations du polynôme $D$ or $\deg D < n$ donc $D = 0$ et $P = \tilde{T}_n$ ce qui est absurde puisque $\|P\| < \|\tilde{T}_n\|$.

## *Partie II*

1.a $\deg L_k = n$.

1.b Les racines de $L_k$ sont les $a_0,\ldots,\hat{a}_k,\ldots,a_n$ donc $L_k(a_i) = 0$ pour $i \neq k$.
$$L_k(a_k) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n} \frac{a_k - a_j}{a_k - a_j} = 1.$$

1.c Supposons $\lambda_0 L_0 + \cdots + \lambda_n L_n = 0$ . En évaluant cette en relation en $a_k$ on obtient : $\lambda_k = 0$ . La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est donc libre or elle est constituée de $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $P(a_i) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k) L_k(a_i) = \sum_{k=0}^{n} f(a_k)\delta_{k,i} = f(a_i)$ donc $P$ est bien solution du problème posé. Si $Q$ en est une autre solution alors $P(a_i) = Q(a_i)$ donc $a_i$ racine de $P-Q$ . Cela fournit au moins $n+1$ racines de $P-Q$ alors que $P-Q \in \mathbb{R}_n[X]$ donc $P-Q=0$ i.e. $P=Q$ .

3.a Si $x \in \{a_0, \ldots, a_n\}$ alors $\Pi_{n+1}(x) = 0$ et $f(x) = P(x)$ donc n'importe quel $\xi$ convient.

3.b Si $x \notin \{a_0, \ldots, a_n\}$ alors $\Pi_{n+1}(x) \neq 0$ et $K = \dfrac{P(x) - f(x)}{\Pi_{n+1}(x)}$ convient

$F$ s'annule alors en $a_0, \ldots, a_n$ et aussi en $x$ : cela fournit $n+2$ annulations. Par application du théorème de Rolle, $F'$ s'annule au moins $n+1$ fois, $F''$ au moins $n$ fois,…, $F^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois d'où l'existence d'un $\xi \in [-1,1]$ tel que $F^{(n+1)}(\xi) = 0$ . Or $F^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - P^{(n+1)}(\xi) - K\Pi_{n+1}^{(n+1)}(\xi)$ avec $P^{(n+1)} = 0$ car $\deg P \le n$ et $\Pi_{n+1}^{(n+1)} = (n+1)!$ car $\Pi_{n+1}$ est unitaire et de degré $n+1$. On conclut alors : $f^{(n+1)}(\xi) = K(n+1)!$ puis la relation voulue.

3.c Pour tout $x \in [-1,1]$ , $|f(x) - P(x)| \le \dfrac{|\Pi_{n+1}(x)|}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\xi)| \le \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|$ t donc

$\|f - P\| = \sup_{[-1,1]} |f(x) - P(x)| \le \dfrac{\|\Pi_{n+1}\|}{(n+1)!} \|f^{(n+1)}\|$ .

4. $\Pi_{n+1} \in P_{n+1}$ . Compte tenu de la partie I, $\|\Pi_{n+1}\|$ sera s'il est égal à $\Pi_{n+1} = \tilde{T}_{n+1}$ ce qui est obtenu en prenant $a_0, \ldots, a_n$ les racines de $T_{n+1}$ à savoir les $\cos \dfrac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}$ avec $k \in \{0, \ldots, n\}$ .