Théorème de Lucas

Partie I : Parties convexes du plan complexes

Etant donnés $a,b\in\mathbb{C}$, on appelle segment d'extrémités a et b, l'ensemble $[a,b]=\{\lambda a+(1-\lambda)b/\lambda\in[0,1]\}$.

1. Soit $a,b\in\mathbb{C}$. Montrer que $[a,b]=[b,a]$.

Une partie C de $\mathbb{C}$ est dite convexe ssi : $\forall a,b\in C,[a,b]\subset C$.

2. Exemples de parties convexes :

2.a Soit $a,b\in\mathbb{C}$. Montrer que $[a,b]$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$.

2.b Soit $D=\{z\in\mathbb{C}/|z|\le 1\}$. Montrer que D est une partie convexe de $\mathbb{C}$.

3. Deux propriétés :

3.a Soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties convexes de $\mathbb{C}$.
Montrer que $C=\bigcap_{i\in I}C_i$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$.

3.b Soit C une partie convexe de $\mathbb{C}$.
Montrer, en raisonnant par récurrence, que :
pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, tout $a_1,\dots,a_n\in C$ et tout $\lambda_1,\dots,\lambda_n>0$, on a $a=\dfrac{\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}\in C$

4. Soit A une partie de $\mathbb{C}$ et S l'ensemble des parties convexes de $\mathbb{C}$ contenant A.
On pose $\mathrm{Conv}(A)=\bigcap_{C\in\mathcal{S}}C$.

4.a Justifier que $\mathrm{Conv}(A)$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$ contenant A.

4.b Observer que si C est une partie convexe de $\mathbb{C}$ contenant A alors $\mathrm{Conv}(A)\subset C$.

Ainsi, $\mathrm{Conv}(A)$ apparaît comme étant le plus petit convexe de $\mathbb{C}$ qui contient A, on l'appelle enveloppe convexe de A.

4.c Soit $a,b\in\mathbb{C}$ et $A=\{a,b\}$. Déterminer $\mathrm{Conv}(A)$.

4.d Soit $U=\{z\in\mathbb{C}/|z|=1\}$. Déterminer $\mathrm{Conv}(U)$.

Partie II : Théorème de Lucas

Soit $P\in\mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant et $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ ses racines deux à deux distinctes.

Notons, pour tout $i\in\{1,\dots,n\}$, α_i la multiplicité de a_i en tant que racine de P.

1.a Déterminer les pôles de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$ ainsi que leurs multiplicités.

1.b Justifier que $\dfrac{P'}{P}=\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{X-a_i}$.

2.a Soit a une racine du polynôme P' qui ne soit pas racine de P.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\alpha_i}{|a-a_i|^2}(a-a_i)=0$.

2.b En déduire l'existence de réels positifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que $a=\dfrac{\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_n a_n}{\lambda_1+\cdots+\lambda_n}$.

3. Conclure que les racines de P' appartiennent à $\mathrm{Conv}\{a_1,\dots,a_n\}$, c'est à dire à l'enveloppe convexe de l'ensemble formé des racines de P.